

EFICIENCIA EN MODELOS DE ASIGNACIÓN DE PORTAFOLIOS

JAVIER ANDRÉS CALDERÓN CAMPOS



PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ADMINISTRATIVAS

MAESTRIA EN ECONOMÍA

BOGOTÁ, D.C

2016

EFICIENCIA EN MODELOS DE ASIGNACIÓN DE PORTAFOLIOS

JAVIER ANDRÉS CALDERÓN CAMPOS

Trabajo de Grado para optar el título de Maestría en Economía

Tutor

Ph. D. Gabriel Ignacio Penagos

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ADMINISTRATIVAS

MAESTRIA EN ECONOMÍA

BOGOTÁ, D.C

2016

Nota de Aceptación

Presidente del Jurado

Jurado

Jurado

Bogotá D.C., noviembre de 2016

Nota de Advertencia

Reglamento de la Pontificia Universidad Javeriana

Artículo 23

La Universidad no se hace responsable por los conceptos emitidos por los alumnos en sus trabajos de grado, solo velará porque no se publique nada contrario al dogma y la moral Católica y porque el trabajo no contenga ataques y polémicas puramente personales, antes bien, se vean en ellas el anhelo de buscar la verdad y la justicia.

Contenido

	pág.
Introducción	1
1. Marco Teórico	4
1.1 Selección óptima de portafolios	4
1.1.1 Modelo de Markowitz.	5
1.1.2 Frontera eficiente	7
1.1.3 Capital Market Line (CML)	7
1.1.4 Índice de Sharpe.	9
1.2 Elección bajo incertidumbre	10
1.3 Valor en Riesgo (VaR)	14
1.4 Valor en Riesgo Condicional (CVaR)	18
1.5 Selección óptima de portafolios con una medida de riesgos	20
1.6 Método de simulaciones Monte Carlo	23
1.7 Modelo Browniano Geométrico	24
2. Desarrollo Metodológico	27
2.1 Datos de estudio	27

2.2 Método	30
3. Resultados	39
4. Conclusiones	56
Referencias Bibliográficas	58
Anexos	61

Lista de Figuras

	pág.
Figura 1. Frontera eficiente y portafolio de mínima varianza	7
Figura 2. Capital Market Line y Portafolio de Mercado	8
Figura 3. Curvas de Indiferencia y Portafolio Óptimo	13
Figura 4. Representación gráfica del VaR	14
Figura 5. Representación gráfica del VaR y CVaR	19
Figura 6. Simulación Monte Carlo	24
Figura 7. Curva Indiferencia estimada con una función de Utilidad CRRA	39
Figura 8. Frontera Eficiente – Colombia	40
Figura 9. Frontera Eficiente – Estados Unidos	41
Figura 10. Frontera Eficiente – España	42
Figura 11. Frontera Eficiente – Alemania	42
Figura 12. Frontera Eficiente – Japón	42
Figura 13. CML – Colombia	49
Figura 14. CML– Estados Unidos	49
Figura 15. CML – España	50
Figura 16. CML– Alemania	50
Figura 17. CML– Japón	51

Figura 18. VaR Con el Método Monte Carlo – Colombia	53
Figura 19. VaR Con el Método Monte Carlo – Estados Unidos	53
Figura 20. VaR Con el Método Monte Carlo – España	54
Figura 21. VaR Con el Método Monte Carlo – Alemania.	54
Figura 22. VaR Con el Método Monte Carlo – Japón	55

Lista de Tablas

	pág.
Tabla 1. Rentabilidad y Volatilidad de los Activos Financieros de Estudio	30
Tabla 2. Resultados Portafolios de Mercado	43
Tabla 3. Resultados Portafolios de Mínima Varianza	43
Tabla 4. Resultados Portafolios Óptimos	44
Tabla 5. Resultados VaR con un nivel de Confianza del 95%	45
Tabla 6. Resultados VaR con un nivel de Confianza del 99%	45
Tabla 7. Resultados CVaR con un nivel de Confianza del 95%	46
Tabla 8. Resultados CVaR con un nivel de Confianza del 99%	46
Tabla 9. Rentabilidad diaria de los portafolios sin y con medidas de riesgo%	52

Lista de Anexos

	pág.
Anexo A. Función Utilidad CRRA	61
Anexo B. Solución Paramétrica Modelo Markowitz	62
Anexo C. Perfil Acciones	65
Anexo D. Gráficos	68

Resumen

El modelo de selección de portafolios de Markowitz es una herramienta de diversificación basada en la correlación de los rendimientos de los activos. Desde su aparición, ha sido la base teórica en la selección óptima de portafolios, dando lugar a múltiples desarrollos y derivaciones. Sin embargo, los inversionistas desean contemplar elementos adicionales con los cuales puedan minimizar sus riesgo de pérdida, medidas de riesgo como VaR y el CVaR que constituye una magnitud de enorme interés de cara a la gestión del riesgo ya que incorporan el hecho de que los inversionistas suelen tratar las pérdidas y ganancias de manera simétrica, lo que no sucede con medidas como la desviación estándar que plantea el modelo tradicional de selección de portafolios, donde se asigna una ponderación igual a las pérdidas y las ganancias, convirtiéndose así en instrumentos que minimiza las pérdidas posibles de un activo. A partir de lo anterior, en el presente documento se pretende realizar una validación de la eficiencia del modelo de Markowitz al incorporar medidas de riesgo como lo son el VaR y el CVaR.

Palabras Claves: Portafolio, Selección Optimo, Rentabilidad, Eficiencia, Riesgo, VaR, CVaR.

Abstract

The portfolio selection model of Markowitz is a diversification tool based on the correlation of asset returns, since its inception, has been the theoretical basis for optimal portfolio selection, leading to multiple developments and referrals. However, investors want to contemplate additional elements which can minimize the risk of loss, risk measures such as VaR and CVaR constitutes a magnitude of enormous interest with regard to risk management and incorporating the fact that investors often treat gains and losses symmetrically, which does not happen with measures such as standard deviation that pose the traditional model of portfolio selection, which assigns a weight equal to the lost and profits, thus becoming instruments that minimize the losses potential of an asset. It is planned to perform a validation of the efficiency of Markowitz model incorporating risk measures such as VaR and CVar.

Keywords: Portfolio, Optimal Selection, Profitability, Efficiency, Risk, VaR, CVaR.

Introducción

En la selección adecuada de un portafolio se busca la mejor combinación entre varios activos cuyo objetivo es obtener la mayor rentabilidad al menor riesgo, planteamiento expuesto por Harry Markowitz (1952) en su artículo Portfolio Selection publicado en la revista Journal of Finance, el cual es considerado como un gran aporte a nivel teórico y es el fundamento para todas las investigaciones que se han realizado posteriormente en relación con la administración y asignación eficiente de portafolios. (Markowitz, 1952)

El desarrollo de Markowitz se basa en la correlación existente entre los activos, para ello toma como elementos principales de análisis la rentabilidad de cada uno de ellos y su volatilidad, definida esta última como la desviación estándar de los rendimientos, y basado en la noción sobre expectativas futuras desarrolladas en la teoría de expectativas de utilidad descritas por Von Neumann y Oskar Morgenstern (1944). Del anterior planteamiento surgen los desarrollos como el presentado por Tobin (2000) citado en Astaiza (2012), quien definió el teorema de la separación de activos el cual determina que la decisión de inversión está separada de la de financiamiento, ya que existen dos etapas bien diversificadas al momento de armar un portafolio eficiente: la primera que consiste en encontrar el portafolio de activos riesgosos y una segunda que consiste en la combinación entre el portafolio riesgoso y los activos libres de riesgo. Por otro lado, se encuentran los aportes desarrollados por Sharpe (2000) Astaiza (2012), citado en quien planteo una medida de eficiencia contemplando la relación existente entre rentabilidad y riesgo.

Los conceptos descritos anteriormente componen la base de la teoría moderna de portafolios la cual en síntesis se ocupa principalmente de la construcción óptima de los mismos con razonable aversión al riesgo y de sus implicaciones sobre los rendimientos y precios de los diferentes activos, evaluando con ello el riesgo implícito en un portafolio, para lo cual se acude a la estimación de la varianza de los rendimientos esperados, variable que implica valorar la probabilidad de los rendimientos negativos por igual que de los rendimientos positivos. Pero, existe evidencia que muestra que los agentes suelen tratar las pérdidas y ganancias de forma asimétrica (Kahneman, 1990), por tanto, lo anterior indicaría que la elección de portafolios desarrollados, como los descritos, puede llevar a una estrategia ineficiente, por consiguiente, se desea incorporar en la elección de portafolios medidas de riesgo capaz de incorporar cualquier falta de normalidad en los rendimientos¹.

En este sentido, una medida de riesgo usual, es el valor en riesgo (VaR), publicado inicialmente en 1995 por el banco J. P. Morgan. Sin embargo, se conocen trabajos previos por Macaulay en 1939, para cuantificar el riesgo de mercado de algunos instrumentos financieros en los Estados Unidos. Entre otros trabajos más recientes, se encuentra el trabajo propuesto por Artzner en 1999, quien desarrolla las llamadas medidas coherentes de riesgo y que a su vez satisfacen un conjunto de propiedades básicas y deseables para la medición del riesgo de un portafolio. A partir de este trabajo surgen desarrollos sobre la teoría del riesgo, entre los que se encuentran los conceptos de valor en riesgo condicional (CVaR) en 2000 y 2002. (Artzner, 1999)

Por tanto, se puede plantear la existencia de un portafolio óptimo el cual maximice la rentabilidad sujeta a una restricción de riesgo de pérdida y no solo a una medida de riesgo paramétrica como la desviación estándar. Este postulado corresponde entonces al objetivo de

¹ El desarrollo de Markowitz asume normalidad en los rendimientos.

exploración de este documento, donde se desea validar si la incorporación de medidas de riesgo en el proceso de selección de un portafolio ofrece un resultado más eficiente.

En la primera parte se realiza una revisión conceptualmente a la teoría de selección de portafolios, igualmente sobre elección bajo incertidumbre, así como medidas que existen para la evaluación del riesgo como el VaR y el CVaR y algunos métodos de estimación para estas como la paramétrica y a través del método de Monte Carlo con el uso de modelo Browniano Geométrico, adicionalmente se explora el índice de eficiencia que desarrolla Campell, Huisman y Koedijk (2001) en su publicación “Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework”, en el cual se plantea una medida similar al índice de Sharpe pero incluyendo una métrica sobre riesgo, medida que se utilizará para desarrollar el objetivo de este documento. En la segunda parte se describe la metodología que se aplica y la muestra de datos seleccionada, para lo que se ha propuesto hacer una validación de portafolios en diferentes mercados. En la siguiente sección se presentan los resultados obtenidos y finalmente las conclusiones.

1. Marco Teórico

1.1 Selección óptima de portafolios

Markowitz (1952) desarrolló el modelo pionero en la selección óptima de portafolios, dando inicio al análisis y estudios en referencia a este tema. La base teórica de su modelo se centra en la relación existente entre riesgo y rentabilidad tomando para estos análisis variables estadísticas tales como la volatilidad y el rendimiento de los activos respectivamente para el periodo de estudio. Propuesta argumentada en que los inversores demandan un retorno mayor para transacciones más riesgosas.

Tobin (1958) expone una extensión del modelo de Markowitz a partir de su teorema de la separación, donde todos los agentes pueden seleccionar el mismo portafolio a pesar de su aversión al riesgo, definiéndose este como el mejor en términos de rentabilidad para un nivel de riesgo dado y ajustando el balance entre riesgo y retorno esperado; siendo posible que dicho balance requiera inyección extra de efectivo y en los casos de iliquidez se justifique la adquisición de deuda (Puerta,2011). Este portafolio se encuentra ubicado en el punto de tangencia que se genera entre la línea que une el punto de rentabilidad- riesgo asociado con el activo libre de riesgo y la frontera eficiente de Markowitz, a este portafolio se le denomina “portafolio de mercado”

Los postulados de Markowitz (1952) y de Tobin (1958) fueron la base para que Sharpe (1964) desarrollara las bases del modelo de equilibrio de activos financieros, conocido como

CAPM (Capital Asset Pricing Model). El objetivo del modelo es cuantificar e interpretar la relación que existe entre el riesgo y el rendimiento, y a través de esta relación lineal establecer el equilibrio de los mercados financieros.

Los aportes al modelo de selección de portafolios realizados por Markowitz, Tobin y Sharpe, son las bases para el análisis de la selección de portafolios, conceptos que les otorgó el Premio Nobel de Economía por sus contribuciones².

Después de sus teorías y basados en estas, se realizan diversos estudios, con el propósito de extenderlas o simplificar el cálculo de los parámetros de las propuestas iniciales.

1.1.1 Modelo de Markowitz. El enfoque propuesto por Harry Markowitz en 1952, sobre la conformación de portafolios de inversión, revolucionó el campo de las finanzas, explicando principios, como el de portafolios eficientes, que están presentes en una gran cantidad de modelos de construcción de carteras.

Un portafolio eficiente, según Markowitz (1952) es aquel que tiene un mínimo riesgo, para un retorno dado o, equivalentemente un portafolio con un máximo retorno para un nivel de riesgo dado.

Una de las formas de encontrar este conjunto de portafolios eficientes es a través del siguiente modelo, que sólo considera la minimización de la varianza del portafolio y que corresponde al siguiente esquema de programación no lineal.

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sigma_c^2 \\ \text{s. a. } & \sum_{i=1}^N \bar{R}_i x_i = R \end{aligned}$$

² James Tobin recibe el Premio Nobel en 1981 por su análisis de los mercados financieros y sus relaciones con las decisiones de gasto, empleo producción y precios, mientras que Harry Markowitz y William Sharpe lo ganan en 1990 por sus trabajos pioneros en la teoría de la economía financiera.

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1$$

$$\text{Donde } \sigma_c^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}$$

Una vez que el problema es resuelto con alguna técnica de programación matemática, se logra obtener la proporción de cada activo dentro de la cartera de inversiones y que satisfacen las restricciones planteadas en el modelo, sin considerar las condiciones de no negatividad para las ponderaciones de los activos. Una de las soluciones al problema planteado es por medio de la técnica de Multiplicadores de Lagrange.

El modelo de Markowitz necesita entradas o inputs, los retornos esperados de los activos que integrarán la cartera y la matriz de varianza-covarianza entre los retornos de los activos.

El rendimiento o retorno promedio, es la estimación del retorno esperado y que se expresa como:

$$\bar{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t}$$

Dónde:

$R_{i,t}$: Es el retorno³ del activo i al tiempo t .

T : Es el período o ventana de tiempo sobre la cual se está considerando el rendimiento o retorno promedio.

La matriz de varianza covarianza representa toda la variabilidad y, por ende, el riesgo de los activos financieros. Su estimación precisa es fundamental en la determinación de la cartera

3 El retorno de un activo se define como $R_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}}$, que corresponde a la tasa de variación de los precios del activo para un período dado.

eficiente en el modelo de media-varianza, ya que contiene la información acerca de la volatilidad de los activos financieros, así como de los comovimientos entre los mismos.

1.1.2 Frontera eficiente. La frontera eficiente es el conjunto de puntos del plano de rentabilidad-riesgo, en la cual están todas las carteras de inversión que tienen un mínimo riesgo para un retorno esperado dado.

Cuando se usa la optimización para obtener la frontera eficiente, se debe resolver el problema, para cada nivel de retorno R elegido por el inversionista.

La figura 1, muestra el resultado del proceso descrito anteriormente, donde el conjunto de portafolios eficientes está representado por una hipérbola. Igualmente se evidencia que el portafolio de mínima varianza (MV) corresponde al portafolio con la menor volatilidad o dicho de otra forma el menor riesgo.

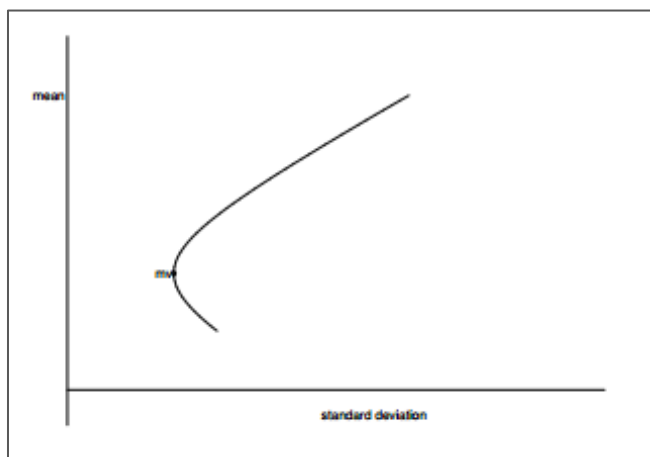


Figura 1. Frontera eficiente y portafolio de mínima varianza. Datos obtenidos de Engels (2004,p.53)

1.1.3 Capital Market Line (CML). La CML representa la relación lineal entre el rendimiento esperado y el riesgo total para diferentes combinaciones de una sola cartera del mercado (cartera riesgosa) y varias proporciones de préstamo o endeudamiento libres de riesgo.

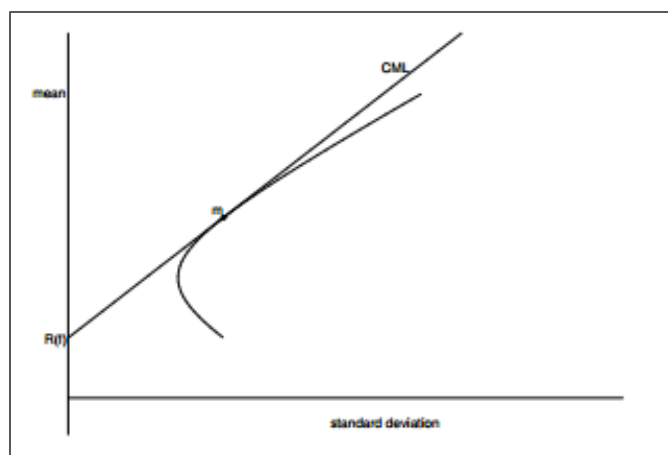


Figura 2. Capital Market Line y Portafolio de Mercado. Datos obtenidos de Engels (2004, p.54)

En sí, el modelo teórico de Markowitz (1952) deduce que los inversionistas estructuran sus portafolios con activos riesgosos, pero a partir del teorema de separación de Tobin (1958), se amplía la propuesta inicial de Markowitz, incorporando un activo libre de riesgo (R_f), al conjunto inicial de activos riesgosos. Ahora el portafolio óptimo se encuentra ubicado en el punto de tangencia que se genera, entre CML y la frontera eficiente de Markowitz, punto denominado portafolio de mercado.

Este activo libre de riesgo, generalmente es un valor emitido por el gobierno de cada país, con un vencimiento que coincide con el horizonte de tiempo de análisis del estudio, con una rentabilidad segura y sin ninguna incertidumbre de su valor final, por tanto, su volatilidad es cero.

Por lo anterior, al incorporar un activo libre de riesgo, el inversionista podrá obtener un portafolio de menor riesgo y menor rentabilidad en comparación con el portafolio de mercado, si combina el activo libre de riesgo con activos riesgosos (parte inferior de la CML, antes del punto de tangencia).

Características

- La ordenada en el origen (R_f) es el tipo de interés nominal sin riesgo.
- La pendiente de la CML representa la relación entre la rentabilidad esperada R_p y el riesgo asociado σ_p .

Por tanto, su ecuación es:

$$R_p = R_f + r\sigma_p$$

Que está en función de la pendiente (r) y de la ordenada del origen σ_p .

Por tanto, el rendimiento esperado del mercado (R_M) será:

$$R_M = R_f + r\sigma_M$$

Donde podemos deducir la pendiente:

$$r = \frac{R_M - R_f}{\sigma_M}$$

Sustituyendo en la ecuación inicial:

$$R_p = R_f + \frac{R_M - R_f}{\sigma_M} \sigma_p$$

1.1.4 Índice de Sharpe. El Índice Ratio de Sharpe mide el rendimiento en exceso (o prima de riesgo) por unidad de desviación típica en los activos de inversión.

$$Sharpe = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

Donde R_p , corresponde al retorno del portafolio, R_f es la tasa libre de riesgo y σ_p es la desviación estándar de los retornos del portafolio, tomada como medida de riesgo, así, el Índice de Sharpe representa como la rentabilidad de un activo o portafolio compensa el riesgo que se asume al invertir en él. (Sharpe 1964)

Al respecto Carbonell & Echevarria (2008), manifiestan:

Cuando el valor es positivo y grande, indica altos niveles de rendimiento y baja variabilidad, mientras que, si el valor es negativo y grande, indica rendimientos inferiores a la tasa libre de riesgo y baja variabilidad. Este índice estipula qué tan bueno es el desempeño del portafolio si se le compara con el respectivo índice del portafolio de referencia (p.22).

