

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

Introducción al problema de los n -cuerpos en espacios de curvatura constante

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

PRESENTA

SEBASTIÁN DAZA

ASESOR: ANDRÉS VARGAS (DR. RER. NAT.)

Para mi familia.

Índice general

Prefacio	v
1. Planteamiento en \mathbb{R}^{3n}	1
1.1. Motivación	2
1.2. Primera ecuación de Euler	3
1.3. Lagrangiano en \mathbb{R}^{3n}	4
1.4. Deducción de las ecuaciones de movimiento	5
2. Espacios de curvatura constante	9
2.1. Espacio Hiperbólico	10
2.2. Esfera	20
2.3. Unificación de espacios	24
2.4. k -trigonometría	27
3. Lagrangiano en $(\mathbb{S}^3)^n$ y $(\mathbb{H}^3)^n$	29
3.1. Potencial curvo	29
3.2. Dinámica Lagrangiana con restricciones	31
3.2.1. Deducción de las ecuaciones de movimiento	31
3.3. Independencia de la curvatura	32
4. Geometría Simpléctica	35
4.1. Preliminares	35
4.2. Variedades simplécticas	38
4.3. Formalismo Hamiltoniano	42

5. Ejemplos	47
5.1. Equilibrio relativo	47
5.2. Ejemplo en \mathbb{S}^3	55
5.3. Ejemplo en \mathbb{H}^3	58
A. Formas diferenciales	63
Bibliografía	68

Prefacio

¿Cuál es la forma del universo? Esta pregunta ha sido objeto de estudio del ser humano durante siglos. Newton estableció la ley de gravitación universal, la cual nos dice que la fuerza ejercida por un cuerpo sobre otro es proporcional al inverso de su distancia al cuadrado. Esta definición posee una fuerte dependencia de los que consideremos como distancia entre dos puntos, es decir, la fuerza de atracción gravitacional depende de la geometría del universo.

Desde el punto de vista Euclidiano esta distancia es la línea recta que conecta los dos cuerpos. Sin embargo, nos podemos preguntar qué sucede si, a grandes escalas, esta distancia no es una línea recta. Esta pregunta nos lleva al planteamiento de estas fuerzas en espacios de curvatura constante donde la menor distancia entre dos puntos ya no es una recta. Esta propiedad va a cambiar la descripción de la geometría de nuestro universo y, de manera consecuente, las órbitas que puedan describir los cuerpos asumiendo que interactúan de una manera análoga a como lo hacen en la geometría euclidiana.

Si situamos n -cuerpos en el espacio, con posiciones y velocidades iniciales, el comportamiento dinámico de este sistema está relacionado con su interacción gravitacional. Esta interacción está descrita en términos de ecuaciones diferenciales tanto en el caso de un universo plano, como un universo curvo. En un principio vamos a definir estas ecuaciones en el caso plano y en términos de fuerzas. Sin embargo, al estudiar la energía asociada a este sistema, vamos a poder deducir las mismas ecuaciones de movimiento, por lo que tenemos una manera alternativa de abordar el problema pensando en cantidades conservadas como la energía y no en fuerzas entre las partículas. La ventaja de este planteamiento, el cual llamaremos Lagrangiano, es que

nos permite generalizar esta energía a espacios de curvatura constante y así poder deducir el sistema de ecuaciones diferenciales que describe su comportamiento dinámico.

Este planteamiento está descrito en el espacio tangente al espacio donde nos encontremos. De manera análoga podemos realizar esta descripción en el espacio cotangente. Este nuevo enfoque, llamado Hamiltoniano, está descrito en términos de una nueva geometría: la geometría simpléctica.

La ventaja de este planteamiento es que, a pesar de describir el mismo sistema, nos permite analizar nuevas propiedades: funciones que van a permanecer constantes lo largo de las trayectorias descritas por el sistema.

Finalmente vamos a introducir un tipo particular de soluciones las cuales mantienen las distancias entre los cuerpos constantes en todo instante de tiempo. Vamos a estudiar dos casos particulares de estas soluciones en espacios con curvatura constante.

Capítulo 1

Planteamiento en \mathbb{R}^{3n}

A continuación vamos a presentar el problema de los n -cuerpos en un espacio con curvatura cero, es decir, un espacio plano. Comenzamos con el planteamiento basado en la interacción de fuerzas del sistema debido a la presencia de la atracción gravitacional. Este planteamiento está basado en la segunda ley de Newton la cual establece que la suma de fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual al producto de la masa por la aceleración de este cuerpo. Es importante mencionar que no se ha encontrado una solución analítica en el caso $n > 2$. Si se desea saber acerca del problema de los dos cuerpos u otros aspectos no mencionados en este documento acerca del planteamiento del problema de los n -cuerpos en el caso plano ver el capítulo 4 y 5 de [Win14].

Dadas n partículas puntuales de masas $m_1, \dots, m_n > 0$ con respectivas posiciones $q^1, \dots, q^n \in \mathbb{R}^3$, la fuerza F_{ij} que ejerce la partícula j sobre i cumple la ley de gravitación universal si:

$$F_{ij} = -G \frac{m_i m_j (q^i - q^j)}{|q^i - q^j|^3}.$$

El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales describe el comportamiento dinámico de estas n partículas sujetas a la ley de gravitación universal:

$$m_i \ddot{q}^i = \sum_{j=1, j \neq i}^n F_{ij} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (q^j - q^i)}{|q^j - q^i|^3}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.0.1)$$

Se tomaron las unidades tal que la constante gravitacional $G = 1$. Encontrar una solución analítica a este sistema permitiría saber las posiciones y velocidades de las n partículas para cualquier instante de tiempo $t \in \mathbb{R}^+$.

1.1. Motivación

Definición 1.1.1. Se define el espacio de configuración S como el conjunto de todos los elementos $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3n}$ de la forma $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ tales que q^i es una posición admisible para la partícula i -ésima.

El espacio de configuración, asumiendo un universo plano, es \mathbb{R}^{3n} . Con esta definición estamos admitiendo que dos partículas tengan la misma posición por lo que es posible la colisión de dos o más cuerpos. Sin embargo, estos casos no van a ser considerados.

Para el sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\ddot{q}^i = f(q^i),$$

con $q^i \in \mathbb{R}^3, i = \overline{1, n}$. Se quiere encontrar una solución, es decir, una curva $q : \mathbb{R} \rightarrow S$ tal que $\pi_i \circ \ddot{q} = f(q^i)$ con π_i la proyección de la posición i -ésima. Este sistema de ecuaciones es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\dot{q}^i = y^i, \quad \dot{y}^i = f(q^i). \quad (1.1.1)$$

Con esta idea en mente se define el espacio de configuración generalizado TS , donde las variables son q^i, y^i , es decir, el espacio de posiciones y velocidades de una partícula. Además la ecuación del lado derecho en (1.1.1) define un campo vectorial en el espacio de configuración generalizado llamado campo vectorial de velocidades.

El espacio de configuración generalizado es el haz tangente del espacio de configuración por lo que una solución es una curva $\phi : \mathbb{R} \rightarrow TS$ con $\phi(t) = (q, \dot{q})$ tal que la velocidad $\dot{\phi}$ en cada punto coincide con el campo vectorial de velocidades en ese punto.

Se tiene entonces que una solución al sistema de ecuaciones diferenciales (1.0.1) es una solución al sistema de ecuaciones diferenciales (1.1.1) la cual es una curva en TS .

Queremos ver que estas ecuaciones son consecuencia de un principio variacional el cual da lugar a las ecuaciones de Euler–Lagrange. Este principio

variacional está definido en términos de una función en TS que condensa la información de (1.0.1) en términos de la energía asociada al sistema.

1.2. Primera ecuación de Euler

En las siguientes secciones vamos a mostrar la relación entre el problema de los n -cuerpos y un principio variacional. Para mas información sobre la relación de la mecánica Lagrangiana y los principios variacionales ver [Bri14].

Sea $f : TS \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y $y : \mathbb{R} \rightarrow S$ una curva suave en S . Se define

$$\mathcal{F}[y] = \int_a^b f(\dot{y}) dt.$$

Definición 1.2.1. La variación de primer orden del funcional \mathcal{F} , denotada $\delta\mathcal{F}$, viene dada por:

$$\delta\mathcal{F}[y, \delta y] = \left(\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}[y + \epsilon\delta y] \right)_{\epsilon=0}, \quad (1.2.1)$$

donde δy es una curva suave en S tal que $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. Esta función se llama variación de y .

Desarrollando la ecuación (1.2.1) obtenemos

$$\delta\mathcal{F}[y, \delta y] = \int_a^b \left[\delta y(t) \frac{\partial f}{\partial y} + \delta \dot{y}(t) \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] dt,$$

integrando por partes

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\delta y(t) \frac{\partial f}{\partial y} \right) dt + \left(\delta y(t) \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right)_a^b - \int_a^b \left[\delta y(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right] dt \\ &= \int_a^b \delta y(t) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right] dt + \left[\delta y(b) \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right)_b - \delta y(a) \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right)_a \right]. \end{aligned}$$

Ya que $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, entonces

$$\delta\mathcal{F}[y, \delta y] = \int_a^b \delta y(t) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right] dt.$$

Sea $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}$ la derivada funcional de \mathcal{F} con respecto a y definida por

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right).$$

Si $\delta \mathcal{F}[y, \delta y] = 0$ para toda variación de y entonces el camino y maximiza o minimiza el funcional \mathcal{F} .

Esta condición es equivalente a $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0$, es decir

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = \ddot{y} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \dot{y}} + \dot{y} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \dot{y}}. \quad (1.2.2)$$

La ecuación (1.2.2) se llama primera ecuación de Euler. La solución de esta ecuación nos da un camino en S que maximiza o minimiza el funcional \mathcal{F} .

1.3. Lagrangiano en \mathbb{R}^{3n}

En la anterior sección se definió el funcional \mathcal{F} en términos de la función suave f . Dicha función va ser un objeto matemático que vamos a llamar Lagrangiano y nos va a dar información sobre la energía total del sistema.

Definición 1.3.1. La energía cinética de un sistema almacena la información de la energía debida al movimiento de este sistema. En este caso $T : TS \rightarrow \mathbb{R}$ se define

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i g(\dot{q}^i, \dot{q}^i),$$

donde $g = \delta_i^j dq^i \otimes dq^j$.