Al comparar dos activos frente a un punto de referencia común (índice del mercado), el que tiene un mayor Índice de Sharpe, proporciona una mejor rentabilidad para el mismo riesgo.

1.2 Elección bajo incertidumbre

La teoría del portafolio es un problema de selección de un consumidor; donde el consumidor es un inversionista, los bienes son los diferentes activos ofrecidos en el mercado y donde cada agente presenta un comportamiento de consumo (función de utilidad) el cual genera un nivel de utilidad diferente, por lo tanto, tiende a maximizar la misma de acuerdo con el ingreso. Esto genera que existan diferentes combinaciones de bienes, cuya ordenación y preferencias son una decisión del consumidor. (Ferguson y Gould, 1978)

Por tanto, en la selección de portafolios los individuos enfrentan un problema de elección bajo incertidumbre para lo cual se aplica el concepto de utilidad esperada. Por lo anterior, se trabaja sobre el supuesto que un individuo debe decidir en el momento o la composición de su

cartera para el periodo 1, y que existen N activos que puede adquirir y que estos tienen rendimientos aleatorios.

$$R_i, i = 1, \dots, N$$

Y si su riqueza inicial es W_0 , en el periodo uno se obtendrá por tanto:

$$W_1 = \left(1 + \sum_{i=1}^N x_i R_i \right) W_0 = (1 + R_p) W_0$$

Donde, en el periodo 1, $R_p = \sum_i x_i R_i$ es el retorno del portafolio y $x_i, i = 1, \dots, N$ siendo $\sum_i x_i = 1$, corresponderá a los pesos de los activos en el portafolio.

De esta forma, el individuo en el periodo 1 obtendrá un beneficio, el cual podrá tomar para ser consumido en bienes.

Por tanto, la relación entre la riqueza y la utilidad de consumir esta riqueza se describe mediante una función utilidad $U(\cdot)$, que en general, es diferente para cada individuo (Inversor).

La hipótesis de la utilidad esperada establece que el individuo elegirá una ponderación de los activos en su portafolio, tal que el valor esperado de la utilidad se maximiza, es decir, el problema es:

$$\max_{x_1, \dots, x_N} E[U(W_1)] = E \left\{ \left(1 + \sum_{i=1}^N x_i R_i \right) W_0 \right\}$$

$$\text{sujeto a } \sum_i x_i = 1$$

$U(\cdot)$ Es llamada como función de utilidad esperada, o función de utilidad Von Neumann-Morgenstern.

Las propiedades de esta función de utilidad son:

- La función de utilidad es monótona, es decir, si $U(\cdot)$ describe las preferencias de un individuo, entonces también lo hace $U(\cdot)^* = c_1 U(\cdot) + c_2$, donde $c_1 > 0$.

Lo anterior, es un resultado puramente matemático, pero puede ser utilizado para restringir la función de utilidad a un rango razonable económicamente.

- Utilidad marginal debe ser positiva. Es decir, $U'(W) > 0$ para todo W .
- Función de utilidad cóncava.

Aversión al riesgo. Un agente es adverso al riesgo, si para cualquier nivel de riqueza W , no les gusta tomar una lotería con un pago esperado de cero, i.e., para todos W y cada variable aleatoria de media cero.

$$E[U(W+\epsilon)] < U(W)$$

Donde cada resultado aleatorio Z es denotado como $Z = E(Z) + \epsilon$, donde $\epsilon = Z - E(Z)$ es una variable aleatoria de media cero.

Por lo tanto, un agente de aversión al riesgo siempre prefiere recibir el resultado esperado de una lotería con certeza, en lugar de la propia lotería.

Usando la desigualdad de Jensen, se puede demostrar que una condición necesaria y suficiente para que exista la aversión al riesgo es que la función de utilidad sea cóncava, $U''(W) < 0$ para todos W .

En la teoría de Markowitz de media-varianza ($\mu - \sigma$) se asume que las preferencias de los inversores son descritas por una función utilidad, $V(\mu, \sigma)$.

Dónde:

$$V_{\mu} := \frac{\partial V(\mu, \sigma)}{\partial \mu} > 0$$

$$V_{\sigma} := \frac{\partial V(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} < 0$$

Lo anterior puede interpretarse como aversión al riesgo, si la varianza es una medida apropiada de riesgo.

La existencia de una función de dicha preferencia simplificaría mucho las cosas, porque, entonces, ya que el portafolio óptimo es potencialmente el que otorga el mayor rendimiento esperado para nivel de varianza dado, o la varianza más pequeña para un determinado retorno esperado (Ludwigs,1999). Por tanto, el cálculo del portafolio óptimo corresponderá al punto donde se maximice la utilidad del inversor.

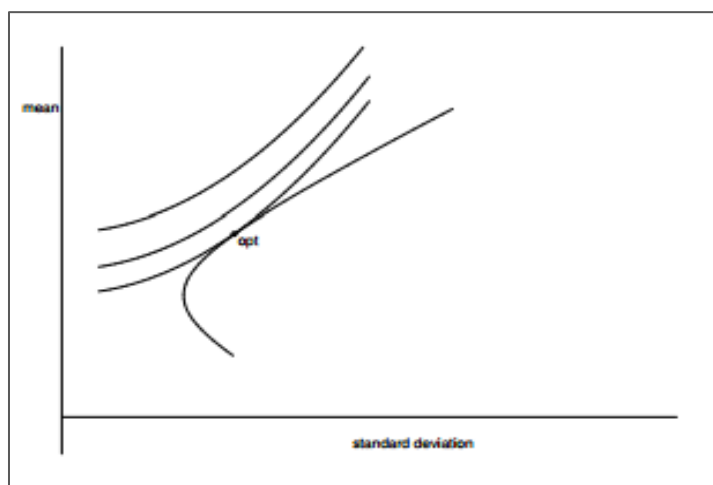


Figura 3. Curvas de Indiferencia y Portafolio Óptimo. Datos obtenidos de Engels (2004, p.54)

Si bien es cierto que los inversionistas buscan rendimientos altos y menores riesgos, no se puede precisar qué portafolio preferirá un determinado inversionista, ya que ello depende de su actitud frente al riesgo. El grado de riesgo e incertidumbre respecto de la rentabilidad de un activo financiero influye en su demanda. Dependiendo del nivel de riesgo que el inversionista está dispuesto a asumir, es posible encontrar: i) Individuos neutrales al riesgo, quienes prefieren los activos con menos riesgos y alta rentabilidad, de manera prudente; ii) individuos amantes del riesgo, quienes prefieren los activos con mayores riesgos, pero la más alta rentabilidad; e iii) individuos con aversión al riesgo, quienes prefieren cero riesgo (Ruiz y Sardi , 2013)

1.3 Valor en Riesgo (VaR)

El Valor en Riesgo (VaR), en inglés “Value at Risk”, “resume la pérdida máxima esperada (o peor pérdida) a lo largo de un horizonte de tiempo objetivo de un intervalo de confianza dado” (Jorion,P, 2003,p.33).

Su medición tiene fundamentos estadísticos y el estándar de la industria es calcular el VaR con un nivel de significancia del 5%. Esto significa que solamente el 5% de las veces, o 1 de 20 veces (es decir, una vez al mes con datos diarios, o una vez cada cinco meses con datos semanales) el retorno del portafolio caerá más de lo que señala el VaR, en relación con el retorno esperado.

Si se considera una serie de retornos históricos de un portafolio que posee un número N de activos, es factible visualizar la distribución de densidad de aquellos retornos a través del análisis del histograma. Gráficamente, el concepto estadístico VaR se ilustra en la figura 4.

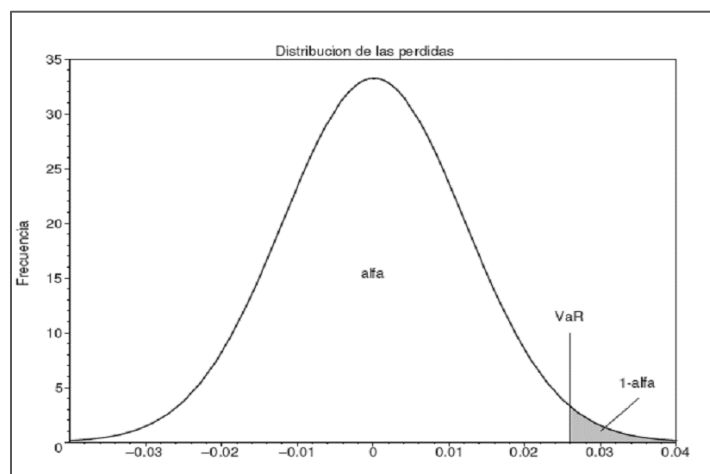


Figura 4. Representación gráfica del VaR. Datos obtenidos de Palisade (2015,p.4)

Para cuantificar el VaR de un portafolio, se define W_0 como la inversión inicial y R como su tasa de rendimiento. El valor final del horizonte objetivo es:

$$W = W_0(1 + R)$$

Definido el valor más bajo del portafolio al nivel de confianza dado c como $W^* = W_0(1 + R^*)$. El VaR se define como la pérdida en unidades monetarias, relativa a la medida.

$$VaR (Media) = E(W) - W^* = -W_0(R^* - \mu)$$

Algunas veces el VaR es definido como la pérdida absoluta en unidades monetarias:

$$VaR (Cero) = W_0 - W^* = -W_0R^*$$

En ambos casos, encontrar que el VaR es equivalente a identificar el valor mínimo para W^* , o el rendimiento crítico R^* .

Generalmente, el VaR puede derivarse de la distribución de probabilidad del valor futuro del portafolio $f(w)$. En un nivel de confianza dado c :

$$c = \int_{W^*}^{\infty} f(w)dw$$

O tal que la probabilidad de un valor inferior sea W^* , $p = P(w \leq W^*)$, sea $1-c$:

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw = P(w \leq W^*) = p$$

En otras palabras, el área de $-\infty$ a W^* debe sumar $p=1-c$. El número W^* es denominado el cuantil muestral de la distribución.

El cálculo del VaR puede simplificarse si se supone que la distribución es normal. Cuando es este caso este puede derivarse directamente de la desviación estándar del portafolio, utilizando un factor multiplicador que depende del nivel de confianza.

Se requiere por tanto traducir la distribución general $f(w)$ en una distribución normal estándar $\Phi(\epsilon)$, donde ϵ tiene como media cero y como desviación estándar la unidad. Asociado W^* con el rendimiento R^* tal que $W^* = W_0(1 + R^*)$. Generalmente R^* es negativo y puede

también escribirse como $-|R^*|$. Posteriormente, se puede asociar R^* como una desviación normal estándar $\alpha > 0$ establecido:

$$-\alpha = \frac{-|R^*| - \mu}{\sigma}$$

Que equivale a establecer

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w) dw = \int_{-\infty}^{-|R^*|} f(r) dr = \int_{-\infty}^{-\alpha} \Phi(\epsilon) d\epsilon$$

Así, el problema de encontrar un valor en riesgo es equivalente a encontrar la desviación a tal que le área a su izquierda sea igual a $1-c$. Esto se hace posible se toma las tablas de la función de distribución acumulativa normal estándar, la cual muestra el área a la izquierda de una variable normal estándar con el valor igual a d :

$$N(d) = \int_{-\infty}^d \Phi(\epsilon) d\epsilon$$

Ahora, rediseñando el procedimiento a partir de α que se acaba de encontrar el rendimiento R^* y el VaR, el rendimiento crítico es por tanto:

$$R^* = -\alpha \sigma + \mu$$

Para más generalidad se asume ahora que los parámetros μ y σ están expresados en una unidad de tiempo determinada. Sustituyendo encontrando el VaR por debajo de la media como:

$$VaR (Media) = -W_0(R^* - \mu) = W_0 \alpha \sigma \sqrt{\Delta t}$$

En otras palabras, el VaR es simplemente un múltiplo de la desviación estándar de la distribución, multiplicado por un factor de ajuste que está directamente relacionado con el nivel de confianza (Jorion, 2003)

Por tanto, el VaR es, ante todo, una estimación estadística y, como tal, requiere el establecimiento, a priori, de una serie de parámetros:

- Un intervalo o nivel de confianza asociado al cálculo.
- Un plazo, o unidad de tiempo, al cual va referido la estimación.
- Una moneda de referencia.
- Una hipótesis sobre la distribución de la variable analizada. En general, el supuesto más utilizado es el de normalidad, lo cual permite representar todas las observaciones mediante la conocida campana de Gauss y aplicar sus propiedades estadísticas.

Aunque siendo una gran medida de riesgos el VaR presenta ciertas limitaciones:

- La distribución normal o lognormal que, generalmente se usa para su estimación, infravalora el riesgo de sucesos extremos.
- El VaR ignora, por definición, aquellas pérdidas cuya probabilidad de ocurrencia sea menor que la elegida como nivel de confianza de la estimación.

Además, como lo indica Uryasev (2000), el VaR tiene características no deseables, como:

- Falta de subaditividad: donde una medida del riesgo ρ es subaditiva cuando el riesgo agregado de una cartera es menor o igual que la suma de los riesgos de los activos individuales, de otra forma, cuando considera los efectos derivados de la diversificación.
- No convexidad: El VaR es difícil de optimizar cuando se calcula a partir de escenarios.

Sólo cuando las superficies de riesgo son convexas es posible obtener una solución óptima única que minimice el riesgo.

A partir de estos planteamientos, se propone una nueva medida de Riesgo conocida como el VaR Condicional (CVaR).

1.4 Valor en Riesgo Condicional (CVaR)

El CVaR parte del concepto de Valor en Riesgo (VaR), como una medida, que satisface todas las propiedades exigidas para ser una opción coherente de riesgo, desde el punto de vista académico de la teoría de la medida.

Además, desde el punto de vista práctico y operativo, el CVaR supera los inconvenientes citados, ya que no sólo satisface la propiedad de subaditividad, sino que también es convexa y uniextremo, lo cual facilita la implementación de algoritmos de optimización y control.

Con el CVaR, se tiene por tanto una medida que determine la pérdida potencial que, en media, se espera una vez superado el umbral señalado por el VaR, es decir, pérdidas esperadas que exceden estrictamente al VaR.

En términos estadísticos, la esperanza matemática de una variable aleatoria X condicionada a un suceso B viene dada por la expresión $E[X|B]$, definiendo el CVaR como:

$$CVaR_{\alpha}(X) = E(-X | -X \geq VaR_{\alpha}(X))$$

Donde X es una variable aleatoria que representa las pérdidas y ganancias de una cartera y $VaR_{\alpha}(X)$ es el valor en riesgo definido para un nivel de confianza de $100(1-\alpha)$ (Feria y Oliver, 2006)

En la siguiente figura se ilustra los conceptos de VaR y CVaR.

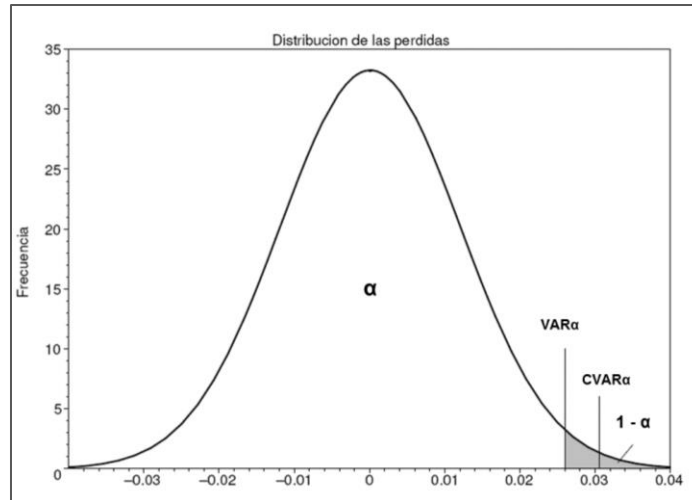


Figura 5. Representación gráfica del VaR y CVaR.
Datos obtenidos de Palisade (2015,p.4)

Por tanto, se puede deducir que CVaR es siempre una magnitud mayor o igual que VaR. En particular, cuando la distribución de los rendimientos sigue una ley normal, que es una de las distribuciones de probabilidad más útiles en el estudio del comportamiento de los activos financieros.

El CVaR bajo rendimientos con una distribución normal se describe el CVaR como:

$$CVaR_{\alpha}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} z dF_X^{\alpha}$$

Donde,

$$F_X^{\alpha}(z) = \begin{cases} 0, & \text{Donde } z < VaR(X) \\ \frac{F_X(z) - \alpha}{1 - \alpha} & \text{Donde } z > VaR(X) \end{cases}$$

Por tanto se puede deducir⁴:

$$\begin{aligned} CVaR_{\alpha} &= E[-X | -X \geq VaR_{\alpha}(X)] = \\ &= \frac{E[-X \cdot I_{\{X \leq VaR(X)\}}]}{\alpha} = \end{aligned}$$

⁴ La función de densidad de una distribución normal con media μ y desviación estándar σ está dada por:
 $f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X-\mu^2}{2\sigma^2}}$, y tiene como función de distribución acumulada $\int_{-\infty}^X f(z) dz$

$$= \frac{E[-X \cdot I_{\{X \leq VaR(X)\}}]}{\alpha} =$$

Donde $I_{\{A\}}$ es una función indicador cuyo valor es 1 cuando A se cumple y 0 en caso contrario.

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\alpha\sigma_X\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-VaR_\alpha(X)} t \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma_X^2}} \cdot dt = \\ &= -\frac{1}{\alpha\sigma_X\sqrt{2\pi}} = \left[-\sigma_X^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma_X^2}} \right]_{-\infty}^{-VaR(X)} = \\ &= \frac{\sigma_X}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{VaR_\alpha(X)^2}{2\sigma_X^2}} = \\ &= \frac{\sigma_X}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q_\alpha^2 \sigma_X^2}{2\sigma_X^2}} = \\ &= \frac{e^{-\frac{q_\alpha^2}{2}}}{\alpha\sqrt{2\pi}} \sigma_X = \end{aligned}$$

Donde q_α es el 100α percentil de la distribución normal estándar (Sarykalin, 2008)

1.5 Selección óptima de portafolios con una medida de riesgos

Un inversor utilizando las medidas de riesgo como VaR o CVar definirán su nivel máximo de pérdida a asumir en un horizonte de tiempo determinado, por tanto, a partir de este parámetro definirá cuál es su portafolio óptimo. La construcción del portafolio será sujeta a un límite de pérdida máxima esperada y definida por el inversionista.

A partir de una cantidad de riqueza W_0 para ser invertido en un horizonte t , definido un límite VaR y adicionalmente donde se puede tener la posibilidad de pedir prestado o prestar una

cantidad B a una tasa R_f , de tal manera que tendrá un capital disponible para ser invertido en N activos en una proporción $y(i)$ en cada activo (Donde $\sum_{i=1}^N y(i) = 1$) y a su respectivo precio en el momento 0, $P(i, 0)$. De tal manera que la restricción del problema estará definido por la restricción del problema estará dado por:

$$W_0 + B = \sum_{i=1}^n y(i)P(i, 0)$$

Donde el inversionista debe elegir las fracciones que debe invertir en cada activo del total de la riqueza disponible de forma que logre el maximizar su riqueza total.

Su elección será sujeta adicionalmente al nivel del riesgo (VaR o CVaR) definido, expresado como:

$$\Pr(W_0 - W(T, p) \geq VaR^*) \leq (1 - \alpha)$$

Donde \Pr indicara la probabilidad esperada condicionada a la información disponible en el momento 0, para el portafolio p . De la anterior ecuación podemos tener:

$$\Pr(W(T, p) \leq W_0 - VaR^*) \leq (1 - \alpha)$$

Donde VaR es la peor pérdida, que puede esperarse con un nivel de confianza de c , el cual refleja la aversión al riesgo asociada al inversor. Por tanto, la cartera óptima que se derive debe cumplir también con la restricción descrita anteriormente.

La introducción de VaR nos proporciona una restricción que encaja en el marco de Arzac y Bawa (1977), que demuestran para el caso de distribuciones gaussianas de rendimientos, que una cartera optima empleado VaR como medida de riesgo es idéntica a la optimizada utilizando volatilidad. En este caso el VaR es solo un múltiplo de la desviación típica más una derivada. Esto se infiere de minimizar σ que es equivalente a minimizar VaR.

Por lo tanto, a partir de sus resultados se deriva un modelo de selección óptima de portafolio en donde el inversor está interesado en la maximización de la riqueza en el final del horizonte de inversión:

$$(W(T, p)) = (W_0 + B)(1 + R_p) - B(1 + R_f)$$

Donde R_p , es el rendimiento total esperado de un portafolio p en el periodo T ; asumiendo que los activos i se incluye en una fracción $y(i)$, en el portafolio p .

Sustituyendo B y la restricción de riesgo definida, el rendimiento esperado final sobre la riqueza se maximiza, teniendo como resultado el portafolio p' :

$$p': \max_p = \frac{R_p - R_f}{W_0 R_f - W_0 q(c, p)}$$

Donde, donde $q(c, p)$ define el cuantil que corresponde a la probabilidad $(1-c)$ de ocurrencia, que puede ser leído de la *cdf* de la distribución de rendimiento esperado.

En esta ecuación se observa que W_0 correspondiente a la riqueza inicial está en el denominador, pero no afecta la elección del portafolio óptima ya que sólo es constante escalar en la maximización. El proceso de asignación de activos es por lo tanto independiente de la riqueza. La ventaja de tener sin embargo riqueza inicial en el denominador se encuentra en su interpretación. Así podemos rescribir la ecuación como:

$$\varphi(c, p) = W(0)rf - VaR(c, p)$$

$$p' := \frac{r(p) - rf}{\varphi(c, p)}$$

Al respecto Campbell et al, (2001), argumenta:

Este resultado es una medida de rendimiento, como el índice de Sharpe que se puede utilizar para evaluar la eficacia de los portafolios. De hecho, bajo el

supuesto que los rendimientos del portafolio siguen una distribución normal, y la tasa libre de riesgo es cero, se puede derivar a un múltiplo del índice de Sharpe. En este caso, el valor en riesgo se expresa como un múltiplo de la desviación estándar de los rendimientos esperados de modo que el punto en el que se maximizan los dos índices de rendimiento dará lugar a la misma cartera óptima de ser elegido (p.29).

1.6 Método de simulaciones Monte Carlo

El concepto básico del Método de Monte de Carlo es simular repetidamente un proceso aleatorio para la variable financiera de interés, cubriendo un amplio rango de situaciones posibles. Por lo tanto, las simulaciones recrean la distribución completa de los valores del portafolio (Jorion, 2003)

A partir de suponer que el subyacente de un activo es:

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dZ$$

Se puede simular un camino hacia adelante en el tiempo, a partir de algún precio actual S^0 , Usando el método de estimación en el tiempo de Euler ($S^i = S(t_i)$)

$$S^{i+1} = S^i + S^i(r\Delta t + \sigma\phi^i\sqrt{\Delta t})$$

Donde Δt es el cambio en el tiempo finito, y ϕ^i es un número aleatorio que es $N(0,1)$. Y donde cada cambio en el tiempo, genera un nuevo número aleatorio. De esta manera, después N pasos (Cambios en el tiempo), con $T = N\Delta t$, se tiene la realización de una caminata (Forsyth, 2015)

El método de simulaciones de Monte Carlo consiste por tanto en la generación de múltiples realizaciones para los precios de un activo con un horizonte predefinido.

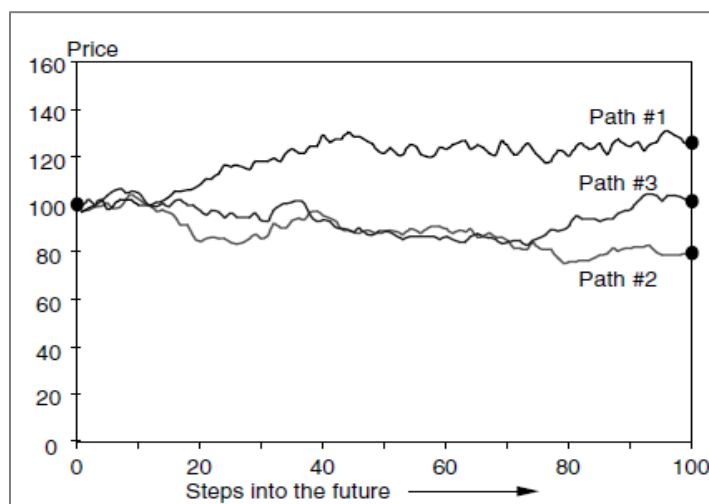


Figura 6. **Simulación Monte Carlo.** Datos obtenidos de Jorion (2007,p.3)

Una vez simuladas las diversas trayectorias (usualmente este número es grande, i.e., 5.000 o 10.000 realizaciones), se obtienen los valores del retorno para el horizonte de inversión o análisis preestablecido.

Uno de los principales elementos en la simulación, consisten en la elección de un modelo estocástico particular para el comportamiento de los precios. Como lo es el modelo Browniano Geométrico el cual está implícito en la teoría e valuación de opciones. Este modelo asume que las innovaciones o movimientos en el tiempo no están correlacionados en el mismo (Jorion, 2003)

1.7 Modelo Browniano Geométrico

En 1900, L. Bachelier introdujo un modelo del movimiento Browniano (observado en la naturaleza por Brown en 1826) para modelar las fluctuaciones de la bolsa parisina.

Suponiendo que el precio de las acciones es una expresión lineal del movimiento Browniano con deriva, llegó a asignar precio a algunas opciones cotizadas en Francia en aquella época y estableció comparaciones con el mercado real.

El trabajo de Bachelier aparte de los resultados financieros, desarrollo un importante estudio matemático del movimiento Browniano. En 1944, Itô se inspiró en este trabajo para introducir su cálculo estocástico y el movimiento Browniano geométrico:

$$S_t = S_0 \exp[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t]$$

Este movimiento Browniano geométrico se tornó importante para modelizar los mercados financieros, asignando S_t como el precio de la acción.

Samuelson desarrollo, desde 1965, el estudio del movimiento Browniano geométrico en conexión con la economía trabajo que le otorgo en 1970 el premio Nobel de Economía. En 1973, F. Black y M. Scholes, e independientemente, R. Merton utilizaron el movimiento Browniano geométrico para valuación de opciones.

Como se mencionó en la sección anterior, el modelo Browniano Geométrico asume que los movimientos en el tiempo no están correlacionados en éste y que los movimientos pequeños en los precios pueden describirse por:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dz$$

Donde dz es una variable aleatoria distribuida normalmente con media cero y varianza dt . Esta variable conduce los choques aleatorios al precio y no depende de información pasada.

“Es “Browniana” en el sentido de que su varianza decrece continuamente con el intervalo de tiempo, por ejemplo, $V(dz) = dt$. (...). El proceso es “geométrico” porque todos los parámetros son escalonados por el precio actual S_t ” (Jorion, 2003, p.257)

Los parámetros μ_t y σ_t representan la tendencia instantánea y la volatilidad en el momento t , los cuales pueden evolucionar en el tiempo.

En la práctica, el proceso con un incremento infinitesimalmente pequeño d_t es aproximado por movimientos de tamaño discretos Δt . Definido t como el momento presente, T como el momento objetivo y $\tau = T - 1$ como el horizonte, o tiempo al vencimiento. Para generar una serie de variables aleatorias S_{t+i} en el intervalo τ , primero se segmenta en n incrementos, con $\Delta t = \tau/n$.

Integrado dS/S sobre un intervalo infinito, tenemos aproximadamente:

$$\Delta S_t = S_{T-1}(\mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t})$$

Donde ϵ es ahora una variable aleatoria normal estándar; esto es, con media cero y varianza igual a uno.

Para simular la trayectoria de precios para S , se inicia con S_t y se genera una secuencia de (ϵ) para $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces S_{t+1} se establece como:

$$S_{t+1} = S_t + S_t(\mu\Delta t + \sigma\epsilon_1\sqrt{\Delta t}), S_{t+2}$$

Se calcula de la misma manera a partir de $S_{t+1} = S_t + S_t(\mu\Delta t + \sigma\epsilon_2\sqrt{\Delta t})$

Y así sucesivamente para todos los valores futuros hasta el periodo que se desea, en el cual el precio es $S_{t+n} = S_T$. (Jorion, 2003, p.255)

2. Desarrollo Metodológico

2.1 Datos de estudio

El trabajo de investigación planteado comienza, en primer lugar, con la selección y definición de la cartera de activos financieros sobre la cual se aplicarán los conceptos expuestos anteriormente.

En tal sentido, se ha optado por analizar los resultados en distintos mercados para lo cual se ha tomado una muestra de varios portafolios en los principales mercados financieros y particularmente en Colombia, cada uno con tres títulos; en este caso no solo se identifican carteras en la propia hipérbola, sino dentro también. Por otra parte, se requiere definir para cada mercado un activo libre de riesgo, para lo cual se ha tomado para cada uno títulos de deuda pública a un plazo de 12 meses.

Para la selección de los activos se toma como base el concepto de que un inversionista racional procura minimizar el riesgo, independientemente del rendimiento esperado, para lo cual diversificará su inversión construyendo un portafolio con una participación de todos los títulos. Con lo anterior se seleccionaron activos de sectores económicos diferentes, tales como: energético, financiero, tecnológico, bienes de capital, suministros y de consumo. Adicionalmente se tuvo en cuenta que los activos fueran parte del índice bursátil más representativo de cada mercado, ya que al ser parte de estos índices representan la evolución del mercado o de un segmento del mismo.

Por otra parte, es preciso definir el horizonte de tiempo de la muestra de datos tomados para estimar los parámetros de rentabilidad y volatilidad. Estos corresponden a precios diarios que transcurren desde 01/01/2011 hasta el 31/12/2015, periodo en el cual se considera no presentar ya distorsiones en los precios, efecto derivado de la crisis financiera del año 2008.

En un mercado tan globalizado como el actual, las crisis financieras impactan, en mayor o menor medida, a todos los mercados financieros. Este es el caso de la última crisis generada en el 2008 que se originó en Estados Unidos, a raíz de la burbuja inmobiliaria y del impago de las hipotecas como consecuencia de la gran liquidez existente del mercado que permitió un enorme desarrollo de los mercados de valores, por lo que se generaron nuevos instrumentos financieros que facilitan la diseminación de los riesgos, pero probablemente descuidan la evaluación de los mismos en origen.

Estos elementos generaron la mayor crisis financiera del siglo XXI y la más fuerte para Estados Unidos desde 1929, lo que generó un coletazo financiero que se vio en casi todo el mundo por la crisis de la moneda representativa del mercado.

En 2007 comienza en los activos hipotecarios de baja calidad en Estados Unidos (hipotecas 'subprime'), la desconfianza, la cual se extiende a los mercados de instrumentos de titulización soportados por activos en todo el mundo, por lo que se expande a los mercados interbancarios y de crédito y finalmente, llega a los mercados de bonos tradicionales y a las Bolsas.

La crisis financiera internacional entre el 2007 y 2009 causó grandes desvalorizaciones en el mercado bursátil. Entre enero de 2008 y marzo de 2009 se registraron pérdidas de valor hasta del 50% en el Dow Jones (en su peor momento) y de 51% en el Nasdaq. Estas pérdidas no se limitaron a Estados Unidos, sino que también en Europa se registraron pérdidas de hasta 45% en

el FTSE 100 INDEX (Financial Times Stock Exchange) y en el mundo emergente, uno de los casos más dramáticos fue el de la bolsa de Shanghai, con disminuciones de hasta 48%. En América Latina se observaron caídas anuales hasta de 53%o en el Bovespa de Brasil, de 41% en el Mexbol IPC index de México y 39% en el IGBC de Colombia.

Este deterioro del mercado bursátil se profundizó en la segunda mitad de 2008, luego del estallido de la crisis financiera internacional, donde, los inversores enfrentados al aumento de la incertidumbre desarman posiciones en los mercados emergentes y buscan refugio en plazas consideradas más seguras, típicamente en los Estados Unidos.

Por lo anterior, se pretende tomar precios que no estén compuestos por factores provenientes de la crisis financiera y que permitan desviar los resultados y objetivo de análisis de este trabajo.

En la tabla 1 se resumen los activos financieros seleccionados, mientras que el anexo C de este documento se encuentra un mayor detalle de cada activo, como una breve descripción y evolución histórica de sus precios.

Tabla 1. Rentabilidad y Volatilidad de los Activos Financieros de Estudio

Pais	Bolsa	Índice	Acción	Retonor Diario Promedio	Volatilidad
Colombia	Colombia	COLCAP	Bancolombia	0,00001%	0,2943%
Colombia	Colombia	COLCAP	Ecopetrol SA	0,00004%	0,2267%
Colombia	Colombia	COLCAP	Cementos Argos Pf	0,00018%	0,3475%
Colombia	Colombia		Bono 12 Meses	0,01367%	0,0000%
Estados Unidos	New York	DOW	Chevron Corporation	0,00146%	0,1568%
Estados Unidos	New York	DOW	Pfizer Inc	-0,04038%	0,1136%
Estados Unidos	New York	DOW	Coca-Cola Company	-0,01849%	0,0770%
Estados Unidos	New York		Bono 12 Meses	0,00048%	0,0000%
España	Madrid	IBEX	Red Eléctrica Corporación S.A.	-0,05090%	0,1839%
España	Madrid	IBEX	Ferrovial S.A.	-0,06451%	0,1879%
España	Madrid	IBEX	Gas Natural SDG S.A.	-0,03489%	0,2158%
España	Madrid		Bono 12 Meses	0,00410%	0,0000%
Alemania	Fráncfort	DAX	Bay,Motoren Werke AG ST (BMWG)	-0,03333%	0,3156%
Alemania	Fráncfort	DAX	Bayer AG NA (BAYGn)	-0,05377%	0,2697%
Alemania	Fráncfort	DAX	SAP AG O,N, (SAPG)	-0,04697%	0,1713%
Alemania	Fráncfort		Bono 12 Meses	0,00038%	0,0000%
Japón	Tokio	NIKKEI	Panasonic Corp.	-0,04287%	0,4786%
Japón	Tokio	NIKKEI	Aozora Bank, Ltd.	-0,07372%	0,2601%
Japón	Tokio	NIKKEI	Osaka Gas Co., Ltd.	-0,02903%	0,1592%
Japón	Tokio		Bono 12 Meses	0,00019%	0,0000%

Nota: Datos obtenidos de Investing (2016,p.2)

2.2 Método

Para cumplir con el objetivo general del estudio se realizaron las tareas que se describirán a continuación, las cuales se desarrollan de forma secuencial y se han parametrizado a través de Matlab de forma estándar para ser aplicado a los distintos portafolios seleccionados.

Recopilación de datos. Se tomaron los precios diarios de los activos financieros seleccionados de acuerdo al horizonte de tiempo definido. Para los días faltantes se completa con el último precio de cotización inmediatamente anterior.

Rentabilidades Diarias. Se procede a realizar el cálculo de rentabilidad de los activos, para lo cual se hace la transformación de las series históricas de los precios diarios en rentabilidades logarítmicas, de la siguiente forma:

$$R_{ln} = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Posteriormente procedemos a obtener la rentabilidad promedio de cada activo k (Activos riesgoso y activo libre de riesgo),

$$\overline{R}_k = \sum_{t=1}^N \frac{R_t}{n}$$

De esta manera se obtiene el vector con los rendimientos promedio $\overline{R}_{k_{1 \times m}}$, donde m representa el número de activos riesgosos que se han elegido para hacer parte del conjunto de posibilidades de inversión dentro de la estructuración de los diferentes portafolios.

Volatilidad. Se realiza la estimación de la matriz de varianzas - covarianzas, para lo cual contiene las covarianzas de los m activos considerados, la cual tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \dots & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \dots & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Donde la diagonal representa la varianza de cada activo y los demás elementos las covarianzas de los activos financieros.

El riesgo de un activo financiero es medido como la desviación típica (se le define como volatilidad) se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \mu)^2}{n - 1}}$$

Donde, σ es la desviación estándar, R_i es el rendimiento del activo i y μ es la media del activo i .

La varianza, que se define como el valor promedio de los cuadrados de las desviaciones de cada observación con respecto a la media μ , se puede expresar mediante:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

Donde, σ^2 es la varianza de la población, x_i es el valor de la observación i enésima, μ es la medida de la población, N es el número total de observaciones en la población.

La covarianza, una medida de relación lineal entre los diferentes activos que describe la tendencia o movimiento conjunto de estos. Dichas variables pueden ser los rendimientos de un portafolio. Si la covarianza es positiva significa que cuando uno de los activos sube el otro también lo hace; si por el contrario la covarianza es negativa, implica que cuando aumenta el activo A el activo B disminuye y viceversa. Si además la covarianza es cercana a cero significa que los dos activos son independientes. La covarianza se define por tanto como:

$$COV(R_i, R_j) = \sum_{j=1} p_i [R_i - E(R_i)][R_j - E(R_j)]$$

En donde, R_i es la rentabilidad del activo financiero A, R_j es la rentabilidad del activo financiero B, p_i es la probabilidad de ocurrencia $E(R_i)$ el rendimiento promedio del activo A, $E(R_j)$ el rendimiento promedio del activo B.

Frontera Eficiente. A partir de los parámetros ya estimados se procede a estimar el planteamiento propuesto por Markowitz, de tal manera que se obtendrá el conjunto de portafolios eficientes, el cual se calcula a partir de la solución paramétrica la cual se encuentra

definida en el anexo B de este documento, solución que se genera de las primeras derivadas del proceso de optimización.

Así, a partir de esta solución se obtienen los puntos de la frontera eficiente, los cuales representan las diferentes combinaciones de portafolios eficientes (en la parte superior) o ineficientes (parte inferior); donde se obtiene bien la mejor rentabilidad a un riesgo dado, o bien el menor riesgo a una rentabilidad dada.

CML e Índice Sharpe. El Índice de Sharpe se obtiene al dividir la rentabilidad esperada menos la tasa libre de riesgo por la desviación estándar o riesgo de la rentabilidad esperada (Como se ha indicado previamente). Solución que también se ha obtenido de la solución descrita en el anexo B.

Ahora, utilizando el índice de Sharpe, se estima la CML la cual corresponde a una recta trazada desde la rentabilidad del activo libre de riesgo, esta se obtendrá por tanto como:

$$R_p = R_f + Sharpe \cdot \sigma_p$$

Portafolio de mínima varianza, mercado y óptimo. A partir de las estimaciones anteriores y siguiendo la solución paramétrica se estimará el portafolio de mínima varianza, de mercado y el óptimo.

Donde el primero representa la combinación de activos con menor riesgo para el inversor.

Con base en la curva de la frontera eficiente y la línea del mercado de capitales se obtiene el portafolio de mercado, que es el punto de tangencia entre la CML y la frontera eficiente, llamada así ya que todos los inversores racionales deben mantener sus activos de riesgo en esa proporción.

El portafolio óptimo representará el portafolio asociado con sus preferencias, si bien es cierto que los inversionistas buscan rendimientos altos y menores riesgos, este depende de su

actitud frente al riesgo. De acuerdo con la solución paramétrica presentada del problema para obtener este punto se requiere definir el nivel de aversión al riesgo del individuo, el cual se ha establecido en 40, teniendo presente el trabajo de Janecek (2004) quien determina que este el nivel de aversión de riesgo para inversionistas sofisticados que actúan en los mercados financieros

Curva de Indiferencia. Se asume que los inversionistas poseen una función de utilidad CRRA (función potencia), la cual representa el comportamiento de los individuos, concepto que puede ser debatible en la realidad, en cualquier caso, muchos autores sostienen la hipótesis que la CRRA refleja el comportamiento de los inversionistas y es ampliamente aceptada.

Función de utilidad que se toma para el desarrollo de este trabajo de acuerdo con el desarrollo presentado en el anexo A.

Normalidad de los rendimientos. Para comprobar la normalidad de los rendimientos de los activos se usó para cada serie de datos la prueba de Kolmogorov-Smirnov, la cual se aplica para contrastar la hipótesis de normalidad, el estadístico de prueba es la máxima diferencia:

$$D = \text{máx}|F_n(x) - F_0(x)|$$

Siendo $F_n(x)$ la función de distribución muestral y $F_0(x)$ la función teórica o correspondiente a la población normal especificada en la hipótesis nula.

La distribución del estadístico de Kolmogorov-Smirnov es independiente de la distribución poblacional especificada en la hipótesis nula y los valores críticos de este estadístico están tabulados. Si la distribución postulada es la normal y se estiman sus parámetros, los valores críticos se obtienen aplicando la corrección de significación propuesta por Lilliefors.

La hipótesis nula para este caso será: los datos que provienen de una distribución normal, mientras la hipótesis alternativa indica que los datos no provienen de una distribución normal.