Definición 1.3.2. La energía potencial es debida a la presencia de fuerzas en el sistema. En este caso almacena información de la posición de las partículas y su correspondiente interacción debido a la presencia de la atracción gravitacional. El potencial $U : S \rightarrow \mathbb{R}$ se define

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j}{|q^j - q^i|}.$$

La energía cinética es una función suave pues, vista como una función de \mathbb{R}^{3n} a \mathbb{R} , está dada por el producto interno usual que es suave. Por otro lado la energía potencial es suave pues es la composición de funciones suaves.

Definición 1.3.3. El Lagrangiano $L : TS \rightarrow \mathbb{R}$ asociado al problema de los n -cuerpos se define por:

$$L = T - V, \quad (1.3.1)$$

donde V es el potencial, en este caso $V = -U$. Tomamos la energía potencial con el signo negativo para que el cero del potencial se encuentre en el infinito. El Lagrangiano es una función suave pues es una suma de funciones suaves.

Por lo tanto para el funcional $\mathcal{L}[q] = \int_a^b L(\dot{q})dt$, la curva $\mathbf{q} : \mathbb{R} \rightarrow S$ maximiza o minimiza este funcional si se cumple la condición (1.2.2), es decir:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right). \quad (1.3.2)$$

La ecuación (1.3.2) se llama la ecuación de Euler–Lagrange.

Es importante notar que el Lagrangiano, en el caso plano, es independiente del tiempo. Para ello

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = m_i \dot{q}^i \ddot{q}^i + \frac{dU^i}{dq} \dot{q}^i = \dot{q}^i \left(m_i \ddot{q}^i + \frac{dU^i}{dq} \right).$$

Ya que la fuerza gravitacional es conservativa, se tiene que $m_i \ddot{q}^i = -\frac{dU}{dq^i}$ y por lo tanto

$$\frac{dL}{dt} = \dot{q}^i \left(m_i \ddot{q}^i + \frac{dU^i}{dq} \right) = \dot{q}^i (m_i \ddot{q}^i - m_i \ddot{q}^i) = 0,$$

es decir que L es constante en el tiempo.

1.4. Deducción de las ecuaciones de movimiento

Tenemos el Lagrangiano asociado al sistema y qué condición debe cumplir una solución \mathbf{q} para que sea un máximo o mínimo del funcional \mathcal{L}

asociado a L . Desarrollando esta condición, es decir, desarrollando las ecuaciones de Euler–Lagrange para L se tiene:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}},$$

esto ya que la energía cinética depende sólo de la velocidad y la potencial sólo de la posición. Además

$$\frac{\partial U}{\partial q} = \left(\frac{\partial U}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial q^n} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^n} \right),$$

con:

$$\frac{\partial U}{\partial q^i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n m_i m_j \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{1}{|q^j - q^i|} \right) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (q^j - q^i)}{|q^j - q^i|^3},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = m_i \dot{q}^i,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{d}{dt} (m_i \dot{q}^i) = m_i \ddot{q}^i.$$

Por lo que un camino $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ minimiza o maximiza el funcional cuando (1.2.2) se cumple, es decir

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right),$$

lo que es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$m_i \ddot{q}^i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (q^j - q^i)}{|q^j - q^i|^3}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Por lo tanto para optimizar el funcional asociado al Lagrangiano se resuelven las ecuaciones de Euler–Lagrange, lo que nos da una solución al

sistema de ecuaciones diferenciales (1.0.1) planteado para el problema de los n -cuerpos. Esto nos permite plantear este problema en términos del Lagrangiano, el cual guarda información de la diferencia de energías asociadas al sistema, y no en términos de las fuerzas involucradas en este. Vamos a utilizar este hecho para deducir las ecuaciones de movimiento en espacios de curvatura constante mediante las ecuaciones de Euler–Lagrange. Para ello necesitamos generalizar la energía cinética y potencial en estos espacios.

Capítulo 2

Espacios de curvatura constante

En el anterior capítulo se introdujo la noción de una nueva función definida en el espacio de configuración generalizado: el Lagrangiano. Este nos permite derivar las ecuaciones de movimiento para el problema de los n -cuerpos mediante las ecuaciones de Euler–Lagrange, es decir, conocer el Lagrangiano nos permite conocer las ecuaciones de movimiento.

Ya que la energía cinética y potencial dependen de la geometría de nuestro espacio, la cinética de la métrica y la potencial de las distancias definidas por esta métrica, entonces tenemos que estudiar el comportamiento de la métrica y geodésicas en espacios de curvatura constante. Además se estudian las isometrías primero porque están relacionadas con las geodésicas y además van a ser fundamentales en la definición de un tipo de soluciones especiales que se llamarán en equilibrio relativo y definiremos en el capítulo 5.

Al decir que el espacio de configuración es \mathbb{R}^{3n} estamos asumiendo que el universo es plano pero ¿qué se puede decir si no lo es? Esta pregunta nos lleva al planteamiento del problema de los n -cuerpos en otros espacios, en nuestro caso, espacios con curvatura constante. Por lo tanto se van a introducir las herramientas necesarias para plantear este problema en estos espacios: la esfera y la pseudoesfera.

Los resultados que van a ser presentados están basados en [BP12] y [Dia12].

2.1. Espacio Hiperbólico

Existen distintas formas de definir este espacio, que es en realidad una variedad. Para nuestros propósitos se va definir como subespacio del espacio de Minkowski. Se utiliza este modelo pues es el que permite ver su relación con la esfera (de aquí su nombre de pseudoesfera).

Modelo

Definición 2.1.1. Se define el espacio n -dimensional de Minkowski \mathbb{M}^n como un espacio vectorial real con base $\{v_1, \dots, v_n\}$ y una forma bilineal, simétrica de signatura $(n-1, 1)$, es decir, si $x, y \in \mathbb{M}^n$ con $x = \sum x_i v_i$ y $y = \sum y_i v_i$ entonces:

$$\langle x, y \rangle_* = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i \right) - x_n y_n. \quad (2.1.1)$$

Para hacer distinción con el producto interno usual en \mathbb{R}^n , se va utilizar la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ para (2.1.1). Además si $y \in \mathbb{M}^n$ es tal que $\langle y, y \rangle_* = 0$ entonces y pertenece a un cono llamado cono de luz. La importancia física de este cono de luz es que divide al espacio-tiempo en tres componentes conexas: el interior del cono representa los eventos que pueden ser afectados por una partícula emitida el instante $t = 0$, el cono son los eventos que pueden ser alcanzados por un haz de luz emitido en el instante $t = 0$ y la parte exterior eventos que no se verán afectados por lo que suceda en $t = 0$. Un evento es un punto en el espacio de configuración. Además todo punto del espacio de configuración debe pertenecer al interior del cono, pues las velocidades consideradas para las partículas son menores que la velocidad de la luz.

Ya que este es un espacio vectorial de dimensión n se puede construir el isomorfismo $\varphi : \mathbb{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $v_i \mapsto e_i$, donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n . Por lo tanto \mathbb{M}^n es una variedad de dimensión n . El espacio \mathbb{M}^n junto con $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ es llamado espacio-tiempo. La coordenada con signo negativo es considerada la variable temporal.

Sea $\mathbb{H}^{n-1} \subseteq \mathbb{M}^n$ el conjunto:

$$\mathbb{H}^{n-1} = \{x \in \mathbb{M}^n : \langle x, x \rangle_* = -1, x_n > 0\}, \quad (2.1.2)$$

es subvariedad pues si se toma $\phi : \mathbb{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida $\phi(x) = \langle x, x \rangle_*$ se tiene que $d\phi = (2x_1, \dots, -2x_n)$ es sobreyectiva para todo elemento $x \in \mathbb{M}^n$ tal que $x \neq 0$. Ya que $0 \notin \phi^{-1}(-1)$ se tiene que -1 es un valor regular de ϕ por lo que $\phi^{-1}(-1)$ es una subvariedad de dimensión $n - 1$. Como $\phi^{-1}(-1)$ tiene dos componentes conexas, cada una de estas va a ser una subvariedad de la misma dimensión, \mathbb{H}^{n-1} es una de estas componentes.

La subvariedad (2.1.2) va ser llamada pseudoesfera o espacio hiperbólico. Para ver que es una variedad Riemanniana basta con encontrar una forma bilineal, simétrica, suave y definida positiva en $T\mathbb{H}^{n-1}$.

Ya que:

$$T_x\mathbb{H}^{n-1} = \text{Ker}(d\phi(x)) = \{y \in \mathbb{M}^n : \langle x, y \rangle_* = 0\},$$

y $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ es bilineal, simétrica y suave entonces basta con mostrar que es definida positiva.

Sea $y \in T_x\mathbb{H}^{n-1}$, se tiene que $\langle y, y \rangle_* \neq 0$ pues de otra forma pertenecería al cono de luz. Sea $x \in \mathbb{H}^{n-1}$, para todo $y \in T_x\mathbb{H}^{n-1}$ se puede encontrar $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x + \alpha y$ pertenece al cono de luz. Si esto no fuera posible existiría un elemento z en el espacio tangente que es paralelo a cualquier dirección del cono por lo que ese elemento cumpliría que $\langle z, z \rangle_* = 0$, lo cual no es posible. Por lo anterior se tiene que:

$$\langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle_* = \langle x, x \rangle_* + 2\alpha \langle x, y \rangle_* + \alpha^2 \langle y, y \rangle_* = 0,$$

$$\langle y, y \rangle_* = 1/\alpha^2,$$

por lo tanto para todo $y \in T_x\mathbb{H}^{n-1}$ se cumple que $\langle y, y \rangle_* > 0$.

Por las anteriores aclaraciones \mathbb{H}^{n-1} con $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ es una variedad Riemanniana.

Isometrías

Definición 2.1.2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n con una forma bilineal, simétrica y no degenerada $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Llamamos $\text{GL}(V)$ al grupo de transformaciones lineales de V en V . Se define:

$$O(n) = \{A \in \text{GL}(V) : \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in V\}$$

como el grupo de transformaciones ortogonales de V .