Aunque se utilizaron datos diarios estos pueden no comportarse bajo una distribución normal, ya que en general estas series son asimétricas y leptocúrticas, pero si se alarga la periodicidad de la serie esta tenderá a ser normal, resultados que son coherentes con el teorema de central del límite. (Martínez y Arnillas , 1992)

Parámetros de Estimación VaR y CVaR. El VaR y CVaR son estimaciones estadísticas por tanto se debe definir previamente una serie de parámetros para su estimación:

- La unidad de tiempo a la cual se refieren los cálculos es diarios.
- El intervalo de confianza asociado al cálculo se ha establecido en el 95% y el 99%.
- El monto de la posición asumida corresponde a USD 10.000.
- La moneda de referencia será el Dólar Americano.

Estimación VaR paramétrico. Para el cálculo de los VaR individuales, se parte de la expresión genérica:

$$VaR(t) = -Z_{\alpha}W_0\sigma_p\sqrt{t} \quad (\text{diario})$$

Donde los parámetros estarán dados en diarios; Z_{α} depende del nivel de confianza seleccionado, para un 95% de confianza este equivale a -1,6449 y para un 99% es igual a -2.3263.

De la estimación anterior para cada uno de los activos riesgosos se puede calcular el VaR bruto, que corresponde a la sumatoria de todos los VaR individuales, lo que corresponde a una magnitud que ignora los beneficios de la diversificación en cuanto a la reducción del riesgo (Domínguez & Oliver, 2006)

El VaR de un portafolio corresponde a la relación entre los VaR individuales y la correlación que existe entre los activos. Para lo cual se requiere estimar la matriz de correlación de los activos, matriz que es cuadrada y simétrica:

$$\bar{\rho} = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{12,t} & \rho_{1n,t} \\ \rho_{21,t} & 1 & \rho_{2n,t} \\ \rho_{n1,t} & \rho_{n2,t} & 1 \end{vmatrix}$$

Tomando la matriz anterior y los VaR individuales se puede estimar VaR diversificado como:

$$VaR_p = \sqrt{VaR' \cdot \bar{\rho} \cdot VaR}$$

Los VaR individuales, bruto y diversificado o correlacionado se estiman para los portafolios mencionados anteriormente.

Estimación CVaR paramétrico. Para la estimación de los CVaR's, se debe tener en cuenta que bajo hipótesis de normalidad, ambas medidas del riesgo son equivalentes y coherentes en términos de subaditividad, es decir que cuando la distribución del retorno del portafolio es normal, el VaR y el CVaR son múltiplos escalares de la desviación estándar (Domínguez & Oliver, 2006). Por tanto, para estimar los CVaR se debe aplicar la fórmula:

$$CVaR_{\alpha}(X) = \frac{e^{-\frac{q_{\alpha}^2}{2}}}{\alpha \sqrt{2\pi}} \cdot \sigma_X$$

De esta forma, el podemos calcular el CVaR para un 95% y 99% de confianza respectivamente. Por tanto, el proceso es el mismo implementado en la estimación del VaR con el ajuste indicado.

Índice Sharpe ajustado, estimación de CML y frontera eficiente con VaR y CVaR. A partir de los resultados obtenidos de las estimaciones de VaR y CVaR junto con la medida riesgo descrita en la sección 1.5; ésta medida se interpreta al igual que el índice de Sharpe.

Es este sentido, de lo descrito anteriormente se procede a estimar la rentabilidad de los portafolios incorporando las medidas de riesgo ya indicadas, para de esta forma poder evaluar si

efectivamente el incorporar una medida de riesgo en la asignación de portafolios mejora los resultados esperados y por tanto así podrá determinar si es más eficiente o no.

Partiendo de índice descrito en la sección 1.5, se despeja la rentabilidad del portafolio, obteniendo:

$$r(p) = rf + (Sharpe_{Ajustado} * \varphi(c, p))$$

$$\varphi(c, p) = rf - VaR(c, p)$$

De acuerdo con lo anterior se efectúa la estimación de una nueva Capital Market Line (CML) incluyendo una medida de riesgo, para ello se fijará el mismo índice de Sharpe y nivel de riesgo (Volatilidad) con el fin de establecer si efectivamente se alcanza una mejor rentabilidad al incluir las medidas de VaR y CVaR. Procedimiento que igualmente se realiza por cada punto de la frontera eficiente con el objetivo de estimar la nueva frontera incorporando las medidas de riesgo ya mencionadas.

Este ejercicio se replica para un nivel de confianza del 95% como del 99%.

Contraste de resultados. Para analizar el comportamiento de las medidas de Riesgo VaR y CVaR se estima los resultados como proporción de la posición inicial (Valor Invertido). Esto permitirá comparar la estabilidad de la composición de la cartera óptima en función al nivel de confianza.

Adicionalmente se comparará la CML y la frontera eficiente, incluyendo las medidas de riesgo (VaR, CVaR) contra los resultados sin incluir dichas métricas.

Con esto se espera concluir la eficiencia de las medidas de riesgo en la asignación de portafolios.

Estimación VaR con el Método de Monte Carlo. Una estimación adicional propuesta es obtener el VaR a partir de la distribución de probabilidad observada, aproximando la distribución a través de una curva normal.

Para esto se requiere simular la trayectoria de los precios con el objetivo de construir la distribución del portafolio al final del horizonte de tiempo seleccionado. Esta simulación se lleva a cabo siguiendo los siguientes pasos: i) Seleccionar un proceso estocástico y paramétrico, que en este caso en particular se refiere a un movimiento Browniano Geométrico; ii) Generar una secuencia en la cual se obtiene los precios $S_{t+1}, S_{t+2}, \dots, S_{t+n}$, para lo cual se utilizará el método de Monte Carlo; iii) Calcular el valor del activo $S_{t+n} = F_t$ bajo esta secuencia particular de precios en el horizonte de tiempo objetivo, que en este trabajo se ha considerado un horizonte de tiempo de 2 años compuesto por periodos de 100 para el proceso de simulación; iv) estimar los rendimientos logarítmicos a partir de precio F_t frente a S_t ; v) Se repite este proceso varias veces, particularmente se replicará 150 veces, así se espera obtener una distribución de los rendimientos de los precios F_T^1, \dots, F_T^{150} ; vi) Elaborar el histograma de los rendimientos estimados, en donde si el proceso subyacente es normal, la distribución empírica debe converger a una distribución normal; vii) finalmente definido el cuantil muestral (Nivel de confianza) se procede a hacer la sumatoria del área desde la izquierda hasta cuantil definido, punto que definirá el VaR del activo o portafolio.

De esta forma el VaR estimado para el cuantil muestra debe converger en el valor $\alpha\sigma$.

3. Resultados

En este aparte se realizarán los cálculos matemáticos y estadísticos descritos en la sección anterior con el objetivo de identificar el comportamiento del nivel de riesgo y los rendimientos generados por las acciones y los portafolios eficientes.

Curva de Indiferencia. Para cada uno de los entornos seleccionados y tomando de las estimaciones de los portafolios eficientes, se procede a realizar la evaluación de la curva de indiferencia correspondiente a cada inversionista de cada país, considerando que cada uno está haciendo uso de la teoría del riesgo, y donde se asume que sus preferencias están representadas por la función de utilidad CRRA. Este resultado es el representado en la figura 7, que para todos los países es similar

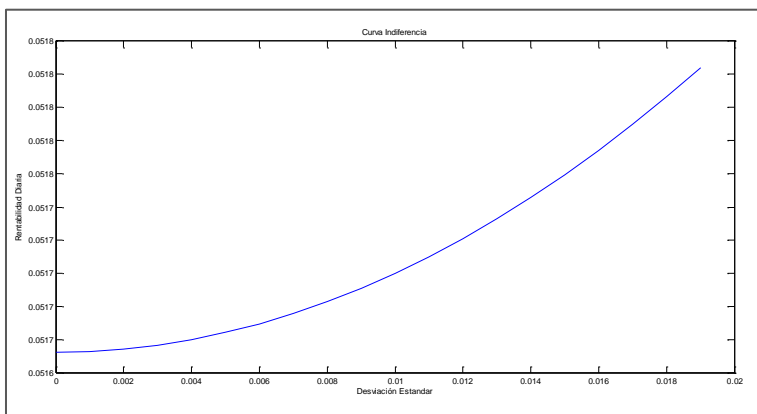


Figura 7. Curva Indiferencia estimada con una función de Utilidad CRRA. Elaborada por el Autor

Por tanto, podemos decir que todo inversionista que se analice será adverso al riesgo, ya que de lo contrario si no tuviera en cuenta esta idea, simplemente invirtiera en el portafolio de inversión con mayor rentabilidad sin contemplar el riesgo que conlleva al comprar estos activos.

Analizando detalladamente la figura, se observa que la curva refleja que el inversionista es indiferente ante aumentar su utilidad o disminuir su nivel de riesgo, con lo cual se puede decir que las curvas de indiferencia son cóncavas ya que el riesgo y los rendimientos son directamente proporcionales, así que, al realizar un desplazamiento al lado derecho, se obtendrá, mayor rendimiento, desplazando la curva hacia arriba.

Frontera Eficiente. Las siguientes figuras representan los resultados de la estimación de la frontera eficiente que ha proporcionado el modelo de Markowitz.

En las figuras de la línea roja, se representa la frontera eficiente, la cual está construida a partir de la conjugación de la rentabilidad y el riesgo de todos los portafolios eficientes de inversión, Sobre esta parábola se encuentra el portafolio con mínimo riesgo.

La línea azul por su parte representa la línea de mercado de capitales. Donde el punto de tangencia entre esta recta y la frontera eficiente representan la decisión razonable que deseará mantener un inversionista, punto denominado portafolio de mercado. Adicionalmente se ubica en la figura el portafolio optimo estimado, es cual es seleccionado por el inversionista a partir de sus preferencias y aversión al riesgo.

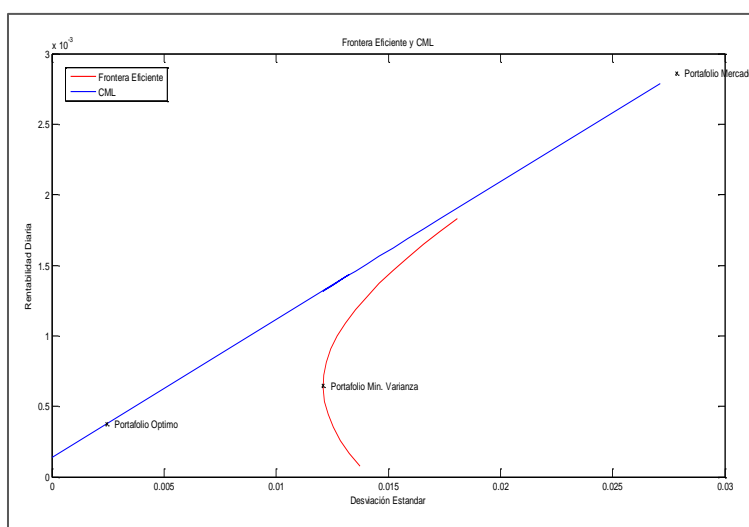


Figura 8. Frontera Eficiente – Colombia. Elaborada por el Autor

En el caso de Colombia, si se trata de un inversionista con aversión al riesgo se ubicará por debajo del portafolio de mercado, sobre la recta de CML ya que obtendrá un nivel de rentabilidad con menor riesgo, que si se posicionara en la frontera eficiente, siendo así debe invertir parte de su presupuesto en el portafolio óptimo y parte en el activo libre de riesgo. Pero si se trata de un inversionista propenso a asumir riesgo el punto ideal será por encima del portafolio de mercado, obteniendo mayor rentabilidad que en la frontera eficiente para un mismo nivel de riesgo dado, para ello invertirá todo su presupuesto en el portafolio de mercado y se endeudará para llegar a un punto por encima de la frontera eficiente.

En cuanto a los resultados obtenidos en otros mercados como lo son: Estados Unidos, España, Alemania y Japón, estos resultan ser distintos al caso anterior.

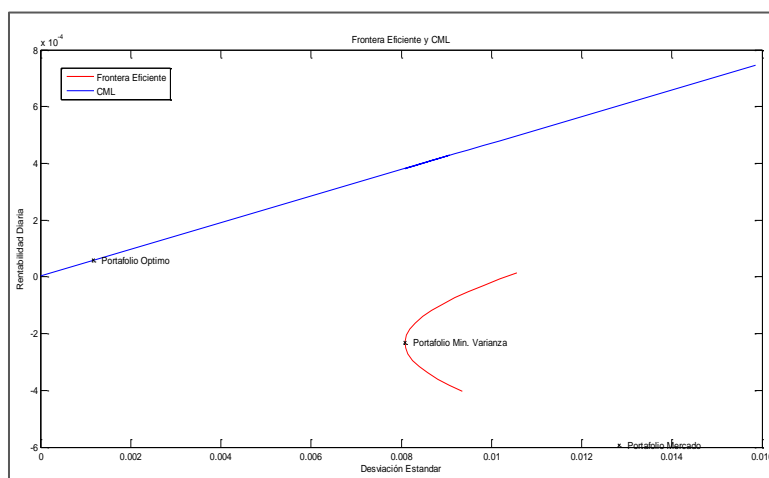


Figura 9. Frontera Eficiente – Estados Unidos. Elaborada por el Autor

En estos casos un inversionista tanto con aversión tanto como uno propenso a asumir riesgos se ubicará en la parte superior del portafolio de mercado ya que obtendrá un mejor resultado si invierte su presupuesto en el portafolio óptimo y parte en el activo libre de riesgo.

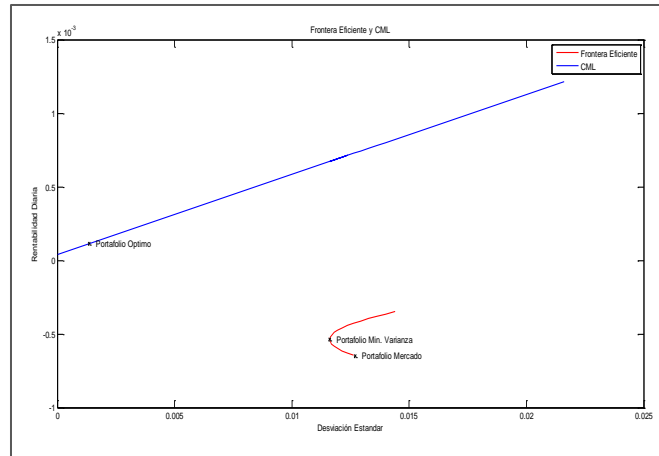


Figura 10. Frontera Eficiente – España.
Elaborada por el Autor

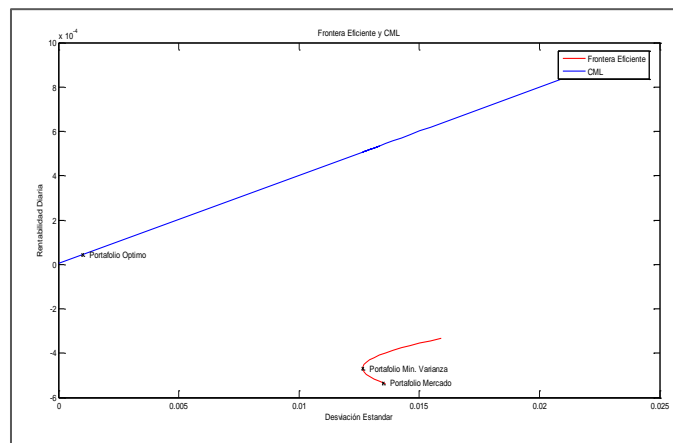


Figura 11. Frontera Eficiente – Alemania.
Elaborada por el Autor

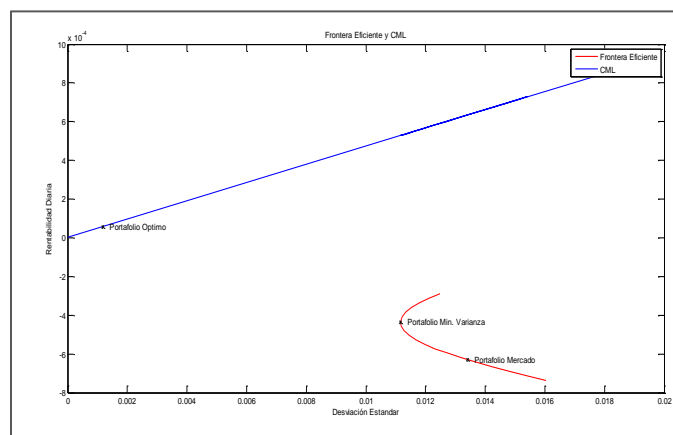


Figura 12. Frontera Eficiente – Japón. Elaborada por el Autor

Portafolio de mercado. La tabla 2 muestra el portafolio de mercado obtenido de la estimación del modelo de asignación de Markowitz, este portafolio corresponde al punto de tangencia de la frontera eficiente y la Capital Market Line (CML), que ofrece la mayor prima por riesgo esperadas por unidad.

Tabla 2. Resultados Portafolios de Mercado

Porafotio de Mercado						
	Rentabilidad	Volatilidad	Activo 1	Activo 2	Activo 3	Sharpe
Colombia	0,29%	2,79%	-64,11%	6,77%	157,35%	0,098
Estados Unidos	-0,06%	1,28%	-70,50%	122,55%	47,96%	0,047
España	-0,06%	1,27%	48,40%	75,10%	-23,50%	0,054
Alemania	-0,05%	1,35%	-23,20%	47,58%	75,62%	0,040
Japon	-0,06%	1,34%	8,17%	73,48%	18,35%	0,047

Nota: Elaborada por el Autor

En equilibrio todos los inversionistas con aversión al riesgo elegirán esta alternativa, la cual les brinda una combinación optima entre inversiones libres de riesgo y una cartera formada con activos de riesgo.

En la tabla 2, también se relaciona el índice de sharpe que como se ha mencionado, mide el exceso de rentabilidad sobre la tasa de interés libre de riesgo obtenido por el portafolio en relación a la unidad de volatilidad o riesgo propio del portafolio.

Portafolio mínima varianza. La tabla 3 por su parte muestra del portafolio que entrega el mayor retorno al menor riesgo posible o denominado portafolio de mínima varianza.

Tabla 3. Resultados Portafolios de Mínima Varianza

Porafotio Minima Varianza					
	Rentabilidad	Volatilidad	Activo 1	Activo 2	Activo 3
Colombia	0,06%	1,21%	27,54%	47,48%	24,98%
Estados Unidos	-0,02%	0,81%	7,86%	28,91%	63,23%
España	-0,05%	1,16%	39,98%	41,63%	18,39%
Alemania	-0,05%	1,26%	10,19%	17,62%	72,19%
Japon	-0,04%	1,12%	8,70%	29,92%	61,38%

Nota: Elaborada por el Autor

Portafolio Óptimo. La tabla 4 corresponde a la composición de los portafolios óptimos, alternativa que significa que habiendo un conjunto de oportunidades de inversión y un mapa de indiferencia (preferencias de los inversionistas) el individuo elegirá aquel portafolio que surja de la intersección de las curvas de indiferencia y las alternativas de inversión.

Esto indica que la utilidad esperada esta en relación directa con el rendimiento esperado del portafolio, y en relación inversa con el riesgo.

Tabla 4. Resultados Portafolios Óptimos

	Porafotio Optimo					
	Rentabilidad	Volatilidad	Activo 1	Activo 2	Activo 3	Bonos
Colombia	0,038%	0,24%	-5,62%	0,59%	13,79%	91,23%
Estados Unidos	0,006%	0,12%	6,41%	-11,14%	-4,36%	109,09%
España	0,011%	0,14%	-5,18%	-8,04%	2,52%	110,71%
Alemania	0,004%	0,10%	1,71%	-3,51%	-5,57%	107,37%
Japon	0,006%	0,12%	-0,72%	-6,46%	-1,61%	108,79%

Nota: Elaborada por el Autor

VaR y CVaR. Las tablas 5 a la 8 muestra los resultados de la estimación del VaR y CVaR de un día, de cada país para diferentes intervalos de confianza y la composición de cada uno de los portafolios validados: i) portafolio optimo; ii) portafolio de mercado y iii) portafolio de mínima varianza, de tal forma que las proporciones de los activos 1 a 3 seguirán el vector (w_1, w_2, w_3) respectivamente.

Tabla 5. Resultados VaR con un nivel de Confianza del 95%

Portafolio Optimo con VaR (95%)							
	Individuales				Bruto	Correlacionado	% Perdida
	Activo 1	Activo 2	Activo 3	Bono			
Colombia	- 15,86	1,47	42,29	-	27,90	40,19	0,40%
Estados Unidos	13,21	- 19,54	- 6,29	-	-12,63	19,19	0,19%
España	- 11,56	- 18,13	6,08	-	-23,61	22,35	0,22%
Alemania	4,99	- 9,47	- 12,00	-	-16,47	16,37	0,16%
Japon	- 2,58	- 17,14	- 3,35	-	-23,07	19,39	0,19%
Portafolio Mercado con VaR (95%)							
	Individuales			Bruto	Correlacionado	% Perdida	
	Activo 1	Activo 2	Activo 3				
Colombia	-180,92	16,76	482,47	318,30	458,44	4,58%	
Estados Unidos	-145,23	214,88	69,22	138,87	211,01	2,11%	
España	107,95	169,35	-567,87	220,51	208,76	2,09%	
Alemania	-67,79	128,53	162,81	223,55	222,14	2,22%	
Japon	29,38	194,95	38,09	262,42	220,49	2,20%	
Portafolio Minima Varianza con VaR (95%)							
	Individuales			Bruto	Correlacionado	% Perdida	
	Activo 1	Activo 2	Activo 3				
Colombia	77,71	117,59	76,61	271,91	198,81	1,99%	
Estados Unidos	16,19	50,69	91,27	158,16	132,86	1,33%	
España	89,16	93,88	44,45	227,48	190,96	1,91%	
Alemania	29,78	47,60	155,42	232,80	208,07	2,08%	
Japon	31,30	79,39	127,39	238,08	183,57	1,84%	

Nota: Elaborada por el Autor

Tabla 6. Resultados VaR con un nivel de Confianza del 99%

Portafolio Optimo con VaR (99%)							
	Individuales				Bruto	Correlacionado	% Perdida
	Activo 1	Activo 2	Activo 3	Bono			
Colombia	- 22,43	2,08	59,82	-	39,46	56,84	0,57%
Estados Unidos	18,68	- 27,64	- 8,90	-	- 17,86	27,14	0,27%
España	- 16,35	- 25,64	8,60	-	- 33,39	31,61	0,32%
Alemania	7,06	- 13,39	- 16,97	-	- 23,29	23,15	0,23%
Japon	- 3,65	- 24,24	- 4,74	-	- 32,63	27,42	0,27%
Portafolio Mercado con VaR (99%)							
	Individuales			Bruto	Correlacionado	% Perdida	
	Activo 1	Activo 2	Activo 3				
Colombia	- 255,88	23,70	682,36	450,18	648,39	6,48%	
Estados Unidos	- 205,40	303,90	97,91	196,41	298,43	2,98%	
España	152,67	239,51	- 80,31	311,87	295,25	2,95%	
Alemania	- 95,88	181,78	230,27	316,17	314,17	3,14%	
Japon	41,56	275,72	53,87	371,14	311,85	3,12%	
Portafolio Minima Varianza con VaR (99%)							
	Individuales			Bruto	Correlacionado	% Perdida	
	Activo 1	Activo 2	Activo 3				
Colombia	109,90	166,31	108,35	384,56	281,17	2,81%	
Estados Unidos	22,90	71,70	129,08	223,68	187,91	1,88%	
España	126,10	132,77	62,86	321,73	270,08	2,70%	
Alemania	42,11	67,32	219,82	329,25	294,28	2,94%	
Japon	44,27	112,28	180,17	336,72	259,62	2,60%	

Nota: Elaborada por el Autor

Tabla 7. Resultados CVaR con un nivel de Confianza del 95%

Portafolio Optimo con CVaR (95%)								
	Individuales				Bruto	Correlacionado	% Perdida	% Vs VaR
	Activo 1	Activo 2	Activo 3	Bono				
Colombia	- 19,89	1,84	53,04	-	34,99	50,40	0,50%	79,74%
Estados Unidos	16,56	- 24,50	- 7,89	- -	15,84	24,06	0,24%	79,74%
España	- 14,49	- 22,74	7,62	- -	29,61	28,03	0,28%	79,74%
Alemania	6,26	- 11,88	- 15,04	- -	20,65	20,52	0,21%	79,74%
Japon	- 3,24	- 21,49	- 4,20	- -	28,93	24,31	0,24%	79,74%
Portafolio Mercado con CVaR (95%)								
	Individuales				Bruto	Correlacionado	% Perdida	% Vs VaR
	Activo 1	Activo 2	Activo 3					
Colombia	- 226,88	21,01	605,03		399,16	574,91	5,75%	79,74%
Estados Unidos	- 182,13	269,46	86,81		174,15	264,61	2,65%	79,74%
España	135,37	212,37	- 71,21		276,53	261,79	2,62%	79,74%
Alemania	- 85,01	161,18	204,17		280,34	278,57	2,79%	79,74%
Japon	36,85	244,48	47,76		329,08	276,51	2,77%	79,74%
Portafolio Minima Varianza con CVaR (95%)								
	Individuales				Bruto	Correlacionado	% Perdida	% Vs VaR
	Activo 1	Activo 2	Activo 3					
Colombia	97,45	147,47	96,07		3.409,84	249,31	2,49%	79,74%
Estados Unidos	20,31	63,57	114,45		198,33	166,61	1,67%	79,74%
España	111,81	117,73	55,74		285,27	239,47	2,39%	79,74%
Alemania	37,34	59,70	194,90		291,94	260,93	2,61%	79,74%
Japon	39,26	99,55	159,75		298,56	230,20	2,30%	79,74%

Nota: Elaborada por el Autor

Tabla 8. Resultados CVaR con un nivel de Confianza del 99%

Portafolio Optimo con CVaR (99%)								
	Individuales				Bruto	Correlacionado	% Perdida	% Vs VaR
	Activo 1	Activo 2	Activo 3	Bono				
Colombia	- 25,70	2,38	68,53	-	45,21	65,12	0,65%	87,29%
Estados Unidos	21,40	- 31,66	- 10,20	- -	20,46	31,09	0,31%	87,29%
España	- 18,73	- 29,38	9,85	- -	38,25	36,21	0,36%	87,29%
Alemania	8,09	- 15,34	- 19,44	- -	26,69	26,52	0,27%	87,29%
Japon	- 4,19	- 27,77	- 5,43	- -	37,38	31,41	0,31%	87,29%
Portafolio Mercado con CVaR (99%)								
	Individuales				Bruto	Correlacionado	% Perdida	% Vs VaR
	Activo 1	Activo 2	Activo 3					
Colombia	- 293,15	27,15	781,76		515,76	742,83	7,43%	87,29%
Estados Unidos	- 235,32	348,17	112,17		225,02	341,90	3,42%	87,29%
España	174,91	274,40	- 92,01		357,30	338,26	3,38%	87,29%
Alemania	- 109,85	208,26	263,81		362,23	359,94	3,60%	87,29%
Japon	47,61	315,88	61,71		425,21	357,27	3,57%	87,29%
Portafolio Minima Varianza con CVaR (99%)								
	Individuales				Bruto	Correlacionado	% Perdida	% Vs VaR
	Activo 1	Activo 2	Activo 3					
Colombia	125,91	190,54	124,13		440,58	322,13	3,22%	87,29%
Estados Unidos	26,24	82,14	147,89		256,27	215,28	2,15%	87,29%
España	144,46	152,12	72,02		368,60	309,42	3,09%	87,29%
Alemania	48,25	77,13	251,83		377,21	337,14	3,37%	87,29%
Japon	50,72	128,63	206,41		385,77	297,44	2,97%	87,29%

Nota: Elaborada por el Autor

Por lógica estadística, cuanto menor sea el intervalo de confianza, menor debería ser el VaR o CVaR de la cartera.

Igualmente, dada la construcción del CVaR los resultados de este deben ser menores a los obtenidos por la el VaR.

Por consiguiente, la cartera óptima que minimiza el CVaR y el VaR debería también mostrar menores cifras (pérdidas expresadas en porcentaje sobre el valor del portafolio).

Contraste de los resultados VaR y CVaR. Como se aprecia en las figuras 1 a 10 disponibles en el anexo D, a medida que se incrementa la proporción invertida en el activo 1 y 2, el VaR y CVaR del portafolio disminuye, pero surgen problemas de sublinealidad (situaciones en las que el VaR y CVaR incrementa en vez de disminuir). Esta sublinealidad provoca que puedan darse casos de existencia de varios óptimos (portafolios con el mismo VaR y CVaR mínimo).

En los gráficos de tres dimensiones se muestra el VaR y CVaR a un día de dichos portafolios con un 95% y 99% de nivel de confianza en función del activo 1 y 2, en donde puede observarse como la función tiene forma convexa, pero tiene problemas de sublinealidad. Por tanto, como se aprecia, existirá una zona donde se encuentra el óptimo, pero para los intervalos de confianza elegido se obtienen varias zonas de diferentes mínimos, lo que indicaría diferentes portafolios óptimos.

Es decir, la optimización podrá realizarse de una forma más precisa si se tratase de una función totalmente convexa.

Entre países se observa varios casos, como: Colombia que a medida que aumenta la proporción del activo 1 el VaR y CVaR disminuye, lo mismo sucede con el activo 2 mostrando los problemas sublinealidad descritos.

En el caso de Estados Unidos se observa que a medida que aumenta el activo 1 el VaR y CVaR disminuye, pero cuando esté aumenta más que la proporción indicada en el portafolio mínima varianza el VaR aumenta en una mayor proporción, caso contrario sucede cuando se aumenta la proporción del activo 2.

En España y Alemania la situación es muy similar al de Estados Unidos, pero en una proporción menor cómo se observa en el activo 1 y 2 en donde las curvas son más aplanadas que los otros países de análisis.

Para Japón el VaR y CVaR disminuye a medida que aumenta la proporción del activo sea en el activo 1 y el activo 3 mientras que en para el activo 2 sucede lo inverso.

Estimación de CML con VaR y CVaR. Los siguientes gráficos muestran el resultado de la estimación de la CML incorporando la medida de riesgo de VaR y CVaR.

Como se menciona es posible estimar un índice de eficiencia para un portafolio similar al de Sharpe que incorpore medidas de riesgo como VaR y CVaR. Como se dijo el valor en riesgo se expresa como un múltiplo de la desviación estándar de los rendimientos esperados de modo que el punto en el que se maximizan los dos índices de rendimiento dará lugar a la misma cartera óptima.

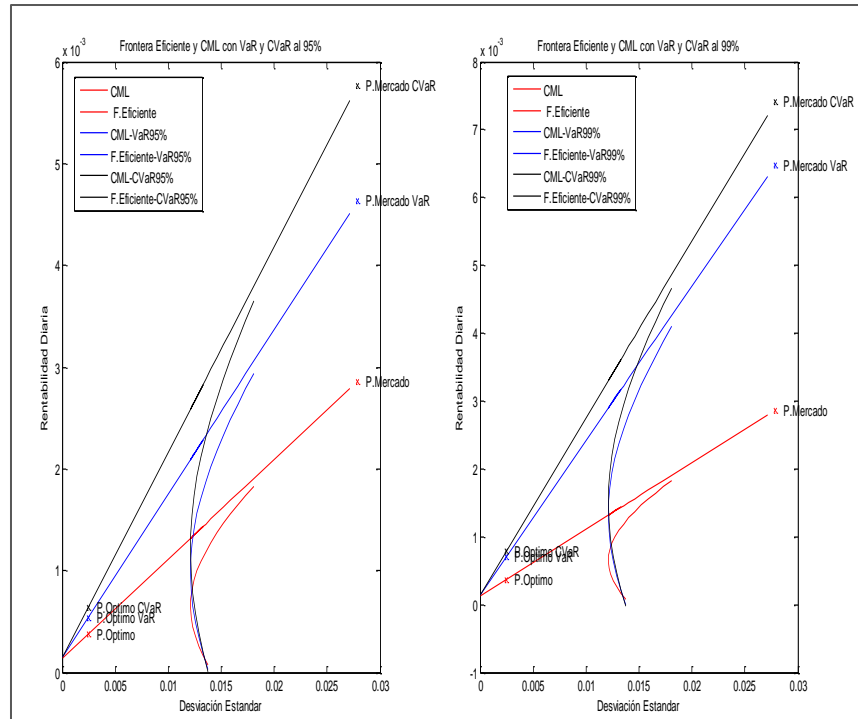


Figura 13. CML – Colombia. Elaborada por el Autor

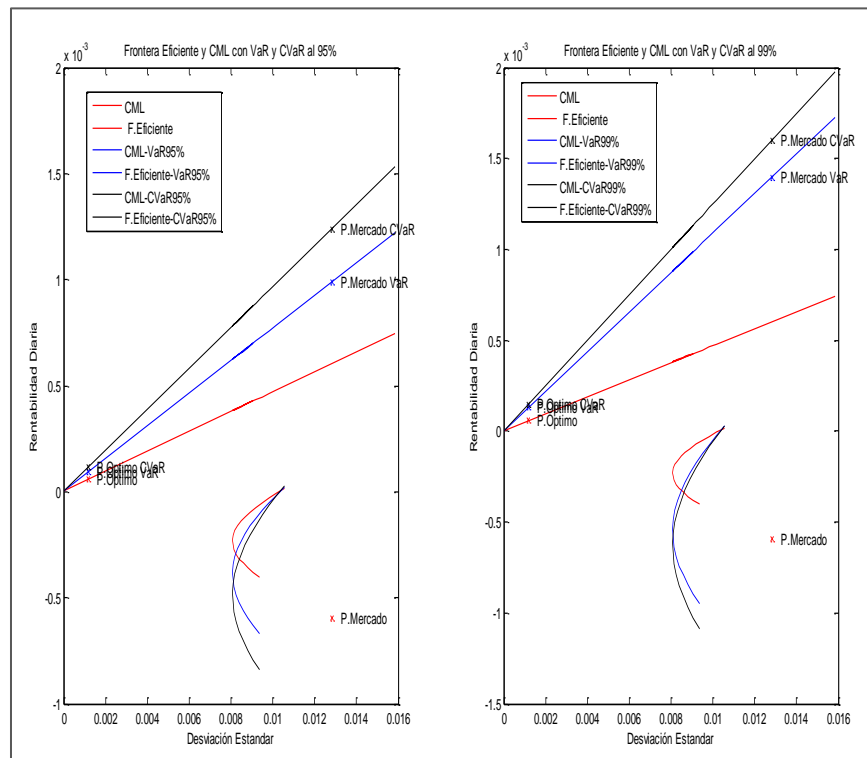


Figura 14. CML– Estados Unidos. Elaborada por el Autor

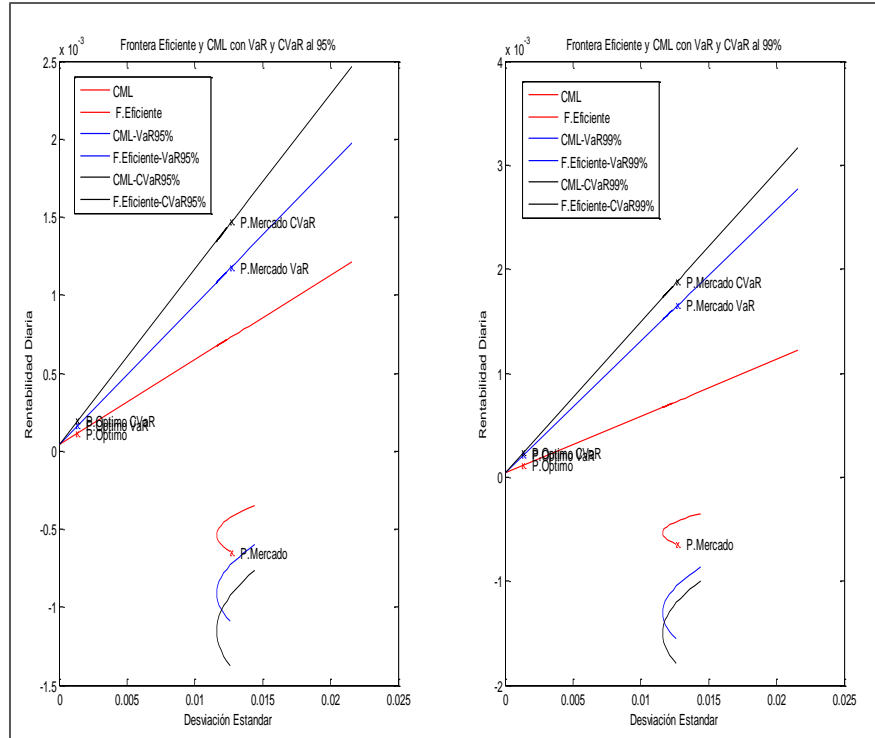


Figura 15. CML – España. Elaborada por el Autor

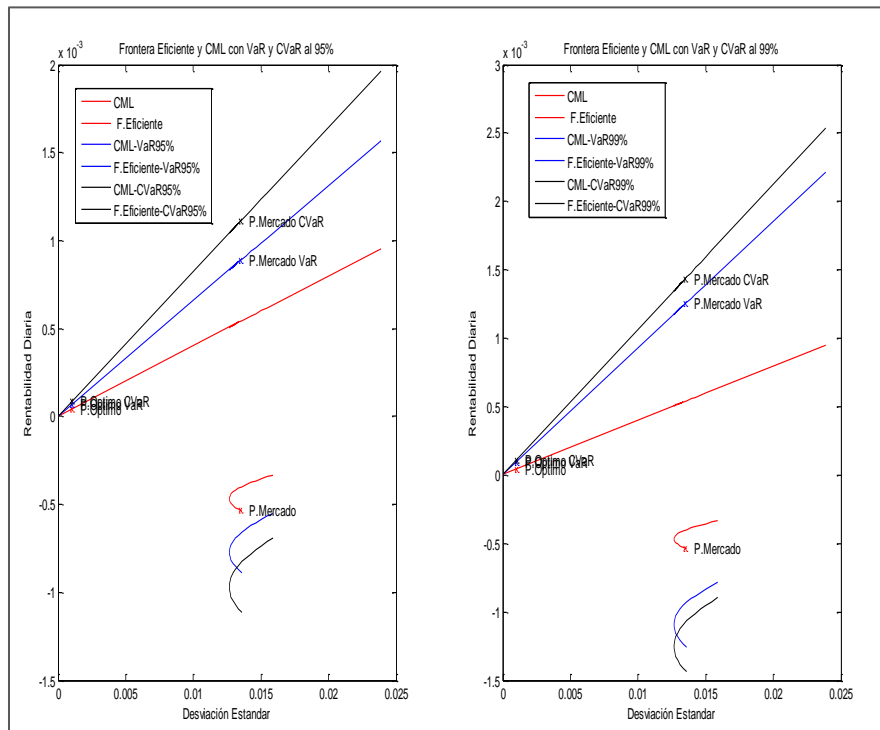


Figura 16. CML – Alemania. Elaborada por el Autor

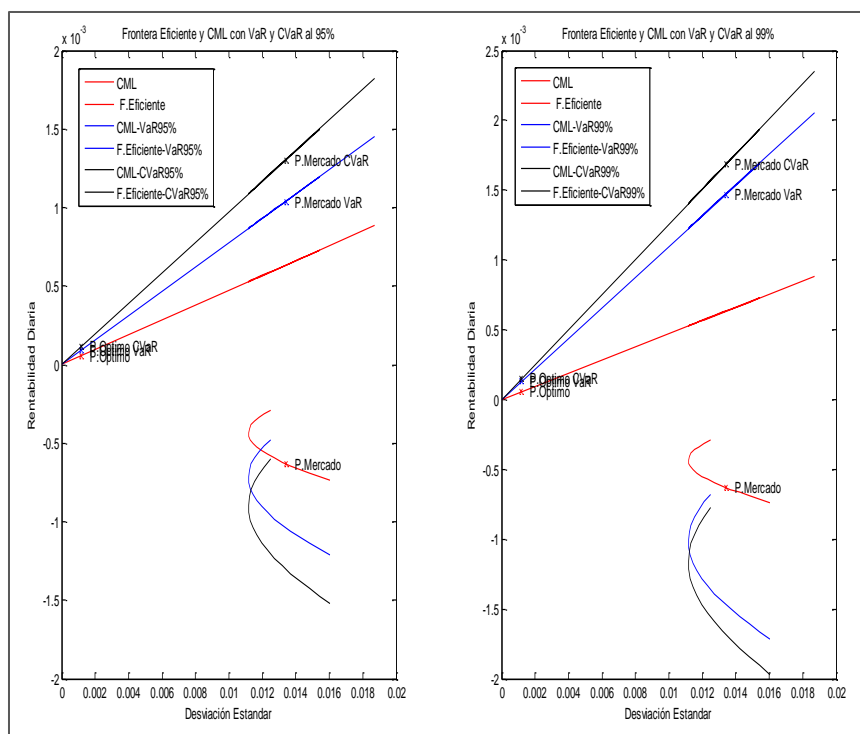


Figura 17. CML– Japón. Elaborada por el Autor

Los resultados obtenidos muestran que la CML obtenida es similar en forma a la estimada sin medidas de riesgo, pero que al incluir la estimación de VaR y CVaR los rendimientos diarios esperados del portafolio son mejores al mismo nivel de riesgo. La tabla 9 muestra las rentabilidades de los portafolios sin tener presente una medida de riesgo e incorporando medidas de riesgo como el VaR y el CVaR.