Definición 2.1.3. Sea W un subespacio de V . Ya que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es no degenerada se tiene que $V = W \oplus W^\perp$. Sea $\pi : V \rightarrow W$ la proyección tal que si $v = w + w^\perp$ con $w \in W$, $w^\perp \in W^\perp$ entonces $\pi(v) = w$. Se define la reflexión con respecto a W , o reflexión paralela a W^\perp , como la aplicación $\rho : V \rightarrow V$ tal que:

$$\rho(v) = 2\pi(v) - v.$$

Las reflexiones que se van a considerar de ahora en adelante van a ser respecto a un hiperplano, o paralelas a un vector $v \in V$ tal que $\langle v, v \rangle \neq 0$. Sean $x, y \in V$ tomando una reflexión ρ paralela a $v \in V$ se tiene que si $x = \alpha v + v'$ y $y = \beta v + v''$ con $v', v'' \in \{v\}^\perp$ entonces $\rho(x) = -\alpha v + v'$ y $\rho(y) = -\beta v + v''$. Además:

$$\langle \rho(x), \rho(y) \rangle = \langle -\alpha v + v', -\beta v + v'' \rangle = \alpha\beta \langle v, v \rangle - \alpha \langle v, v'' \rangle - \beta \langle v', v \rangle + \langle v', v'' \rangle$$

$$\langle x, y \rangle = \langle \alpha v + v', \beta v + v'' \rangle = \alpha\beta \langle v, v \rangle + \alpha \langle v, v'' \rangle + \beta \langle v', v \rangle + \langle v', v'' \rangle$$

ya que $\langle v, v'' \rangle = \langle v', v \rangle = 0$, entonces $\langle \rho(x), \rho(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, por lo que $\rho \in O(V)$.

Proposición 2.1.1. $O(V)$ es generado por reflexiones.

Demostración. Notar primero que $-I$ es generada por las reflexiones paralelas a cada uno de los elementos de la base. Por inducción sobre la dimensión del espacio. Para $n = 1$ es inmediato. Suponemos que es cierto para un espacio de dimensión n . Sea \hat{V} un espacio vectorial de dimensión $n + 1$ con una forma bilineal no degenerada $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Tomamos $A \in O(\hat{V})$ y $v \in \hat{V}$ tal que $\langle v, v \rangle \neq 0$.

Se puede asumir que $\langle Av - v, Av - v \rangle \neq 0$ o $\langle -Av - v, -Av - v \rangle \neq 0$.

Por la aclaración inicial si A es producto de reflexiones $-A$ también lo será por lo que se va asumir que se cumple el primer caso.

Sea ρ la reflexión paralela a $Av - v$, se tiene que:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2}(Av + v) - \frac{1}{2}(Av - v), \\ 0 &= \langle Av - v, Av + v \rangle, \end{aligned}$$

por lo tanto $\rho(v) = Av$, es decir, $(\rho \circ A)(v) = v$. Si se restringe $\rho \circ A$ a $\{v\}^\perp$ entonces $(\rho \circ A)|_{v^\perp} \in O(v^\perp)$.

Ya que v^\perp es un espacio de dimensión n se aplica la hipótesis de inducción por lo que $(\rho \circ A)|_{v^\perp}$ es un producto de reflexiones y se puede extender a \hat{V} por lo que A será también un producto de reflexiones. \square

Se va a tomar $V = \mathbb{R}^n$ con $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$. Por la proposición $O_*(\mathbb{R}^n)$ es generado por reflexiones. Además es un grupo con la composición y el subíndice es para indicar que está asociado a la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$. Se denotará $O(\mathbb{H}^{n-1})$ al subgrupo de $O_*(\mathbb{R}^n)$ que deja a \mathbb{H}^{n-1} invariante.

Definición 2.1.4. Un difeomorfismo $f : \mathbb{H}^{n-1} \rightarrow \mathbb{H}^{n-1}$ es isométrico si para todo $x \in \mathbb{H}^{n-1}$ se tiene que $\langle df_x(v), df_x(w) \rangle_* = \langle v, w \rangle_*$ con $v, w \in T_x \mathbb{H}^{n-1}$. El conjunto de todos los difeomorfismos isométricos de \mathbb{H}^{n-1} se va denotar por $\mathcal{I}(\mathbb{H}^{n-1})$.

Teorema 2.1.1. $\mathcal{I}(\mathbb{H}^{n-1}) \cong O(\mathbb{H}^{n-1})$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^{n-1})$, se toma $x \in \mathbb{H}^{n-1}$ arbitrario. Ya que $df_x : T_x \mathbb{H}^{n-1} \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{H}^{n-1}$ es isometría entre $T_x \mathbb{H}^{n-1} \cong x^\perp$ y $T_{f(x)} \mathbb{H}^{n-1} \cong f(x)^\perp$ se tiene que la aplicación $A : \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}x \oplus x^\perp \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida por:

$$A(\lambda x + v) = \lambda f(x) + df_x(v),$$

con $f(x) = Ax$ y $df_x = A|_{\mathbb{H}^{n-1}}$ en \mathbb{H}^{n-1} satisface

$$\langle A(v), A(w) \rangle_* = \langle f(v), f(w) \rangle_* = \langle df_x(v), df_x(w) \rangle_* = \langle v, w \rangle_*,$$

por lo que $A|_{\mathbb{H}^{n-1}} \in O(\mathbb{H}^{n-1})$. Además, ya que $f \equiv A$ en \mathbb{H}^{n-1} entonces:

$$\mathcal{I}(\mathbb{H}^{n-1}) = \{A|_{\mathbb{H}^{n-1}} : A \in O(\mathbb{H}^{n-1})\}.$$

Esta asignación claramente es isomorfismo por lo que $\mathcal{I}(\mathbb{H}^{n-1}) \cong O(\mathbb{H}^{n-1})$. \square

Una matriz C se llama simétrica si $C = C^T$. El espacio de matrices simétricas de tamaño $n \times n$ lo vamos a denotar por $S(n)$.

La aplicación $df_x : T_x \mathbb{H}^{n-1} \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{H}^{n-1}$ tiene asociada la matriz de derivadas parciales que la representa como transformación lineal de $T_x \mathbb{H}^{n-1}$ a $T_{f(x)} \mathbb{H}^{n-1}$. Para $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ tenemos

$$\langle Ax, Ay \rangle_* = \langle A^T Ax, y \rangle_* = \langle x, y \rangle_*$$

por lo que A es isometría si $AA^T = I$. De aquí el nombre de grupo ortogonal pues es el grupo de matrices ortogonales.

Sea $\phi : \text{GL}(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(n)$ definida $\phi(A) = A^T A$. Tenemos que $O_*(\mathbb{R}^n) = \phi^{-1}(I)$ y ya que

$$\begin{aligned} d\phi_A(B) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A+tB) - f(A)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(A+tB)(A+tB)^T - AA^T}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{AA^T + tAB^T + tBA^T + t^2BB^T - AA^T}{t} = AB^T + BA^T, \end{aligned}$$

I es valor regular de ϕ si para toda matriz $C \in S(n)$ y $A \in O(\mathbb{R}^n)$, existe $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $d\phi_A(B) = C$. Tomando $B = \frac{1}{2}CA$ obtenemos

$$d\phi_A(B) = AB^T + BA^T = \frac{1}{2}(AA^T C^T + CAA^T) = \frac{1}{2}(C + C^T) = C.$$

Por lo tanto $O_*(\mathbb{R}^n)$ es variedad diferenciable. Además es cerrada por ser preimagen de un conjunto cerrado.

Geodésicas

Proposición 2.1.2. *Sea (N, h) una variedad Riemanniana y M una subvariedad de N que es punto fijo de la isometría $\phi : N \rightarrow N$. Entonces M es totalmente geodésica en N .*

La prueba de esta proposición y otros resultados sobre geodésicas se pueden encontrar en el capítulo 7 de [Gud08].

Teorema 2.1.2. *Sean $x \in \mathbb{H}^{n-1}$, $z \in T_x \mathbb{H}^{n-1}$ con $\langle z, z \rangle_* = 1$. La geodésica que sale de x , con velocidad z viene dada por:*

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow \cosh(t) \cdot x + \sinh(t) \cdot z.$$

Como conjunto viene dada por la intersección de \mathbb{H}^{n-1} y el subespacio lineal generado por x, z en \mathbb{R}^n .

Demostración. Sea W el plano generado por x y z , γ una geodésica maximal que sale de x con velocidad z . Sea $\phi \in O(\mathbb{H}^{n-1})$ definida por $\phi|_W = id$ y

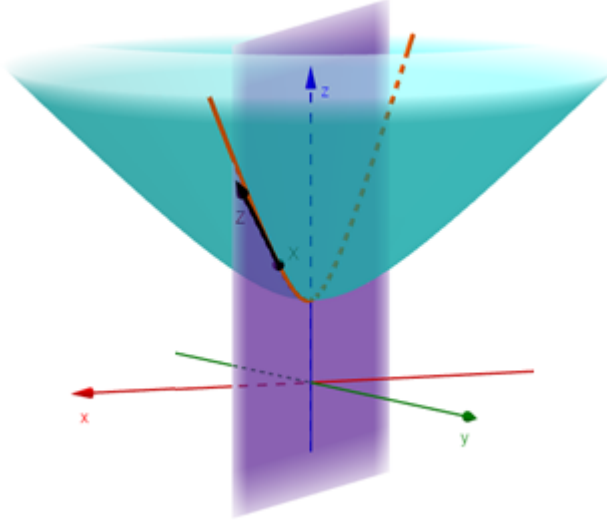


Figura 2.1: Geodésica empezando en x con velocidad z en \mathbb{H}^2 .

$\phi|_{W^\perp} = -id$. Ya que $\phi(x) = x$ y $d_x\phi(z) = z$ se tiene que la geodésica γ es ϕ -invariante por lo que $\gamma \subseteq W \cap \mathbb{H}^{n-1}$. Además la aplicación

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow \cosh(t) \cdot x + \sinh(t) \cdot z$$

proporciona una parametrización de $W \cap \mathbb{H}^{n-1}$, por lo que coincide con γ . \square

Por la definición de la geodésica se tiene que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Además dados $x, y \in \mathbb{H}^{n-1}$ se puede encontrar $z \in T_x\mathbb{H}^{n-1}$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\cosh(t_0) \cdot x + \sinh(t_0) \cdot z = y$

$$z = (\sinh(t_0))^{-1} \left(y - \cosh(t_0) \cdot x \right) = \frac{2}{e^{t_0} - e^{-t_0}} \left(y - \frac{(e^{t_0} + e^{-t_0})x}{2} \right),$$

si $\alpha = \frac{2}{e^{t_0} - e^{-t_0}}$ y $\beta = \frac{(e^{t_0} + e^{-t_0})}{2}$, entonces $z = \alpha y - \alpha\beta x$. La condición $z \in T_x\mathbb{H}^{n-1}$ permite encontrar α y β de la siguiente forma:

$$\langle x, z \rangle_* = \alpha \langle x, y \rangle_* - \alpha\beta \langle x, x \rangle_* = 0,$$

$$\langle x, y \rangle_* = -\beta,$$

cuando $\alpha \neq 0$, es decir, cuando t es finito. Además

$$\begin{aligned} \langle z, z \rangle_* &= \alpha^2 \langle y, y \rangle_* - 2\alpha^2 \beta \langle x, y \rangle_* + \alpha^2 \beta^2 \langle x, x \rangle_* \\ &= -\alpha^2 + 2\alpha^2 \beta^2 - \alpha^2 \beta^2 = -\alpha^2(1 - \beta^2). \end{aligned}$$

Por la relación $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ se tiene que $1 - \beta^2 = -\alpha^{-2}$. Luego

$$-\alpha^2(1 - \beta^2) = (-\alpha^2)(-\alpha^{-2}) = 1,$$

es decir, para $z = \alpha y - \alpha\beta x$ con $\langle x, y \rangle_* = -\beta$ se cumple que $z \in T_x \mathbb{H}^{n-1}$ y $\langle z, z \rangle_* = 1$. Además con el valor de β se obtiene el valor de α mediante la relación $1 - \beta^2 = -\alpha^{-2}$. Entonces dado $x, y \in \mathbb{H}^{n-1}$ se encontró z tal que $z \in T_x \mathbb{H}^{n-1}$ y $\langle z, z \rangle_* = 1$, por lo que existe una geodésica que conecta x con y de la forma $\psi(t) = \cosh(t) \cdot x + \sinh(t) \cdot z$. La ecuación $\langle x, y \rangle_* = -\beta$ permite encontrar el punto t_0 para el cual $\psi(t_0) = y$.

De la anterior aclaración se deduce que cualesquiera dos puntos de \mathbb{H}^{n-1} se pueden conectar mediante una geodésica que además es maximal pues está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto H^{n-1} es una variedad Riemanniana completa.

Finalmente la geodésica que conecta dos puntos de \mathbb{H}^{n-1} es obtenida por la intersección del plano generado por estos dos vectores con \mathbb{H}^{n-1} .

Curvatura

Los resultados que se van a presentar en esta sección fueron obtenidos basados en [Lee01] y [Río02].

Una parametrización para \mathbb{H}^2 viene dada por $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{M}^3$ tal que $\phi(\sigma, \theta) = (\sinh \sigma \cos \theta, \sinh \sigma \sin \theta, \cosh \sigma)$. Esta parametrización nos permite definir una nueva métrica dada por el pullback de $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ bajo ϕ . Se va escribir de manera conveniente la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ para facilitar los cálculos. Se tiene entonces que $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_* = dx^2 + dy^2 - dz^2$ donde dx, dy, dz son covectores duales al sistema de coordenadas estándar (x, y, z) de \mathbb{M}^3 . Además si $u, v \in T_p \mathbb{H}^2$ con $u = (u_x, u_y, u_z), v = (v_x, v_y, v_z)$ entonces

$$\begin{aligned} dx^2(u, v) &= dx \, dx(u, v) = \text{Sym}(dx \otimes dx)(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{\tau \in S_2} dx \otimes dx(\tau u, \tau v) \\ &= \frac{1}{2} \left(dx \otimes dx(u, v) + dx \otimes dx(v, u) \right) = dx \otimes dx(u, v) = u_x v_x, \end{aligned}$$

por lo que:

$$g(u, v) = u_x v_x + u_y v_y - u_z v_z = \langle u, v \rangle_*$$

Aplicando ϕ^*g se obtiene

$$\begin{aligned} \phi^*g &= d(\sinh \sigma \cos \theta)^2 + d(\sinh \sigma \sin \theta)^2 - d(\cosh \sigma)^2 \\ &= (\cosh \sigma \cos \theta d\sigma - \sinh \sigma \sin \theta d\theta)^2 + (\cosh \sigma \sin \theta d\sigma + \sinh \sigma \cos \theta d\theta)^2 + (\sinh \sigma d\sigma)^2 \\ &= (\cosh^2 \sigma \cos^2 \theta + \cosh^2 \sigma \sin^2 \theta - \sinh^2 \sigma) d\sigma^2 + (\sinh^2 \sigma \sin^2 \theta + \sinh^2 \sigma \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ &= d\sigma^2 + \sinh^2 \sigma d\theta^2. \end{aligned}$$

Expresando esta métrica de forma matricial se obtiene:

$$g^* = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sinh^2 \sigma \end{pmatrix}.$$

Sea $\{\partial_\sigma, \partial_\theta\}$ base de $T_p\mathbb{H}^2$ con $\tau, \eta \in T_p\mathbb{H}^2$ tales que $\tau = \tau_\sigma \partial_\sigma + \tau_\theta \partial_\theta$ y $\eta = \eta_\sigma \partial_\sigma + \eta_\theta \partial_\theta$. Entonces

$$\phi^*(g)(\tau, \eta) = \begin{pmatrix} \tau_\sigma \\ \tau_\theta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sinh^2 \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_\sigma \\ \eta_\theta \end{pmatrix},$$

por lo que las componentes de la matriz guardan toda la información de la métrica.

Definición 2.1.5. El haz tangente de \mathbb{H}^2 , denotado $T\mathbb{H}^2$, se define:

$$T\mathbb{H}^2 = \bigsqcup_{p \in \mathbb{H}^2} T_p\mathbb{H}^2.$$

Sea $\pi : T\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ la proyección tal que si $v \in T_p\mathbb{H}^2$ entonces $\pi(v) = p$. Un campo vectorial es una sección de la aplicación π , es decir, una función continua $X : \mathbb{H}^2 \rightarrow T\mathbb{H}^2$ con $p \mapsto X_p$ tal que $\pi \circ X = \text{Id}_{\mathbb{H}^2}$. Esta condición garantiza que $X_p \in T_p\mathbb{H}^2$ para todo $p \in \mathbb{H}^2$.

El conjunto de todos los campos vectoriales de \mathbb{H}^2 se va denotar por $\mathcal{X}(\mathbb{H}^2)$.

Definición 2.1.6. Una conexión afín es un mapa:

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2) \times \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2) &\rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

tal que cumple:

(1) $\nabla_X Y$ es lineal en X sobre $C^\infty(\mathbb{H}^2)$, es decir:

$$\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{H}^2).$$

(2) $\nabla_X Y$ es lineal en Y sobre \mathbb{R} , por lo tanto:

$$\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

(3) Satisface la regla del producto:

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y, \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{H}^2).$$

Llamamos a la conexión libre de torsión si:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

y es compatible con la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ de \mathbb{H}^2 si:

$$X\langle Y, Z \rangle_* = \langle \nabla_X Y, \nabla_X Z \rangle_*.$$

Existe una única conexión afín que es libre de torsión y compatible con la métrica. Esta conexión se llama la conexión de Levi-Civita.

Definición 2.1.7. Sea $\{\partial_{x_i}\}$ base de $T_p\mathbb{H}^2$ asociada a las coordenadas x_i de \mathbb{H}^2 . Se tiene que:

$$\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = \Gamma_{ij}^k \partial_{x_k},$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita y Γ_{ij}^k son los símbolos de Christoffel. Existe una expresión para estos en términos de una carta local y el tensor métrico en el espacio tangente dada de la forma:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} [\partial_{x_i} g_{jm} + \partial_{x_j} g_{mi} - \partial_{x_m} g_{ij}] g^{mk} \quad (2.1.3)$$

donde g_{ij} es la componente i, j de la matriz g^* y g^{ij} es la componente i, j de $(g^*)^{-1}$.

Nota: En las ecuaciones se está utilizando el convenio de suma de Einstein donde se asume una sumatoria sobre los valores de índices repetidos de la ecuación, por ejemplo en la ecuación (2.1.3) se asume una sumatoria sobre los valores que pueda tomar m .

Recordando que $g_{11} = 1, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = \sinh^2 \sigma$ y $g^{11} = 1, g^{12} = g^{21} = 0, g^{22} = (1/\sinh^2 \sigma)$, los símbolos de Christoffel para la conexión de Levi-Civita asociada a g^* vienen dados por:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} [\partial_\sigma g_{11} + \partial_\sigma g_{11} - \partial_\sigma g_{11}] g^{11} + \frac{1}{2} [\partial_\sigma g_{12} + \partial_\sigma g_{21} - \partial_\theta g_{11}] g^{21} = 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} [\partial_\sigma g_{11} + \partial_\sigma g_{11} - \partial_\sigma g_{11}] g^{12} + \frac{1}{2} [\partial_\sigma g_{12} + \partial_\sigma g_{21} - \partial_\theta g_{11}] g^{22} = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} [\partial_\sigma g_{21} + \partial_\theta g_{11} - \partial_\sigma g_{12}] g^{11} + \frac{1}{2} [\partial_\sigma g_{22} + \partial_\theta g_{21} - \partial_\theta g_{11}] g^{21} = 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} [\partial_\sigma g_{21} + \partial_\theta g_{11} - \partial_\sigma g_{12}] g^{12} + \frac{1}{2} [\partial_\sigma g_{22} + \partial_\theta g_{21} - \partial_\theta g_{11}] g^{22} = \coth \sigma, \\ \Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{2} [\partial_\theta g_{11} + \partial_\theta g_{12} - \partial_\sigma g_{21}] g^{11} + \frac{1}{2} [\partial_\theta g_{12} + \partial_\sigma g_{22} - \partial_\theta g_{21}] g^{21} = 0, \\ \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2} [\partial_\theta g_{11} + \partial_\theta g_{12} - \partial_\sigma g_{21}] g^{12} + \frac{1}{2} [\partial_\theta g_{12} + \partial_\sigma g_{22} - \partial_\theta g_{21}] g^{22} = \coth \sigma,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} [\partial_\theta g_{21} + \partial_\theta g_{12} - \partial_\sigma g_{22}] g^{11} + \\ &\quad \frac{1}{2} [\partial_\theta g_{22} + \partial_\theta g_{22} - \partial_\theta g_{22}] g^{21} = -\sinh \sigma \cosh \sigma,\end{aligned}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} [\partial_\theta g_{21} + \partial_\theta g_{12} - \partial_\sigma g_{22}] g^{12} + \frac{1}{2} [\partial_\theta g_{22} + \partial_\theta g_{22} - \partial_\theta g_{22}] g^{22} = 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_\sigma} \partial_\sigma &= 0, \\ \nabla_{\partial_\sigma} \partial_\theta &= \nabla_{\partial_\theta} \partial_\sigma = \coth \sigma \partial_\theta, \\ \nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta &= -\sinh \sigma \cosh \sigma \partial_\sigma.\end{aligned}$$

Definimos un $(0, 4)$ -tensor, llamado tensor de curvatura de Riemann, dado por:

$$Rm(X, Y, Z, T) = \langle R(X, Y)Z, T \rangle_*.$$

donde $R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X, Y]} Z$.