En cuanto a los resultados observados de la frontera eficiente, se evidencia un efecto mejor al incluir medidas de riesgo, siempre y cuando el rendimiento esperado del portafolio sea positivo, pero en los casos donde el rendimiento esperado es menor a cero, los resultados no son muy específicos en cuanto a una mejora de rendimiento; por otra parte, el comportamiento observado mejora en la parte superior de la frontera eficiente, es decir, cerca y superior al portafolio de mercado.

Tabla 9. Rentabilidad diaria de los portafolios sin y con medidas de riesgo%

	Rentabilidad	Colombia	Estados Unidos	España	Alemania	Japon
Sin Medida Riesgo	P. Mercado	0,290%	-0,059%	-0,065%	-0,053%	-0,063%
	P. Optimo	0,038%	0,006%	0,011%	0,004%	0,006%
	P. MinVar	0,065%	-0,023%	-0,054%	-0,047%	-0,044%
VaR - 95%	P. Mercado	0,460%	0,099%	0,120%	0,089%	0,100%
	P. Optimo	0,054%	0,009%	0,016%	0,007%	0,009%
	P. MinVar	0,210%	0,063%	0,110%	0,083%	0,087%
VaR - 99%	P. Mercado	0,650%	0,140%	0,160%	0,130%	0,150%
	P. Optimo	0,071%	0,013%	0,022%	0,010%	0,013%
	P. MinVar	0,290%	0,088%	0,150%	0,120%	0,120%
CVaR - 95%	P. Mercado	0,580%	0,120%	0,150%	0,110%	0,130%
	P. Optimo	0,064%	0,012%	0,020%	0,009%	0,012%
	P. MinVar	0,260%	0,078%	0,130%	0,100%	0,110%
CVaR - 99%	P. Mercado	0,740%	0,160%	0,190%	0,140%	0,170%
	P. Optimo	0,330%	0,015%	0,024%	0,011%	0,015%
	P. MinVar	0,079%	0,100%	0,170%	0,130%	0,140%

Nota: Elaborada por el Autor

El grado de aversión al riesgo de los inversionistas será capturado por el nivel del VaR y CVaR elegido, el cual a su vez determinará el comportamiento de los rendimientos.

Este es un beneficio significativo del modelo, y por lo tanto tiene serias implicaciones prácticas, ya que los individuos serán capaces de determinar con facilidad y precisión la relación riesgo-rentabilidad. En cuanto al nivel de confianza, naturalmente dado y que tan alto sea, determinará el valor en riesgo del portafolio.

Estimación VaR con el método de Monte Carlo. Un ejercicio de verificación sobre las estimaciones del valor en riesgo, es validar los resultados obtenidos del método paramétrico con valor en riesgo por el método Monte Carlo, donde se ha aplicado un movimiento Browniano Geométrico. Estos resultados son más fáciles de validar gráficamente a través de histogramas los cuales se presentan a continuación. Los resultados de las simulaciones correspondientes se encuentran disponibles en el anexo E.

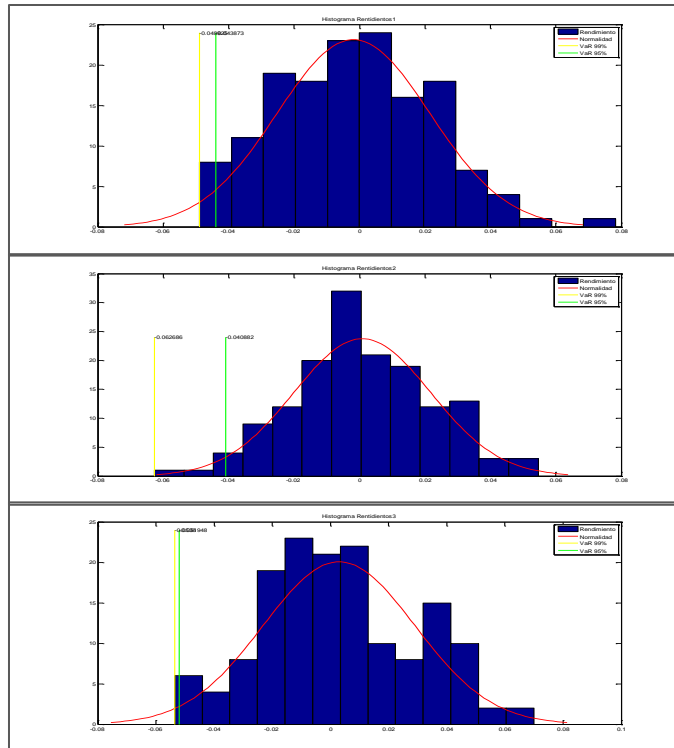


Figura 18. VaR Con el Método Monte Carlo – Colombia. Elaborada por el Autor

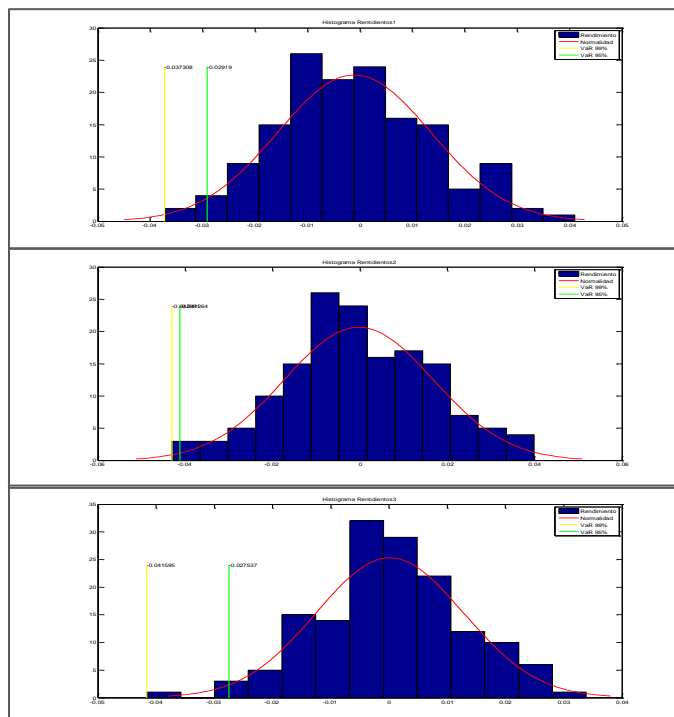


Figura 19. VaR Con el Método Monte Carlo – Estados Unidos. Elaborada por el Autor

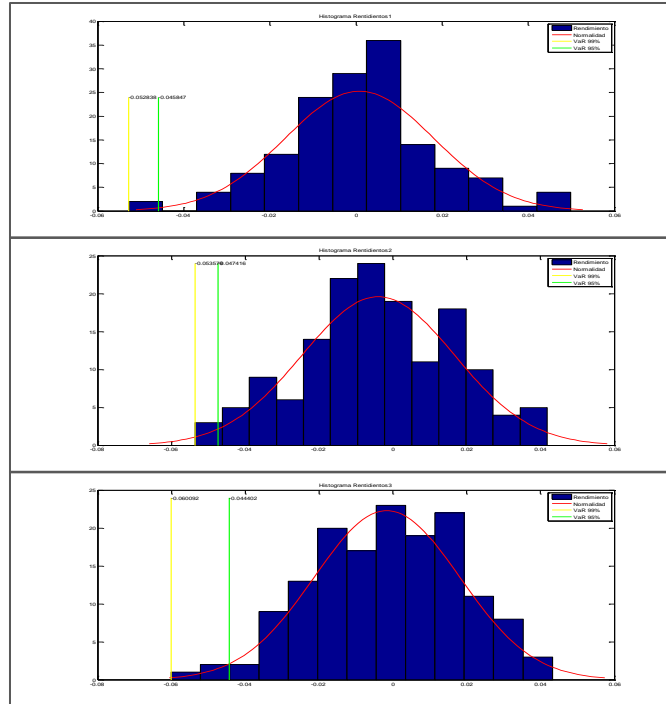


Figura 20. VaR Con el Método Monte Carlo – España. Elaborada por el Autor

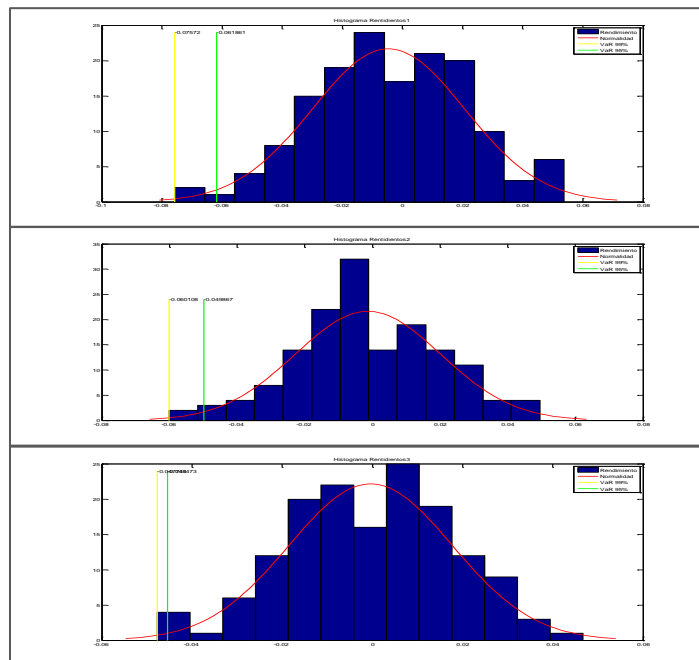


Figura 21. VaR Con el Método Monte Carlo – Alemania. Elaborada por el Autor

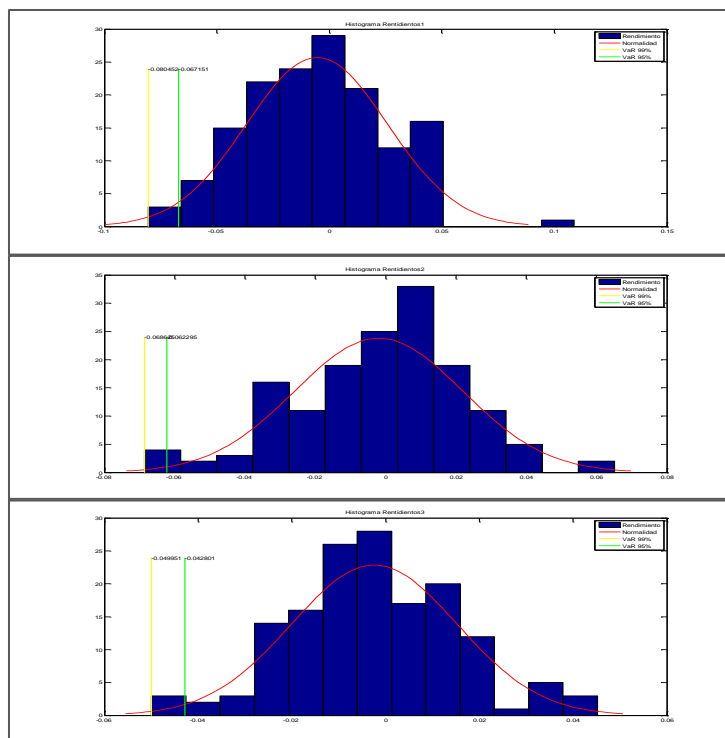


Figura 22. VaR Con el Método Monte Carlo – Japón. Elaborada por el Autor

El valor en riesgo estimado por el método de Monte Carlo, consiste en generar muchos escenarios partiendo de variaciones aleatorias, tomando en cuenta números de este tipo y teniendo en cuenta la mejor distribución de probabilidad que describe los datos, que para este caso es de normalidad. Por otra parte, para simular niveles altos de confianza, se requiere de muchas iteraciones para estabilizar los resultados.

Mientras que en la estimación paramétrica se caracteriza por su hipótesis estadística de normalidad en la distribución de probabilidad, esta técnica es quizás la más popular y más frecuentemente utilizada por la sencillez y robustez de sus resultados.

4. Conclusiones

El modelo de Markowitz, que es el referente teórico en el campo de la teoría de selección de portafolios resultar ser una herramienta de gran utilidad en la práctica orientada a determinar la composición de portafolios, además de una inminente predictibilidad.

En tal sentido, los inversionistas buscan elementos adicionales con los cuales puedan minimizar aún más su riesgo y obtener el máximo rendimiento posible, es así, que se incorpora en el análisis de la selección óptima de portafolio medidas de riesgo como el VaR y el CVaR. Esta necesidad de contar con un estimador para el riesgo de un portafolio o activo se origina dada la volatilidad de los precios de los activos.

Las medidas de riesgo VaR y el CVaR constituye una magnitud de enorme interés de cara a la gestión del riesgo ya que incorporan el hecho que los inversionistas suelen tratar las pérdidas y ganancias de manera simétrica, lo que no sucede con medidas como la desviación estándar donde se asigna una ponderación igual a las perdidas y las ganancias, convirtiéndose así en instrumentos que minimizan las perdidas posibles de un activo.

Como se ha declarado bajo el supuesto de normalidad el VaR al igual que el CVaR, es un múltiplo escalar de la desviación estándar, siendo el CVaR una medida más conservadora ya que éste contempla la pérdida más allá del VaR como una esperanza condicional.

Al incorporar estas medidas dentro de las estimaciones de selección de portafolio, se evidencia que si existe la posibilidad de una mejor rentabilidad que el modelo tradicional de selección de portafolios de Markowitz, resultado que es más evidente cuando el rendimiento

esperado es positivo. Por tanto, incorporar una medida de riesgo si evidencia una mayor eficiencia en la selección óptima de portafolios. Pero se observa en los resultados un problema de sublinealidad derivado de la convexidad de las medidas de riesgo, lo cual hace más complejo el proceso de optimización ya que pueden existir varios puntos que optimicen el portafolio.

A partir de la incorporación de una medida de riesgo en el problema de optimización es posible hallar un Índice de eficiencia similar al de Sharpe ajustando la prima de riesgo no solo por la desviación estándar sino también de acuerdo a la medida de riesgo incluida en el modelo que determina el nivel de aversión del inversionista.

Las estimaciones fueron aplicadas en varios mercados a nivel global con el objetivo de validar si los resultados son consistentes al cambiar las condiciones y características. Por lo anterior se muestra que existe coherencia en la optimización de carteras para diferentes mercados a distintos niveles de confianza.

En cuanto a la medida que resulta más conveniente aplicar se sabe que el VaR es la medida más utilizada en los mercados financieros y por los reguladores de los mismos, por tanto, esta puede ser una medida que este en línea con las disposiciones del mercado donde existe la necesidad de algoritmos que minimicen el VaR. Utilizando el hecho de que la minimización del CVaR puede hacerse más eficientemente, por lo que pueden utilizarse algoritmos para minimizar el CVaR, lo que simultáneamente permitiría minimizar el VaR.

Para futuras investigaciones se plantea explorar aún más la forma de incorporar medidas de riesgo al problema de optimización de portafolios y con ellos las soluciones al problema para con ello complementar los modelos ya existentes de selección de portafolios.

Referencias Bibliográficas

- Aozorabank. (2016). *Datos financieros* . Obtenido de www.aozorabank.co
- Argos S.A. (2016). *Datos financieros* . Obtenido de www.argos.co
- Artzner. (1999). *Coherent measures of risk*. Obtenido de <https://people.math.ethz.ch/~delbaen/ftp/preprints/CoherentMF.pdf>
- Arzac y Bawa. (1977). Portfolio choice and equilibrium in capital markets with safety first investo. *Journal Financial Economics*, (4) 33-64.
- Astaiza,J. (2012). *El teorema de la separación de Tobin: información del primer semestre de 2008 del mercado accionario colombiano*. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/268235640_El_teorema_de_la_separacion_de_Tobin_informacion_del_primer_semestre_de_2008_del_mercado_accionario_colombiano
- Bayer. (2016). *Datos financieros* . Obtenido de www.bayer.com
- BMW Group. (2016). *Datos financieros* . Obtenido de www.bmwgroup.com
- Campbell,R ; Huisman,R y Koedijk, K. (2001). *Optimal portfolio selection in a value-at-risk framework*. Toronto: Journal of Banking & Finance .
- Carbonell & Echevarria. (2008). Estructuración de un portafolio óptimo de inversión en divisas representativas del mercado Forex, Revista Soluciones de Postgrado EIA, Número 2. *Revista Soluciones de Postgrado EIA*, (2) 23 - 33.
- Chevron. (2016). *Datos financieros* . Obtenido de www.chevron.com
- Domínguez,J ; Oliver, M. (2006). *Más allá del valor en riesgo* . Bogotá.

- Ecopetrol. (2016). *Analisis financieros* . Obtenido de www.ecopetrol.com.co
- Engels,M. (2004). *Portfolio Optimization: Beyond Markowitz*. Netherlands: Leiden University.
- Ferguson y Gould . (1978). *Teoria Microeconomica*. México : Trillas editores .
- Feria y Oliver . (2006). *Más allá del valor en riesgo (VeR): el VeR condicional*, Universidad de Sevilla. España: Universidad de Sevilla.
- Ferrovial . (2016). *Datos financieros* . Obtenido de www.ferrovial.com
- Forsyth. (2015). *An Introduction to computational Finance*. Canada: University of Waterloo.
- Gas Natural fenosa. (2016). *Datos financieros* . Obtenido de www.gasnaturalfenosa.com
- Gosap. (2016). *Datos financieros* . Obtenido de go.sap.com
- Grupo Bancolombia . (2016). *Datos financieros* . Obtenido de www.grupobancolombia.com,
- Investing. (2016). *Datos financieros*. Obtenido de <http://es.investing.com/>
- Janecek. (2004). *What is a realistic aversion to risk for real-world individual investors?*, . Pittsburgh: Carnegie Mellon University.
- Jorion . (2007). *Financial Risk Manager Handbook*. Texas: Paidos editores.
- Jorion,P. (2003). *Valor en Riesgo*. Irvine: Universidad de California.
- Kahneman, D. (1990). *Experimental tests of the endowment effect and the coax theorem*. . Journal of Public Economics 98.
- Ludwigs,A. (1999). *Basic Utility Theory for Portfolio Selection, Empirische Wirtschaftsforschung und Ökonometrie*. Universität Freiburg .
- Markowitz,H. (1952). Portfolio Selection . *Revista Journal of Finance*, (7) 77-91.
- Martinez y Arnillas . (1992). *Normalidad de los rendimientos bursátiles*. Barcelona: Universidad de Navarra.
- osakagas. (2016). *Datos fiancieros* . Obtenido de www.osakagas.co.jp

- Palisade. (2015). *Graficos del VaR*. Obtenido de <http://www.palisade.com>
- Panasonic. (2016). *Datos financieros* . Obtenido de www.panasonic.com,
- Pfizer. (2016). *Datos financieros* . Obtenido de www.pfizer.com
- Puerta, L. (2011). *Diseño de estrategias óptimas para la selección de portafolios, un análisis de la ponderación inversa al riesgo*. Buenos Aires: Paidós editores.
- Ree. (2016). *Datos financieros* . Obtenido de www.ree.es
- Ruiz y Sardi . (2013). *Determination of optimal portfolio, about risk and return, of the oil sector companies listed on the stock exchange of Colombia*. Bogotá .
- Sarykalin. (2008). *VaR vs. CVaR in Risk Management and Optimization, Tutorialsin Operations Research*. Mc Graw Hill.
- Sharpe,W. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*,, (19) 425-442.
- Tobín. (1958). Estimation of Relationships for Limited Dependent Variables. *Revista Económica*, (26) 24-36. Obtenido de <https://www.sonoma.edu/users/c/cuellar/econ411/Tobin.pdf>
- Tobín. (1958). Estimation of Relationships for Limited Dependent Variables. *Revista Económica*, (26) 24-36.

Anexos

Anexo A. Función Utilidad CRRA

Se asume que la utilidad es aditivamente separable, y se trabaja específicamente con la función de utilidad de aversión relativa al riesgo constante (CRRA por sus siglas en inglés).

$$U(w) = \frac{X^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}$$

$$0 < \theta < 1$$

$$E[U(w)] = \int_0^{\infty} \frac{X^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} \frac{1}{w\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln w - \mu)^2 / 2\sigma^2} dw$$

$$E[U(w)] = \frac{1}{1 - \theta} \exp\left((1 - \theta)\left(\mu + (1 - \theta)\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)$$

$$\log(E[U(w)]) = \log\left(\frac{1}{1 - \theta}\right)\left((1 - \theta)\left(\mu + (1 - \theta)\frac{\sigma^2}{2}\right)\right) = \bar{V}$$

$$\log(E[U(w)]) = \log\left(\frac{1}{1 - \theta}\right)(1 - \theta)\mu + \log\left(\frac{1}{1 - \theta}\right)(1 - \theta)(1 - \theta)\frac{\sigma^2}{2} = \bar{V}$$

$$\log\left(\frac{1}{1 - \theta}\right)(1 - \theta)\mu = -\log\left(\frac{1}{1 - \theta}\right)(1 - \theta)(1 - \theta)\frac{\sigma^2}{2} + \bar{V}$$

$$\mu = \frac{-\log\left(\frac{1}{1 - \theta}\right)(1 - \theta)(1 - \theta)\frac{\sigma^2}{2} + \bar{V}}{\log\left(\frac{1}{1 - \theta}\right)(1 - \theta)}$$

$$\mu = (1 - \theta)\frac{\sigma^2}{2} + \bar{V}$$

$$\log(E[U(w)]) = \bar{V}$$

Anexo B. Solución Paramétrica Modelo Markowitz

- N activos ≥ 2
- Se permiten ventas en corto
- ε matriz de varianza covarianza, simétrica $\varepsilon = \varepsilon'$
- ε es definida positiva, $w > 0$ (al menos un $w_i > 0$)
- I vector de unos de tamaño $1 \times N$

Problema de optimización, planteado por Markowitz:

$$\begin{aligned} \min(w) &= w' \varepsilon w \\ \text{s. a. } w' \mu &= E[\bar{r}_p] \quad , \quad w' \cdot I = 1 \end{aligned}$$

Solución:

$$L = w' \varepsilon w + \lambda (E[\bar{r}_p] - w' \mu) + \gamma (1 - w' \cdot I)$$

Condiciones de primer orden:

$$L_w = \varepsilon w - \lambda \mu - \gamma I = 0$$

$$L_\lambda = E[\bar{r}_p] - w' \mu = 0$$

$$L_\gamma = 1 - w' \cdot I = 0$$

Despejando:

$$w = \varepsilon^{-1}(\lambda \mu + \gamma I) \quad \odot$$

$$\mu' w = \lambda \mu' \varepsilon^{-1} \mu + \gamma \mu' \varepsilon^{-1} I = E[\bar{r}_p]$$

$$I' w = I' \varepsilon^{-1} \mu + \gamma I' \varepsilon^{-1} I = 1$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} E[\bar{r}_p] \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu' \varepsilon^{-1} \mu & \mu' \varepsilon^{-1} I \\ \varepsilon^{-1} \mu & I' \varepsilon^{-1} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Hallando la su inversa:

$$\frac{1}{BC - A^2} \begin{pmatrix} C & -A \\ -A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{D}(C\bar{r}_p - A) \\ \frac{1}{D}(B - A\bar{r}_p) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Despejando \odot :

$$w = \varepsilon^{-1}(\lambda\mu + \gamma 1)$$

$$w = \frac{1}{D}(C\bar{r}_p - A)\varepsilon^{-1}\mu + \frac{1}{D}(B - A\bar{r}_p)\varepsilon^{-1}I$$

$$w = \frac{1}{D}(B\varepsilon^{-1}I - A\varepsilon^{-1}\mu) + \frac{1}{D}(C\varepsilon^{-1}\mu - A\varepsilon^{-1}I)\bar{r}_p$$

$$g \qquad \qquad \qquad h$$

$$w = g + h\bar{r}_p$$

Por propiedad de números reales (Arquimediana), tenemos:

$$\bar{r}_p = \alpha \bar{r}_1 + (1-\alpha)\bar{r}_2$$

Por lo tanto:

$$w = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \alpha w_1 + (1-\alpha)w_2$$

$$= \alpha (g + h\bar{r}_1) + (1-\alpha)(g + h\bar{r}_2)$$

$$= \alpha g + \alpha h\bar{r}_1 + (1-\alpha)g + (1-\alpha)h\bar{r}_2$$

$$= g + h(\alpha \bar{r}_1 + (1-\alpha)\bar{r}_2)$$

$$w = g + h\bar{r}_p$$

Con apalancamiento

$$w_1 + w_2 + w_3 \dots \dots + w_f = 1$$

$$w_f = 1 - w'I$$

$$E[\bar{r}_p] = w'\mu + (1 - w'I)r_f$$

El problema de optimización:

$$\min(w) = w'\varepsilon w$$

$$s. a. w'\mu + (1 - w'I)r_f = E[\bar{r}_p]$$

Solución del lagrangiano:

$$w = \varepsilon^{-1}(\mu - r_f I) \frac{E[\bar{r}_p] - r_f}{H}$$

$$\sigma = \frac{E[\bar{r}_p] - r_f}{\sqrt{H}}$$

Despejando se tiene el índice de Sharpe:

$$\sqrt{H} = \frac{E[\bar{r}_p] - r_f}{\sigma} = \text{Sharpe}$$

$$H = B - 2Ar_f + Cr_f^2$$

Anexo C. Perfil Acciones

Colombia

Pais	Bolsa	Acción	Actividad	Sector	Perfil
Colombia	Colombia	Bancolombia	Bancos Regionales	Financiero	Bancolombia es una organización financiera colombiana, perteneciente al Grupo Sura, a su vez parte del Grupo Empresarial Antioqueño, es el banco privado más grande del país y uno de los más grandes de América. Bancolombia en 2010 consolidó más de 7 000 000 de clientes, representando el 20 % del mercado bancario colombiano, siendo así el banco más grande de Colombia.
Colombia	Colombia	Ecopetrol SA	Petroleo y gas - Integrado	Energía	Ecopetrol, antiguamente Empresa Colombiana de Petróleos S.A. es la primera compañía de petróleo de Colombia. Según la revista Forbes, se encuentra en el puesto 114 entre las empresas más grandes del mundo, y es la segunda empresa petrolera más grande de Latinoamérica —por detrás de Petrobrás—.
Colombia	Colombia	Cementos Argos Pf	Construcción - Materias Primas	Bienes de Capital	Cementos Argos es una empresa de industria cementera colombiana, con un 51 por ciento de participación en el mercado, es el cuarto mayor productor de cemento en América Latina, y el único productor de cemento blanco en Colombia. Argos tiene inversiones en Panamá, Haití y República Dominicana.
Colombia	Colombia	Bono 12 Meses	Bono del Estado		

Nota : Elaborada por el Autor con base en datos de Investing (2016), Ecopetrol (2016), Grupo Bancolombia (2016) , Argos S.A (2016)

Estados Unidos

Pais	Bolsa	Acción	Actividad	Sector	Perfil
Estados Unidos	New York	Chevron Corporation	Petroleo y gas - Integrado	Energía	Es una multinacional americana corporación energética . Una de las empresas sucesoras de la Standard Oil , que tiene su sede en San Ramón, California , y opera en más de 180 países. Chevron está involucrado en todos los aspectos del petróleo , gas natural y energía geotérmica industrias, incluyendo la exploración de hidrocarburos y la producción ; refinación , comercialización y transporte; fabricación y venta de productos químicos; y la generación de energía . Chevron es una de las compañías petroleras más grandes del mundo.
Estados Unidos	New York	Pfizer Inc	Drogas Genericas	Salud	Es una compañía mundial farmacéutica empresa con sede en la ciudad de Nueva York , con sede investigación en Groton , Connecticut. Es una de las mayores compañías farmacéuticas del mundo. Pfizer desarrolla y produce medicamentos y vacunas para una amplia gama de disciplinas médicas, incluyendo la inmunología , oncología , cardiología , diabetología / endocrinología, neurología y. Productos de Pfizer incluyen la droga blockbuster Lipitor (atorvastatina).
Estados Unidos	New York	Coca-Cola Company	Bebidas (No Alcoholicas)	Consumo no cíclico	The Coca-Cola Company es una americana histórica multinacional empresa de bebidas y fabricante, distribuidor y comercializador de concentrados de bebidas no alcohólicas y jarabes , que tiene su sede en Atlanta , Georgia . La compañía es mejor conocida por su producto insignia de Coca-Cola. a compañía opera una franquicia sistema de distribución que data de 1889, donde The Coca-Cola Company sólo produce concentrado de jarabe que luego se vende a varios embotelladores de todo el mundo que tienen un territorio exclusivo.
Estados Unidos	New York	Bono 12 Meses	Bono del Estado		

Nota: Elaborada por el Autor con base en datos de Investing (2016), Chevron (2016) (Pfizer, 2016)

España

Pais	Bolsa	Acción	Actividad	Sector	Perfil
España	Madrid	Red Eléctrica Corporación S.A.	Suministros Eléctricos	Suministros	es un grupo empresarial español que actúa como operador del sistema eléctrico en el mercado eléctrico español. Su misión, como operador del sistema, es asegurar el correcto funcionamiento del sistema de suministro eléctrico y garantizar en todo momento la continuidad y seguridad del suministro de energía eléctrica. REE gestiona toda la red de transporte de energía eléctrica (alta tensión), pero no realiza distribución de energía eléctrica (baja tensión).
España	Madrid	Ferrovial S.A.	Servicios de Construcción	Bienes de Capital	Ferrovial (anteriormente Grupo Ferrovial) es una empresa multinacional que opera en el sector de las infraestructuras, a través de cuatro divisiones: Autopistas, Aeropuertos, Construcción y Servicios. Tiene presencia en una quincena de países.
España	Madrid	Gas Natural SDG S.A.	Suministro Gas Natural	Suministros	Gas Natural Fenosa es un grupo multinacional español dedicado a la comercialización de gas natural. Cuenta con una potencia instalada de 15,5 GW y un mix de generación de electricidad diversificado. Su sede social está en el edificio Mare Nostrum del barrio de La Barceloneta, en Barcelona, España.
España	Madrid	Bono 12 Meses	Bono del Estado		

Nota: Elaborada por el Autor con base en datos de Investing (2016), Ree, (2016), Ferrovial , (2016), Gas Natural fenosa (2016)

Alemania

Pais	Bolsa	Acción	Actividad	Sector	Perfil
Alemania	Fráncfort	SAP SE (SAPG)	Software y programación	Tecnológico	SAP es una empresa multinacional alemana dedicada al diseño de productos informáticos de gestión empresarial, tanto para empresas como para organizaciones y organismos públicos. Se calcula que entre el 70% y el 80% del mercado de grandes empresas utilizan sus productos. Fundada en 1972.
Alemania	Fráncfort	Bay.Motoren Werke AG ST (BMWG)	Fabricante de automovil y camiones	Consumo Cidico	Es un fabricante alemán de automóviles deportivos de lujo y motocicletas, cuya sede se encuentra en Múnich. Sus subsidiarias son Rolls-Royce, Mini y BMW Bank. BMW es el líder mundial en ventas entre los fabricantes de gama alta, compite principalmente con Audi, Lexus y Mercedes Benz, entre otros vehículos de gama alta.
Alemania	Fráncfort	Bayer AG NA	Drogas Genericas	Salud	Es una empresa químico-farmacéutica alemana fundada en Barmen, Alemania en 1863.7 Hoy en día, tiene su sede en Leverkusen, Renania del Norte-Westfalia, Alemania. Es bien conocida por su marca original de la aspirina.
Alemania	Fráncfort	Bono 12 Meses	Bono del Estado		

Nota: Elaborada por el Autor con base en datos de Investing (2016), Gosap (2016), BMW Group (2016) y Bayer (2016)

Japón

Pais	Bolsa	Acción	Actividad	Sector	Perfil
Japón	Tokio	Panasonic Corp.	Repuestos para autos y camiones	Consumo ciclico	Es una compañía multinacional cuya sede central se encuentra en Kadoma, Japón, anteriormente denominada Matsushita Electric Industrial Co., Ltd. La compañía fue fundada en 1918 y ha crecido hasta convertirse en una de los mayores productores japoneses de electrónica. Además de la electrónica, ofrece productos y servicios no electrónicos como servicios de renovación de casas. Panasonic fue el cuarto mayor fabricante de televisores del mundo en 2012, por cuota de mercado.
Japón	Tokio	Aozora Bank, Ltd.	Bancos Regionales	Financiero	Aozora Bank, Ltd., Lit. es un japonés banco comercial que ofrece un servicio de 19 sucursales en Japón y en 2 oficinas en el extranjero representativos (En julio de 2012).
Japón	Tokio	Osaka Gas Co., Ltd.	Suministro de Gas Natural	Suministros	Osaka Gas Co., Ltd. , es una compañía japonesa de gas empresa con sede en Osaka , Japón. Se suministra gas a la región de Kansai , en especial zona Keihanshin .
Japón	Tokio	Bono 12 Meses	Bono del Estado		

Nota: Elaborada por el Autor con base en datos de Investing (2016), Panasonic (2016), Aozorabank (2016), Oosakagas, (2016)

Anexo D. Gráficos

Contraste Resultados VaR y CVar

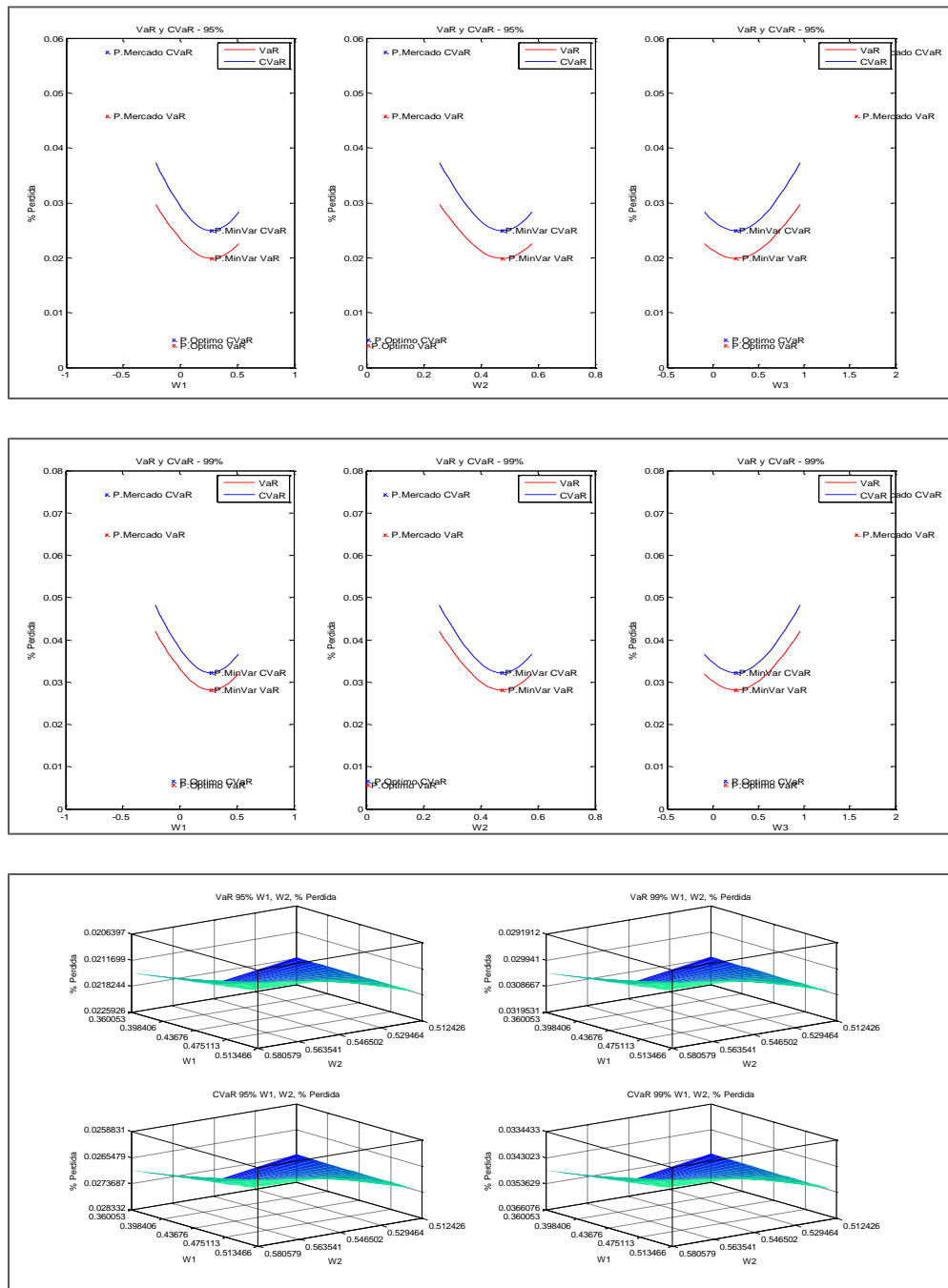


Figura 1. VaR y CVaR con un nivel de confianza del 95% y el 99% - Colombia. Elaborada por el Autor

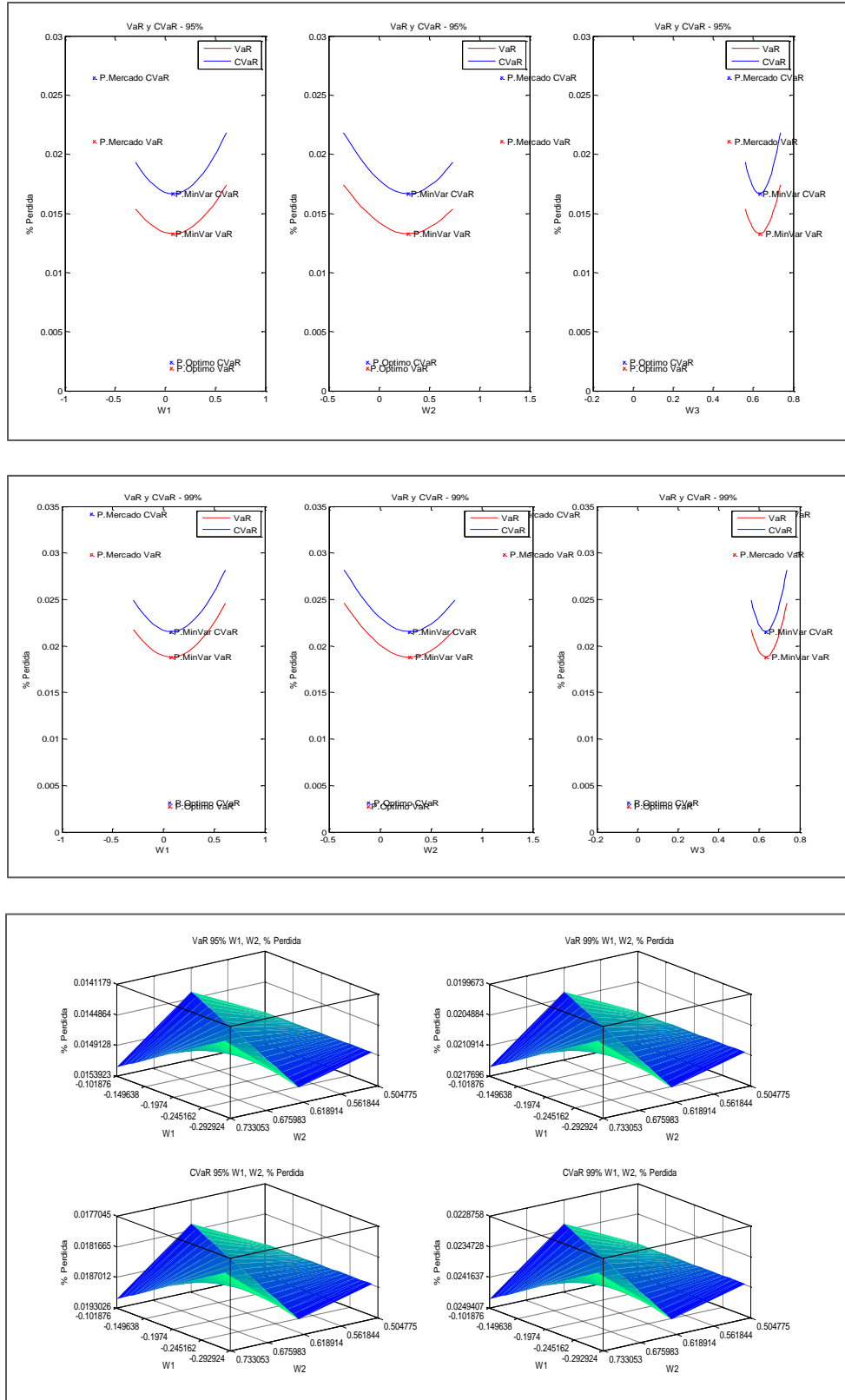


Figura 2. VaR y CVaR con un nivel de confianza del 95% y el 99% - Estados Unidos. Elaborada por el Autor