Sean $\partial_\sigma, \partial_\theta \in T_p \mathbb{H}^2$ dos vectores linealmente independientes. La curvatura seccional asociada al plano π generado por ∂_θ y ∂_σ viene dada por:

$$K(\pi) = \frac{Rm(\partial_\sigma, \partial_\theta, \partial_\sigma, \partial_\theta)}{\langle \partial_\sigma, \partial_\sigma \rangle_* \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle_* - \langle \partial_\sigma, \partial_\theta \rangle_*^2}.$$

Ya que el plano π coincide con $T_p \mathbb{H}^2$ y la parametrización de \mathbb{H}^2 permite definir π para cualquier $p \in \mathbb{H}^2$ de la misma manera, pues la parametrización es global, entonces $K(\pi)$ es igual para cualquier p y será la curvatura seccional de \mathbb{H}^2 . Para calcular $K(\pi)$ tenemos:

$$\begin{aligned} R(\partial_\sigma, \partial_\theta) \partial_\sigma &= -\partial_\theta, & Rm(\partial_\sigma, \partial_\theta, \partial_\sigma, \partial_\theta) &= -\sinh^2 \sigma, \\ \langle \partial_\sigma, \partial_\sigma \rangle_* \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle_* - \langle \partial_\sigma, \partial_\theta \rangle_*^2 &= \sinh^2 \sigma. \end{aligned}$$

Por lo que

$$K(\pi) = \frac{Rm(\partial_\sigma, \partial_\theta, \partial_\sigma, \partial_\theta)}{\langle \partial_\sigma, \partial_\sigma \rangle_* \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle_* - \langle \partial_\sigma, \partial_\theta \rangle_*^2} = -1.$$

Entonces la curvatura seccional de \mathbb{H}^2 es igual a -1 . Este razonamiento se puede aplicar para \mathbb{H}^{n-1} y se va obtener que su curvatura seccional es $k = -1$.

Nota: Para $k < 0$ se define la pseudoesfera de radio $\frac{1}{\sqrt{k}}i$ como:

$$\mathbb{H}_k^{n-1} = \{x \in \mathbb{M}^n : \langle x, x \rangle_* = k^{-1}\}.$$

La parametrización de esta difiere de la pseudoesfera de radio unitario en un factor. Realizando los cálculos se puede ver que la métrica de este espacio es k^{-1} veces la métrica g en \mathbb{H}^{n-1} . Una vez se hacen los cambios en el cálculo de la curvatura seccional se obtiene que esta es k .

2.2. Esfera

En la sección anterior se introdujo la pseudoesfera, un espacio de curvatura constante negativa, en esta se van a definir y dar las propiedades de la esfera, espacio con curvatura constante positiva.

Es importante notar la estrecha relación que tienen en su definición, la cual va permitir definir un espacio que capture la información de espacios con curvatura constante.

Modelo

Sea \mathbb{R}^n con el producto interno usual denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se define la esfera $n - 1$ dimensional \mathbb{S}^{n-1} como:

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x \rangle = 1\}. \quad (2.2.1)$$

Es una variedad $(n - 1)$ -dimensional pues si $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\phi(x) = \langle x, x \rangle$ entonces el diferencial $d\phi = (2x_1, \dots, 2x_n)$ es sobreyectivo para todo elemento $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $x \neq 0$. Ya que $0 \notin \phi^{-1}(1)$, se tiene que 1 es valor regular de ϕ por lo que $\mathbb{S}^{n-1} = \phi^{-1}(1)$ es una subvariedad de dimensión $n - 1$.

La subvariedad (2.2.1) va ser llamada esfera. Es una variedad Riemanniana con la métrica inducida por el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbb{R}^n .

Isometrías

Las definiciones y resultados sobre isometrías de la pseudoesfera son ciertas para un espacio vectorial de dimensión finita con forma bilineal no degenerada. Por lo tanto de manera análoga se tiene para \mathbb{S}^{n-1} con $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\begin{aligned} \text{O}(\mathbb{R}^n) &= \{B \in \text{GL}(\mathbb{R}^n) : \langle Bx, By \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^n\} \\ \text{O}(\mathbb{S}^{n-1}) &= \{A \in \text{O}(\mathbb{R}^n) : A(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{S}^{n-1}\} \end{aligned}$$

Proposición 2.2.1. $\text{O}(\mathbb{S}^{n-1})$ es generado por reflexiones.

Un difeomorfismo $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ es isométrico si para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ se tiene que $\langle df_x(v), df_x(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ con $v, w \in T_x\mathbb{S}^{n-1}$. El conjunto de todos los difeomorfismos isométricos de \mathbb{S}^{n-1} se va denotar por $\mathcal{I}(\mathbb{S}^{n-1})$.

Teorema 2.2.1. $\mathcal{I}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \text{O}(\mathbb{S}^{n-1})$

Geodésicas

De manera análoga se puede demostrar en \mathbb{S}^{n-1} que :

Teorema 2.2.2. Sean $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, $z \in T_x\mathbb{S}^{n-1}$ con $\langle z, z \rangle = 1$. La geodésica que sale de x con velocidad z viene dada por:

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow \cos(t) \cdot x + \sin(t) \cdot z.$$

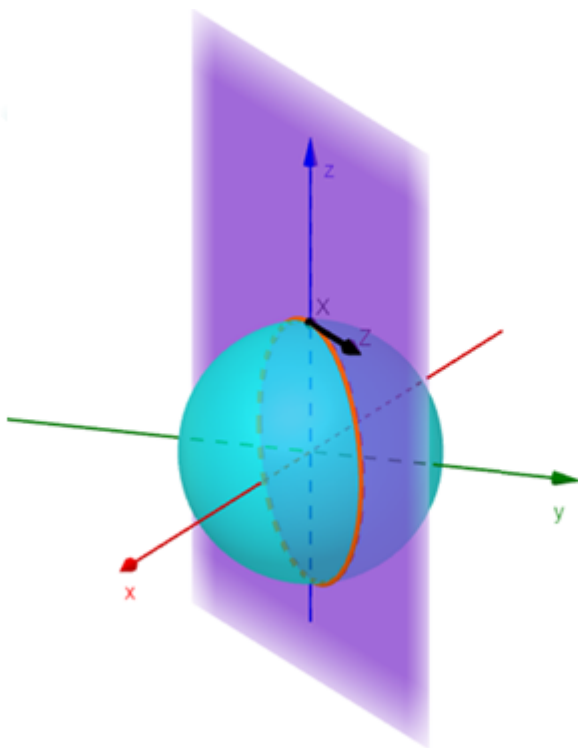


Figura 2.2: Geodésica empezando en x con velocidad z en \mathbb{S}^2 .

Como conjunto viene dada por la intersección de \mathbb{S}^{n-1} y el subespacio lineal generado por x, z en \mathbb{R}^n .

Por la definición de la geodésica se tiene que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Además dados $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ se puede encontrar $z \in T_x \mathbb{S}^{n-1}$ con $\langle z, z \rangle = 1$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(t_0) \cdot x + \sin(t_0) \cdot z = y$. Este resultado se obtiene de manera análoga al resultado de la sección de geodésicas de la pseudoesfera. Por lo tanto \mathbb{S}^{n-1} es una variedad Riemanniana completa. Finalmente la geodésica que conecta dos puntos de \mathbb{S}^{n-1} es el plano generado por estos dos vectores intersectado con \mathbb{S}^{n-1} .

Curvatura

Una parametrización para \mathbb{S}^2 viene dada por $\phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\phi(\sigma, \theta) = (\sin \sigma \cos \theta, \sin \sigma \sin \theta, \cos \sigma)$. La métrica dada por el pullback de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bajo ϕ es :

$$\phi^*g = \sin^2 \theta d\sigma^2 + d\theta^2.$$

Expresando esta métrica de forma matricial se obtiene:

$$g^* = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los símbolos de Christoffel para la conexión de Levi-Civita asociada a $\phi^*(g) = g^*$ vienen dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{12}^1 &= \cot \theta, & \Gamma_{12}^2 &= 0, \\ \Gamma_{21}^1 &= \cot \theta, & \Gamma_{21}^2 &= 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\sigma} \partial_\sigma &= -\sin \theta \cos \theta \partial_\theta, \\ \nabla_{\partial_\sigma} \partial_\theta &= \nabla_{\partial_\theta} \partial_\sigma = \cot \theta \partial_\sigma, \\ \nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta &= 0. \end{aligned}$$

Dados $\partial_\sigma, \partial_\theta \in T_p \mathbb{S}^2$ dos vectores linealmente independientes. La curvatura seccional asociada al plano π generado por ∂_θ y ∂_σ viene dada por:

$$K(\pi) = \frac{Rm(\partial_\sigma, \partial_\theta, \partial_\sigma, \partial_\theta)}{\langle \partial_\sigma, \partial_\sigma \rangle \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle - \langle \partial_\sigma, \partial_\theta \rangle^2}.$$

Ya que el plano π coincide con $T_p \mathbb{S}^2$ y la parametrización de \mathbb{S}^2 permite definir π para cualquier $p \in \mathbb{S}^2$ entonces $K(\pi)$ es igual para cualquier p , por lo que la curvatura es constante. Para calcular $K(\pi)$ tenemos:

$$\begin{aligned} R(\partial_\sigma, \partial_\theta) \partial_\sigma &= \sin^2 \theta \partial_\theta, & Rm(\partial_\sigma, \partial_\theta, \partial_\sigma, \partial_\theta) &= \sin^2 \theta, \\ \langle \partial_\sigma, \partial_\sigma \rangle_* \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle_* - \langle \partial_\sigma, \partial_\theta \rangle_*^2 &= \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Por lo que

$$K(\pi) = \frac{Rm(\partial_\sigma, \partial_\theta, \partial_\sigma, \partial_\theta)}{\langle \partial_\sigma, \partial_\sigma \rangle_* \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle_* - \langle \partial_\sigma, \partial_\theta \rangle_*^2} = 1.$$

Entonces la curvatura seccional de \mathbb{S}^2 es igual a 1. Este razonamiento se puede aplicar para \mathbb{S}^{n-1} y se va obtener que su curvatura seccional es 1.

Nota: Para $k > 0$ se define la esfera de radio $\frac{1}{\sqrt{k}}$ como:

$$\mathbb{S}_k^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x \rangle = k^{-1}\}$$

la parametrización de esta difiere de la esfera de radio unitario en un factor. Realizando los cálculos se puede ver que la métrica de este espacio es k^{-1} veces la métrica g en \mathbb{S}^{n-1} . Una vez se hacen los cambios en el cálculo de la curvatura seccional se obtiene que esta es k .

2.3. Unificación de espacios

La unificación de los espacios y el uso de una k -trigonometría en estos son ideas que se encuentran en [Dia12].

El espacio donde el movimiento de los cuerpos se da es:

$$\mathbb{M}_k^3 = \{(w, x, y, z) : w^2 + x^2 + y^2 + \sigma z^2 = k^{-1}, \text{ con } z > 0 \text{ si } k < 0\},$$

donde σ es la función signo

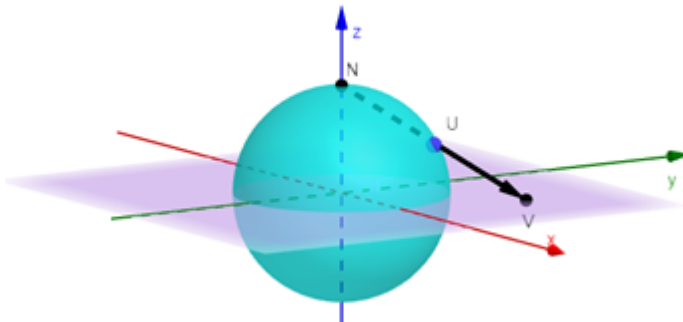
$$\sigma = \begin{cases} 1, & \text{si } k > 0, \\ -1, & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Notemos que esta definición permite escribir:

$$\mathbb{M}_1^3 = \mathbb{S}^3 \quad \text{y} \quad \mathbb{M}_{-1}^3 = \mathbb{H}^3.$$

El producto interno de $a = (a_w, a_x, a_y, a_z)$ con $b = (b_w, b_x, b_y, b_z)$ en este espacio viene dado por

$$\langle a, b \rangle = a_w b_w + a_x b_x + a_y b_y + \sigma a_z b_z,$$

Figura 2.3: Proyección estereográfica en \mathbb{S}^2 .

y lo vamos a denotar por $a \odot b$.

La distancia entre a y b viene dada por la longitud de la geodésica que conecta estos puntos. En el caso de la esfera viene dada por:

$$d(a, b)_{\mathbb{S}_k^3} = k^{-1/2} \cos^{-1}(k\langle a, b \rangle),$$

de manera análoga en la pseudoesfera

$$d(a, b)_{\mathbb{H}_k^3} = (-k)^{-1/2} \cosh^{-1}(k\langle a, b \rangle_*).$$

Así, la función distancia en \mathbb{M}_k^3 viene dada por:

$$d_k(a, b) = \begin{cases} k^{-1/2} \cos^{-1}(k\langle a, b \rangle), & \text{si } k > 0, \\ |a - b|, & \text{si } k = 0, \\ (-k)^{-1/2} \cosh^{-1}(k\langle a, b \rangle_*), & \text{si } k < 0. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Para ver que las métricas en \mathbb{S}_k^3 y \mathbb{H}_k^3 tienden a la métrica euclídea en \mathbb{R}^3 cuando $k \rightarrow 0$ se va a utilizar la proyección estereográfica. Considerar $(w, x, y, z) \in \mathbb{M}_k^3$, R el radio de la esfera y la aplicación (W, X, Y) al hiperplano 3-dimensional $z = 0$ dado por las transformaciones de coordenadas biyectivas

$$W = \frac{Rw}{R - \sigma z}, \quad X = \frac{Rx}{R - \sigma z}, \quad Y = \frac{Ry}{R - \sigma z},$$

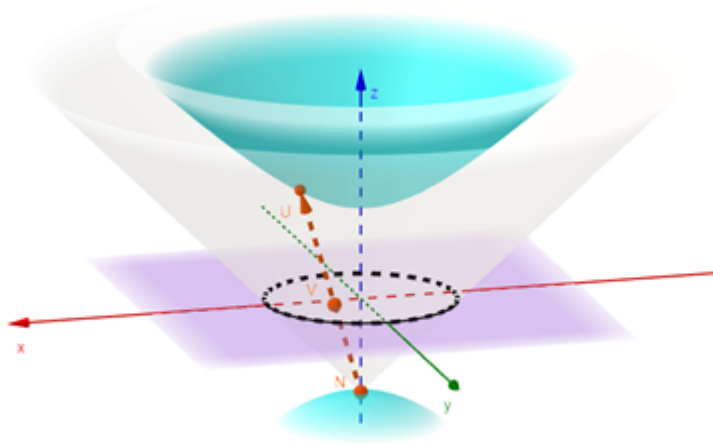


Figura 2.4: Proyección estereográfica en \mathbb{H}^2 .

con inversas

$$w = \frac{2R^2W}{R^2 + \sigma W^2 + \sigma X^2 + \sigma Y^2}, \quad x = \frac{2R^2X}{R^2 + \sigma W^2 + \sigma X^2 + \sigma Y^2}$$

$$y = \frac{2R^2Y}{R^2 + \sigma W^2 + \sigma X^2 + \sigma Y^2}, \quad z = \frac{R(W^2 + X^2 + Y^2 - \sigma R^2)}{R^2 + \sigma W^2 + \sigma X^2 + \sigma Y^2}.$$

En el caso $k > 0$ estas transformaciones son la proyección estereográfica usual por lo que se tiene que la imagen de (W, X, Y) es \mathbb{R}^3 y en el caso $k < 0$ se tiene \mathbb{D}^2 con radio $k^{-1/2} = R$.

La métrica en \mathbb{M}_k^3 viene dada por:

$$ds^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + \sigma dz^2.$$

Tomando el pullback de esta métrica bajo la proyección estereográfica se tiene que

$$ds^2 = \frac{4R^4(dW^2 + dX^2 + dY^2)}{(R^2 + \sigma W^2 + \sigma X^2 + \sigma Y^2)^2}.$$

Ahora dividiendo el numerador y denominador por R^4 y tomando límite cuando $R \rightarrow \infty$ se obtiene:

$$ds^2 = 4(dW^2 + dX^2 + dY^2).$$

Además cuando $k \rightarrow 0$ se tiene que $R \rightarrow \infty$ por lo que la distancia (2,3,1) es continua con respecto a la variable k .

Ya que vamos a aplicar métodos variacionales se necesita que estas distancias estén definidas en el espacio ambiente por lo que se redefine la función distancia como:

$$\bar{d}_k(a, b) = \begin{cases} k^{-1/2} \cos^{-1} \left(\frac{k\langle a, b \rangle}{\sqrt{k\langle a, a \rangle} \sqrt{k\langle b, b \rangle}} \right), & \text{si } k > 0, \\ |a - b|, & \text{si } k = 0, \\ (-k)^{-1/2} \cosh^{-1} \left(\frac{k\langle a, b \rangle_*}{\sqrt{k\langle a, a \rangle_*} \sqrt{k\langle b, b \rangle_*}} \right), & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Notemos que en \mathbb{S}_k^3

$$\sqrt{k\langle a, a \rangle} = \sqrt{k\langle b, b \rangle} = 1,$$

además en \mathbb{H}_k^3

$$\sqrt{k\langle a, a \rangle_*} = \sqrt{k\langle b, b \rangle_*} = 1.$$

Lo que esto dice es que $\bar{d}_k = d_k$ en \mathbb{M}_k^3 .

2.4. k -trigonometría

Se quiere unificar la trigonometría circular e hiperbólica por lo que se va a introducir la k -trigonometría con el objetivo de poder escribir estas funciones trigonométricas en función de la curvatura del espacio. Para ello el k -seno se define como:

$$\sin_k(x) := \begin{cases} k^{-1/2} \sin(k^{1/2}x), & \text{si } k > 0, \\ x, & \text{si } k = 0, \\ (-k)^{-1/2} \sinh((-k)^{1/2}x), & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Y el k -coseno se define como:

$$\cos_k(x) := \begin{cases} \cos(k^{1/2}x), & \text{si } k > 0, \\ 1, & \text{si } k = 0, \\ \cosh((-k)^{1/2}x), & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Así, la k -tangente y k -cotangente vienen dadas por:

$$\tan_k(x) := \frac{\sin_k(x)}{\cos_k(x)} \quad y \quad \cot_k(x) := \frac{\cos_k(x)}{\sin_k(x)},$$

respectivamente. La k -trigonometría se puede definir a partir de estas k -funciones trigonométricas. Sin embargo, solo se va a utilizar la siguiente relación:

$$k \sin_k^2(x) + \cos_k^2(x) = 1$$

Estas relaciones nos permiten definir la función distancia en \mathbb{M}_k^3 de la forma:

$$\overline{d}_k(a, b) = \cos_k^{-1} \left(\frac{ka \odot b}{\sqrt{|a \odot a|} \sqrt{|b \odot b|}} \right) \quad (2.4.1)$$

para todo $a, b \in \mathbb{M}_k^3$ y $k \neq 0$.