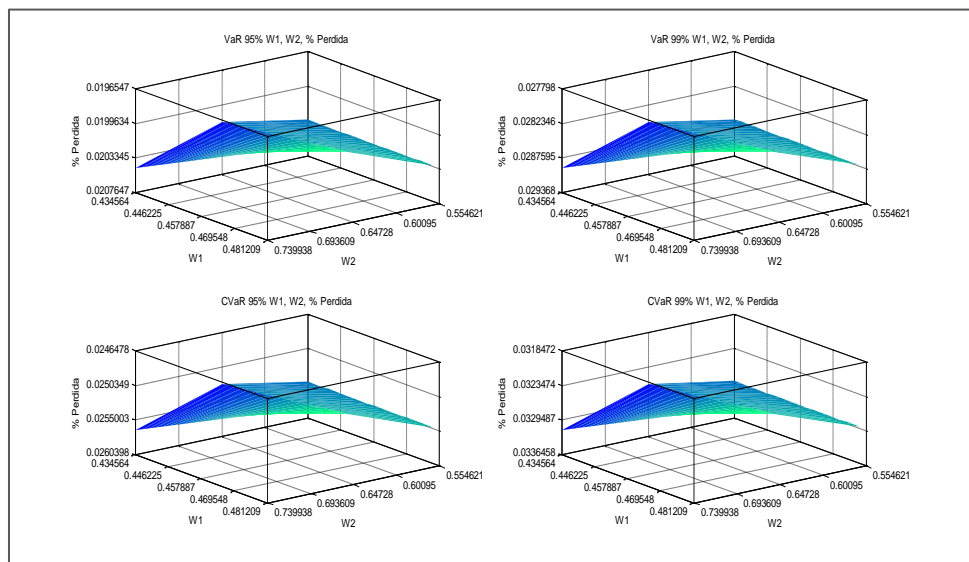
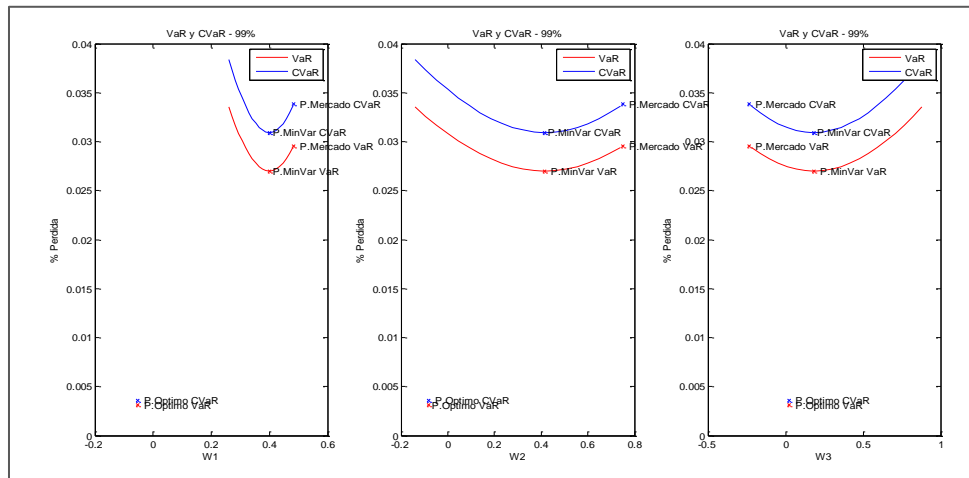
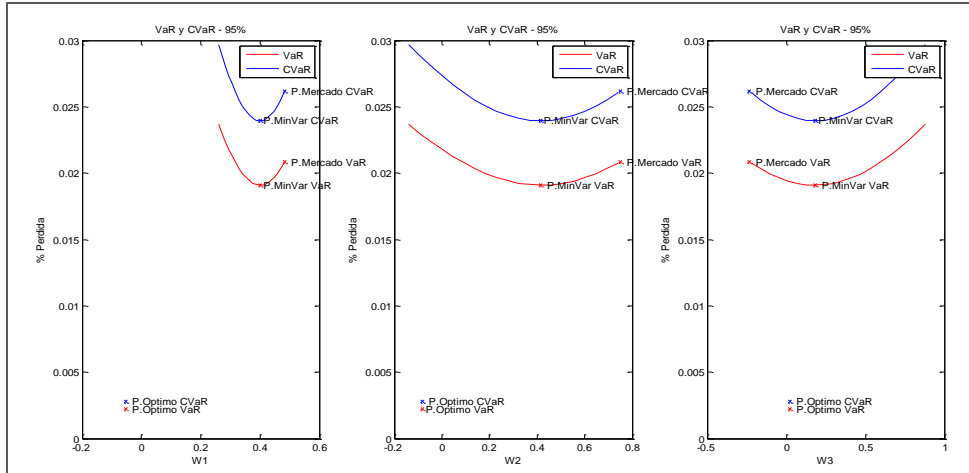


Figura 3. VaR y CVaR con un nivel de confianza del 95% y el 99% - España. Elaborada por el Autor

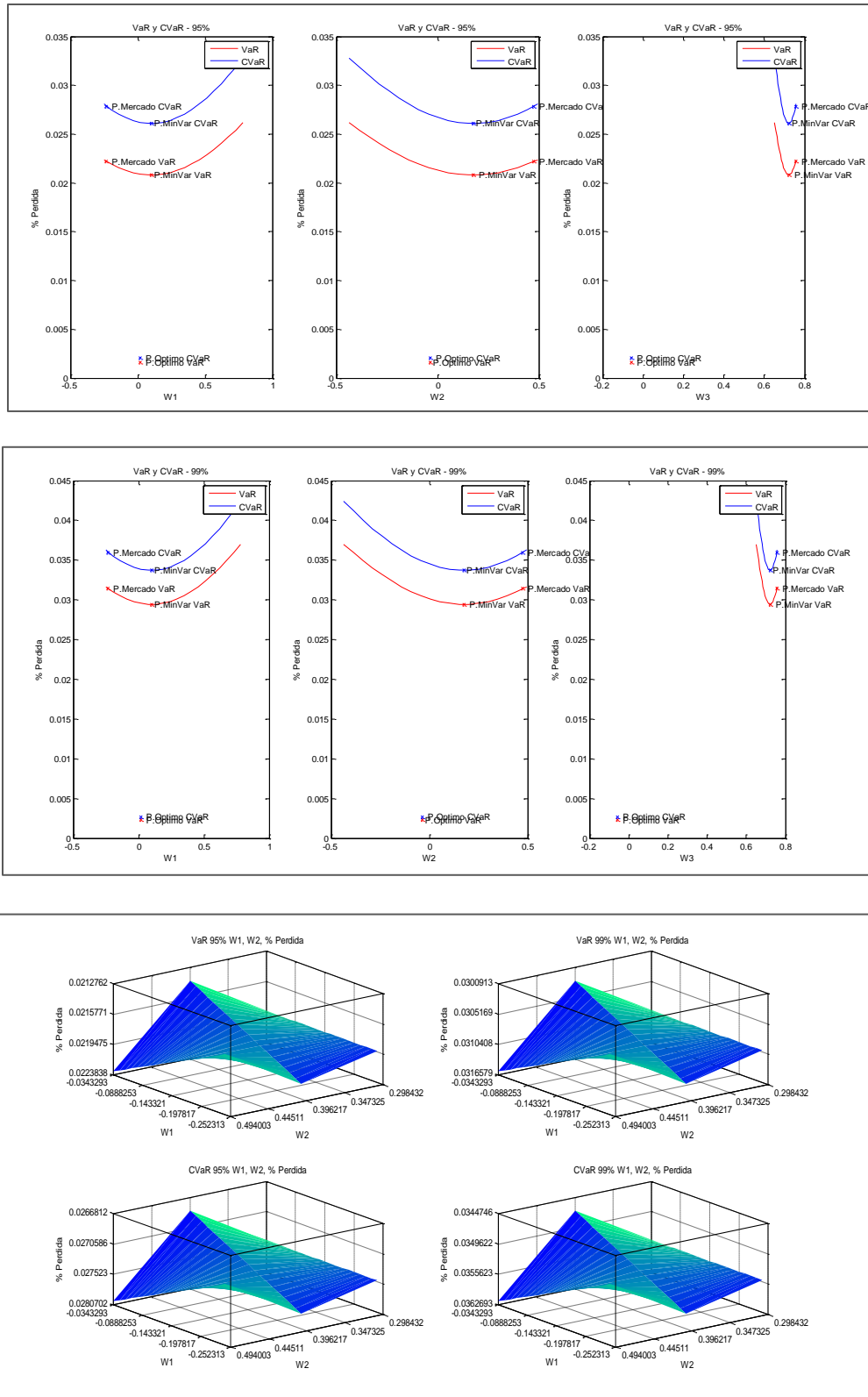


Figura 4. VaR y CVaR con un nivel de confianza del 95% y el 99% - Alemania. Elaborada por el Autor

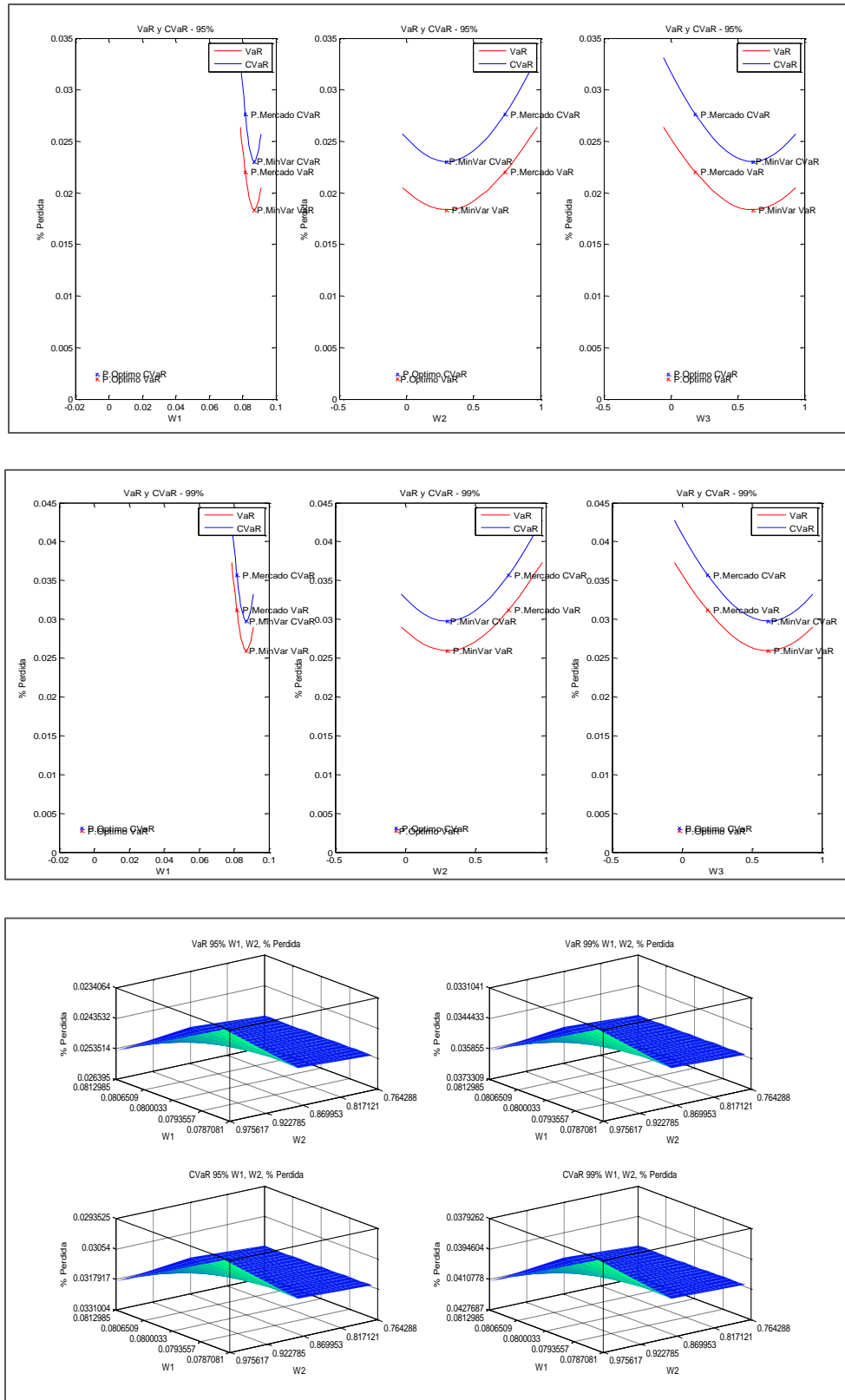


Figura 5. VaR y CVaR con un nivel de confianza del 95% y el 99% - Japón. Elaborada por el Autor

Estimación VaR con el Método de Monte Carlo

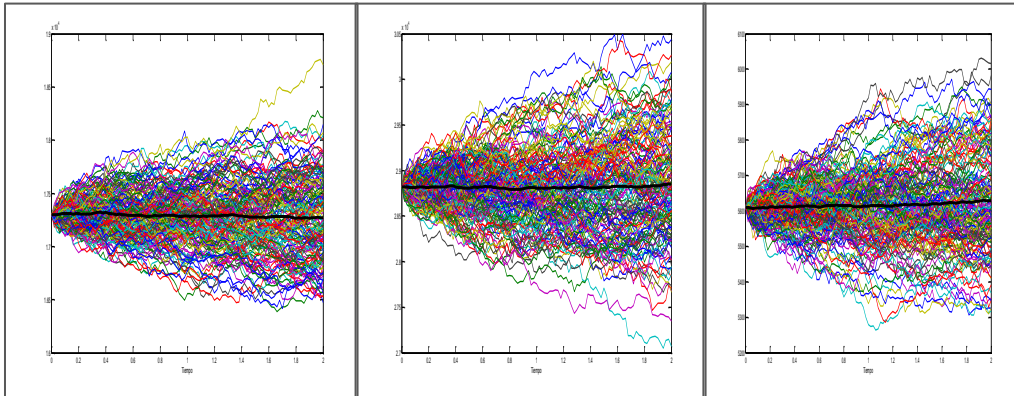


Figura 6. Simulación del Precio de los Activos Método Monte Carlo – Colombia. Elaborada por el Autor

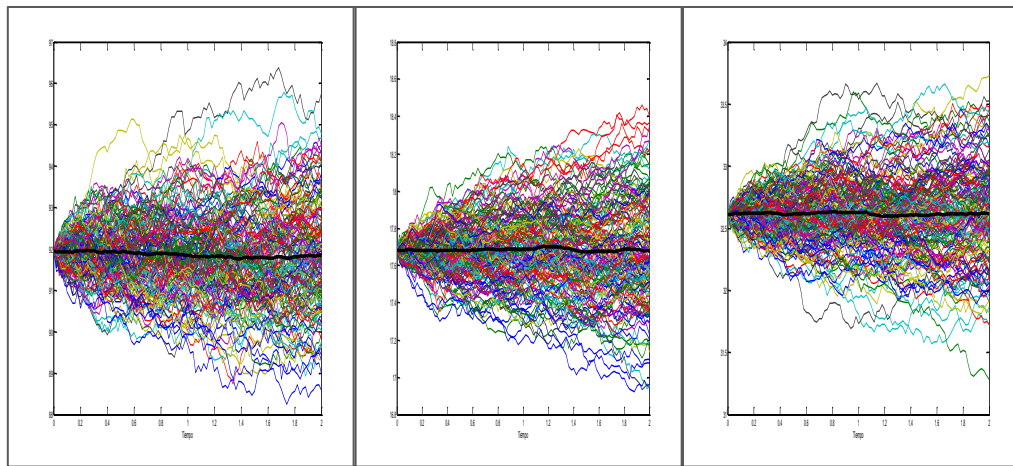


Figura 7. Simulación del Precio de los Activos Método Monte Carlo – Estados Unidos. Elaborada por el Autor

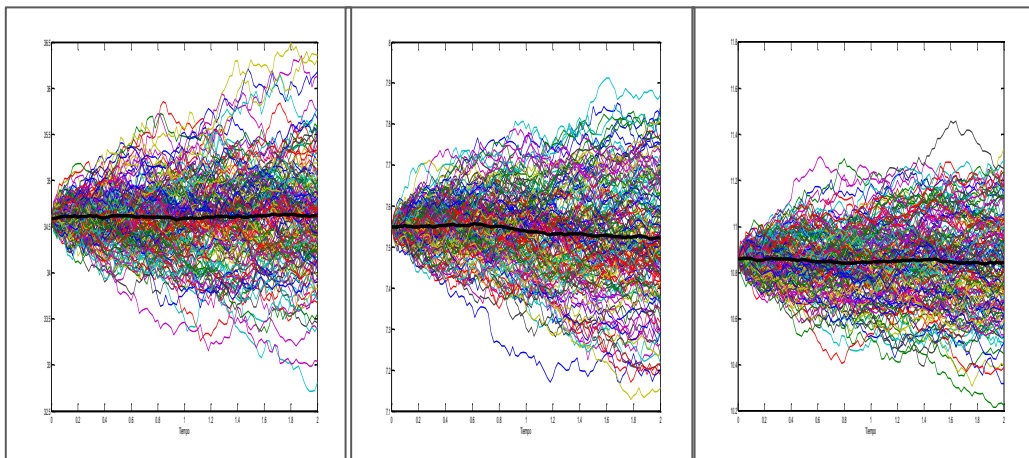


Figura 8. Simulación del Precio de los Activos Método Monte Carlo – España. Elaborada por el Autor

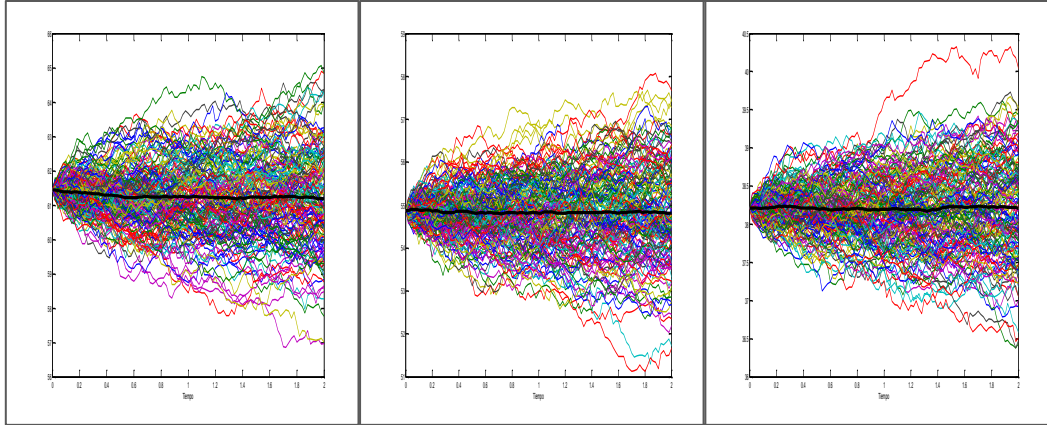


Figura 9. Simulación del Precio de los Activos Método Monte Carlo – Alemania. Elaborada por el Autor

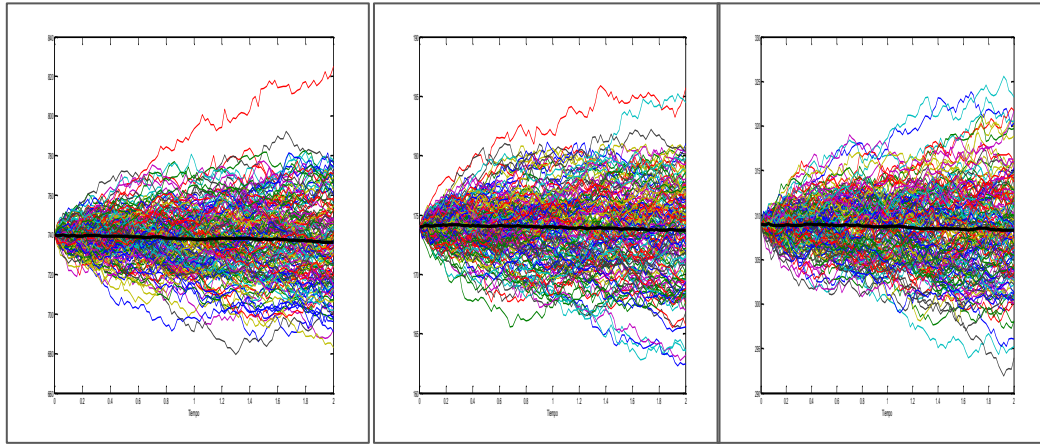


Figura 10. Simulación del Precio de los Activos Método Monte Carlo – Japón. Elaborada por el Autor