Capítulo 3

Lagrangiano en $(\mathbb{S}^3)^n$ y $(\mathbb{H}^3)^n$

Este capítulo sigue la deducción de las ecuaciones de movimiento expuesta en [Dia12].

En el primer capítulo se habló de las ecuaciones de movimiento del problema de los n -cuerpos en el caso plano, es decir, en \mathbb{R}^{3n} . Estas ecuaciones son consecuencia de las ecuaciones de Euler–Lagrange aplicadas al Lagrangiano asociado a este problema.

En esta sección vamos a hacer la deducción de las ecuaciones de movimiento en espacios con curvatura constante a partir de un nuevo Lagrangiano, el cual nos va a permitir dar el análogo de (1.0.1) en $(\mathbb{M}_k^3)^n$, el nuevo espacio de configuración. Ya que nuestro nuevo espacio de configuración es la esfera o pseudoesfera de radio k , entonces va a ser una variedad diferenciable.

3.1. Potencial curvo

El Lagrangiano está definido en términos de la energía potencial y cinética. Vamos a definir U_k como el potencial curvo. La condición principal de este potencial es que sea el potencial definido en \mathbb{R}^{3n} cuando $k = 0$. Definimos entonces U_k como:

$$U_k(\mathbf{q}) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n m_i m_j \cot_k(d_k(q^i, q^j)) \quad (3.1.1)$$

con $\cot_0(d_0(q^i, q^j)) = |q^i - q^j|^{-1}$. Además $U_k \rightarrow U_0 = U$ cuando $k \rightarrow 0$ por la continuidad de las funciones k -trigonométricas y de d_k con respecto a la variable k .

Para $k \neq 0$ se puede obtener la siguiente expresión utilizando la relación k -trigonométrica $k \sin_k^2(x) + \cos_k^2(x) = 1$:

$$U_k(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (\sigma k)^{1/2} \frac{kq^i \odot q^j}{\sqrt{kq^i \odot q^i} \sqrt{kq^j \odot q^j}}}{\sqrt{\sigma - \sigma \left(\frac{kq^i \odot q^j}{\sqrt{kq^i \odot q^i} \sqrt{kq^j \odot q^j}} \right)}},$$

que es equivalente a la expresión

$$U_k(\mathbf{q}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j |k|^{1/2} kq^i \odot q^j}{[\sigma(kq^i \odot q^i)(kq^j \odot q^j) - \sigma(kq^i \odot q^j)^2]^{1/2}},$$

donde $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ con $q^i \in \mathbb{M}_k^3$ para $i = \overline{1, n}$.

Definición 3.1.1. Una función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ se llama homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}$, si para todo $\eta \neq 0$ y $q \in \mathbb{R}^m$ se tiene que:

$$f(\eta q) = \eta^\alpha f(q).$$

Teorema 3.1.1. Toda función homogénea de grado α cumple:

$$q \cdot \nabla f(q) = \alpha f(q).$$

Notemos que el potencial curvo es una función homogénea de grado 0 para $k \neq 0$ y de grado -1 para $k = 0$.

Por lo tanto para $k \neq 0$ y $q \in \mathbb{M}_k^{3n}$ se tiene:

$$q \odot \nabla U_k(q) = 0,$$

lo cual es equivalente a:

$$q_i \odot \nabla_{q_i} U_k(q) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.1.2)$$

Por el abuso de notación con ∇ , es conveniente recordar que este diferencial es para funciones definidas en $(\mathbb{M}_k^3)^n$, por lo tanto para $q_i = (x_i, y_i, z_i, w_i)$ se tiene que $\nabla_{q_i} = (\partial_{x_i}, \partial_{y_i}, \partial_{z_i}, \sigma \partial_{w_i})$.

3.2. Dinámica Lagrangiana con restricciones

Definición 3.2.1. Sea $L = T - V$ el Lagrangiano de un sistema de n partículas cuyos movimientos están restringidos a una variedad, con T la energía cinética del sistema y V su energía potencial. Si las posiciones y velocidades de las partículas vienen dadas por q_i, \dot{q}_i y sus restricciones de movimiento por las ecuaciones $f^i = 0$ para $i = \overline{1, n}$, respectivamente. Entonces el movimiento del sistema está descrito por las ecuaciones de Euler–Lagrange con restricciones

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} - \lambda^i(t) \frac{\partial f^i}{\partial q^i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.2.1)$$

con λ^i llamados multiplicadores de Lagrange y la distancia definida en todo el espacio ambiente.

3.2.1. Deducción de las ecuaciones de movimiento

Para nuestros propósitos $V = -U_k$ con U_k definida de la forma (3.1.1). La energía cinética viene dada por:

$$T_k(q, \dot{q}) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{q}^i \odot \dot{q}^i) (k q^i \odot q^i).$$

Por lo tanto el Lagrangiano es de la forma:

$$L_k(q, \dot{q}) = T_k(q, \dot{q}) + U_k(q).$$

Ya que cada $q^i \in \mathbb{M}_k^3$ entonces $q^i \odot q^i = k^{-1}$ por lo que $f_k^i = q^i \odot q^i - k^{-1}$. Además como $q^i \odot q^i = k^{-1}$ entonces $\dot{q}^i \odot q^i = 0$ y

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_k}{\partial \dot{q}^i} \right) = m_i \ddot{q}^i (k q^i \odot q^i) + 2m_i (k \dot{q}^i \odot q^i) = m_i \ddot{q}^i, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\frac{\partial L_k}{\partial q^i} = m_i k (\dot{q}^i \odot \dot{q}^i) q^i + \nabla_{q^i} U_k(q), \quad i = \overline{1, n}.$$

Por lo tanto la ecuación de Euler–Lagrange (3.2.1) para L_k :

$$m_i \ddot{q}^i - m_i k (\dot{q}^i \odot \dot{q}^i) q^i - \nabla_{q^i} U_k(q) - 2\lambda_k^i(t) q^i = 0. \quad (3.2.2)$$

Para determinar $\lambda_k^i(t)$ notemos que $2\dot{q}^i \odot \dot{q}^i + 2q^i \odot \ddot{q}^i = \ddot{f}_k^i = 0$ por lo que

$$\dot{q}^i \odot \dot{q}^i = -q^i \odot \ddot{q}^i. \quad (3.2.3)$$

Aplicando $\odot q^i$ a (3.2.2) se obtiene

$$m_i(\ddot{q}^i \odot q^i) - m_i k(\dot{q}^i \odot \dot{q}^i)(q^i \odot q^i) - \nabla_{q^i} U_k(q) \odot q^i - 2\lambda_k^i(t)(q^i \odot q^i) = 0,$$

por (3.1.2) y ya que $q^i \odot q^i = k^{-1}$ se tiene que

$$m_i(\ddot{q}^i \odot q^i) - m_i(\dot{q}^i \odot \dot{q}^i) = 2k^{-1}\lambda_k^i(t).$$

Finalmente por la aclaración (3.2.3)

$$\lambda_k^i(t) = -km_i(\dot{q}^i \odot \dot{q}^i),$$

y sustituyendo $\lambda_k^i(t)$ en la ecuación (3.2.2) se obtiene:

$$m_i \ddot{q}^i = \nabla_{q^i} U_k(q) - m_i k(\dot{q}^i \odot \dot{q}^i) q^i, \quad (3.2.4)$$

con:

$$\nabla_{q^i} U_k(q) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j |k|^{3/2} [q^j - (kq^i \odot q^j)q^i]}{[\sigma - \sigma(kq^i \odot q^j)]^{3/2}}. \quad (3.2.5)$$

Las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.5) describen el problema de los n -cuerpos en espacios con curvatura constante para $k \neq 0$.

En la sección (1,3) se mostró que el Lagrangiano es constante a lo largo del tiempo. Notemos que esto es posible gracias a que, en el caso plano, se tiene que $m_i \dot{q}^i = -\nabla_{q^i} U$. Sin embargo, para el caso curvo se tiene la ecuación (3.2.4) por lo que el Lagrangiano ya no será independiente del tiempo.

3.3. Independencia de la curvatura

Las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.5) dependen de k . Para ver que estas son independientes de este parámetro tomemos los cambios de variable $\tau = |k|^{3/4}t$ y $q^i = |k|^{-1/2}r^i$. Además por notación $\frac{d}{d\tau}r^i = r^{i'}$. Se tiene entonces

que:

$$\begin{aligned}\nabla_{q^i} U_k(q) &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j |k|^{3/2} [q^j - (kq^i \odot q^j)q^i]}{[\sigma - \sigma(kq^i \odot q^j)]^{3/2}} \\ &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j |k| [r^j - (r^i \odot r^j)r^i]}{[\sigma - \sigma(r^i \odot r^j)]^{3/2}},\end{aligned}$$

$$m_i \ddot{q}^i = |k| m_i r^{i''},$$

$$m_i k (\dot{q}^i \odot \dot{q}^i) q^i = k m_i (r^{i'} \odot r^{i'}) r^i.$$

Por lo tanto las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.5) son equivalentes a:

$$\begin{aligned}|k| m_i r^{i''} &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j |k| [r^j - \sigma(r^i \odot r^j)r^i]}{[\sigma - \sigma(r^i \odot r^j)]^{3/2}} - k m_i (r^{i'} \odot r^{i'}) r^i, \\ m_i r^{i''} &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j [r^j - \sigma(r^i \odot r^j)r^i]}{[\sigma - \sigma(r^i \odot r^j)]^{3/2}} - \sigma m_i (r^{i'} \odot r^{i'}) r^i.\end{aligned}\quad (3.3.1)$$

Notemos que $r^i \odot r^i = |k| q^i \odot q^i = \sigma$ por lo que $r^i \in \mathbb{H}^{n-1}$ cuando $k < 0$ y $r^i \in \mathbb{S}^{n-1}$ cuando $k > 0$.

Se tiene entonces que nuestras ecuaciones de movimiento son independientes de k por lo que basta con tomar la esfera y pseudoesfera unitarias para estudiar el comportamiento de los cuerpos en cualquier espacio de curvatura constante.

Capítulo 4

Geometría Simpléctica

La métrica Riemanniana g es un campo tensorial covariante simétrico definido en la variedad. Las formas diferenciales son campos tensoriales covariantes alternantes. Estas nos permiten definir y estudiar algunas propiedades de las variedades simplécticas.

4.1. Preliminares

Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$. Una curva suave $\gamma : J \rightarrow M$ se llama curva integral de V si

$$V_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t),$$

para todo $t \in J$. En un sistema de cartas locales $(\mathcal{U}, x^1, \dots, x^n)$ podemos escribir $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$. Por lo tanto encontrar una curva integral a un campo vectorial queda descrito en coordenadas locales de la forma

$$\dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)} = V^i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)},$$

es decir, para encontrar una curva integral se debe resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^1(t) &= V^1(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)), \\ &\vdots \\ \dot{\gamma}^n(t) &= V^n(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)). \end{aligned}$$

Por la existencia y unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ es una curva integral de V con $\gamma(0) = p$.

Lema 4.1.1. *Sea V un campo vectorial en una variedad M , $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $\gamma : J \rightarrow M$ curva integral de V . Para todo $b \in \mathbb{R}$, la curva $\hat{\gamma} : \hat{J} \rightarrow M$ definida $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t+b)$ es una curva integral de V con $\hat{J} = \{t : t+b \in J\}$.*

Demostración. Sea $f \in C^\infty(M)$ función suave definida en una vecindad de $\hat{\gamma}(t_0)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}'(t_0)f &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \hat{\gamma})(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \gamma)(t+b) \\ &= (f \circ \gamma)'(t_0+b) = \gamma'(t_0+b)f = V_{\hat{\gamma}(t_0)}f. \end{aligned}$$

□

Supongamos que las curvas integrales de V están definidas en todo \mathbb{R} . Para cada $p \in M$ existe una única curva integral que pasa por este punto denotada por $\theta^{(p)} : \mathbb{R} \rightarrow M$. Sea $t \in \mathbb{R}$, se define la función $\theta_t : M \rightarrow M$ tal que $\theta_t(p) = q$, donde q es obtenido luego de recorrer la curva integral iniciando en p un tiempo t , es decir:

$$\theta_t(p) = \theta^{(p)}(t).$$

Por el anterior lema se tiene que

$$\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_{t+s}(p).$$

Además, por definición

$$\theta_0(p) = p,$$

por lo que el mapa $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ define una acción a izquierda del grupo aditivo \mathbb{R} en M . Este mapa lo vamos a llamar el flujo global de V en M . Para todo $p \in M$ se define $V_p \in T_p M$ como

$$V_p = \theta^{(p)'}(0).$$

La asignación $p \mapsto V_p$ se llama generador infinitesimal de θ .

Sea $f \in C^\infty(M)$, tenemos

$$Vf(p) = V_p f = \theta^{(p)'}(0)f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\theta^{(p)}(t)) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{(0,p)} f(\theta(t, p)).$$

Ya que $f(\theta(t, p))$ es composición de funciones suaves se tiene que $Vf(p)$ es suave. Como función de p también lo es por lo que V es suave.

Para $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario y $q = \theta^{(p)}(t_0)$ se tiene

$$\theta^{(q)}(t) = \theta_t(q) = \theta_t(\theta_{t_0}(p)) = \theta_{t+t_0}(p) = \theta^{(p)}(t + t_0),$$

por lo que

$$V_q f = \theta^{(q)'}(0)f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\theta^{(q)}(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\theta^{(p)}(t + t_0)) = \theta^{(p)'}(t_0)f.$$

Por lo tanto V , el generador infinitesimal de θ , es un campo vectorial suave y sus curvas integrales son las funciones $\theta^{(p)} : \mathbb{R} \rightarrow M$ para todo $p \in M$.

Sea $\omega \in \Omega^k(M)$, $V \in \mathfrak{X}(M)$ y θ el flujo de V . Ya que $\theta_t : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo entre una vecindad de p y $\theta_t(p)$ entonces el pullback θ_t^* mapea k -formas en $\theta_t(p)$ a k -formas en p . Por lo tanto

$$\theta_t^*(\omega_{\theta_t(p)}) - \omega_p$$

está bien definido y es una k -forma en p .

Definición 4.1.1. La derivada de Lie de una k -forma en la dirección de un campo vectorial V es

$$(\mathcal{L}_V \omega)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\theta_t^* \omega)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\theta_t^*(\omega_{\theta_t(p)}) - \omega_p}{t}.$$

Se tiene que $F^*(\omega \wedge \eta) = F^* \omega \wedge F^* \eta$. Por lo tanto

$$\mathcal{L}_V(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_V \omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathcal{L}_V \eta).$$

Sea f una 0-forma, es decir, una función suave en M . Por definición

$$\theta_t^* f(p) = f(\theta_t(p)) = f \circ \theta^{(p)}(t),$$

por lo tanto

$$(\mathcal{L}_V f)(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \theta^{(p)} = df_p(\theta^{(p)'}(0)) = df_p(V_p) = Vf(p).$$

Teorema 4.1.1. Fórmula mágica de Cartan: En una variedad M , para cualquier k -forma diferencial ω y cualquier campo vectorial V ,

$$\mathcal{L}_V\omega = \iota_V(d\omega) + d(\iota_V\omega) \quad (4.1.1)$$

Para mas información sobre los flujos asociados a un campo vectorial ver [Lee01].

4.2. Variedades simplécticas

Un 2-covector ω en un espacio vectorial V de dimensión finita se llama no degenerado si el mapa $\hat{\omega} : V \rightarrow V^*$ definido $\hat{\omega}(v) = \iota_v\omega$ es invertible. Esta condición es equivalente a que para cada $0 \neq v \in V$ existe un $w \in V$ tal que $\omega(v, w) \neq 0$.

Un 2-covector no degenerado se llama tensor simpléctico, además (V, ω) se llama espacio vectorial simpléctico.

Ejemplo 4.2.1. Sea V un espacio $2n$ dimensional con base $(A_1, B_1, \dots, A_n, B_n)$ y correspondiente base $(\alpha^1, \beta^1, \dots, \alpha^n, \beta^n)$ del espacio dual V^* . Para $\omega \in \Lambda^2(V^*)$ definida

$$\omega = \sum_{i=1}^n \alpha^i \wedge \beta^i, \quad (4.2.1)$$

se tiene que actúa en la base de la forma:

$$\omega(A_i, A_j) = \omega(B_i, B_j) = 0 \quad \omega(A_i, B_j) = -\omega(B_j, A_i) = \delta_i^j. \quad (4.2.2)$$

Para $v = a^i A_i + b^i B_i$, si $\omega(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ entonces

$$\begin{aligned} \omega(v, B_i) &= a^i = 0, \\ \omega(v, A_i) &= -b^i = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $v = 0$, es decir, ω es un tensor simpléctico.

Dado un subespacio $S \subseteq V$ se define el complemento simpléctico de S como

$$S^\perp = \{v \in V : \omega(v, w) = 0, \forall w \in S\}.$$

Lema 4.2.1. *Sea (V, ω) un espacio vectorial simpléctico. Para cualquier subespacio $S \subseteq V$ se tiene $\dim S + \dim S^\perp = \dim V$.*

Demostración. Sea $S \subseteq V$ subespacio. Definimos $\Phi : V \rightarrow S^*$ como $\Phi(v) = (\iota_v \omega)|_S$.

Para $\psi \in S^*$ arbitrario, sea $\hat{\psi}$ una extensión de ψ a V^* . Ya que $\hat{\omega}$ es un isomorfismo, existe $v \in V$ tal que $\iota_v \omega = \hat{\psi}$. Por lo tanto $\Phi(v) = \psi$, es decir, Φ es sobreyectivo. Además $\text{Ker}(\Phi) = S^\perp$ por lo que

$$\dim(V) = \dim(\text{Im}(\Phi)) + \dim(\text{Ker}(\Phi)) = \dim(S^*) + \dim(S^\perp).$$

Ya que $\dim S^* = \dim S$ se cumple $\dim S + \dim S^\perp = \dim V$. \square

Para un subespacio 1-dimensional S se tiene que $\omega(v, v) = 0$ para todo elemento de S , por lo tanto $S \subseteq S^\perp$. Esto sugiere que la condición de ser no degenerado permite una nueva clasificación del complemento ortogonal de un subespacio $S \subseteq V$:

- **simpléctico** si $S \cap S^\perp = \{0\}$;
- **isotrópico** si $S \subseteq S^\perp$;
- **coisotrópico** si $S^\perp \subseteq S$;
- **lagrangiano** si $S = S^\perp$.

De la definición es claro que S es simpléctico si y solo si S^\perp lo es. Además si S es simpléctico, $u \in S$ y $\omega(u, u) = 0$ entonces $u = 0$. Por lo tanto $\omega|_S$ es no degenerado.

Proposición 4.2.1. *Sea ω un tensor simpléctico en un espacio vectorial m -dimensional V . Entonces V es de dimensión par y existe una base tal que se cumple (4.2.1) y (4.2.2).*

Demostración. La prueba se realiza por inducción sobre m . Para $m = 0$ no hay nada que probar.

Sea (V, ω) un espacio vectorial simpléctico de dimensión $m \geq 1$ y supongamos que la proposición es cierta para espacios vectoriales simplécticos de dimensión menor que m .

Sea $0 \neq A_1$ un vector de V . Ya que ω es no degenerada existe B_1 vector en V tal que $\omega(A_1, B_1) \neq 0$. Se puede suponer que $\omega(A_1, B_1) = 1$. Ya que la 2-forma es alternante se tiene que B_1 no puede ser múltiplo de A_1 por lo que el conjunto $\{A_1, B_1\}$ es linealmente independiente y $\dim V \geq 2$.

Sea S el conjunto generado por A_1, B_1 . Por el anterior lema se tiene que $\dim S^\perp = m - 2$, además ya que $\omega|_S$ es no degenerada entonces S es simpléctico, por lo que S^\perp es simpléctico. Utilizando la hipótesis de inducción se tiene que existe una base $(A_2, B_2, \dots, A_n, B_n)$ de S^\perp tal que se cumple (4.2.1) y (4.2.2). Tomando la base $(A_1, B_1, \dots, A_n, B_n)$ de V se cumplen las hipótesis. \square

Una k -forma ω es exacta si existe una $(k - 1)$ -forma η tal que $d\eta = \omega$, además ω es cerrada si $d\omega = 0$. Ya que $d \circ d = 0$ se tiene que toda forma exacta es cerrada.

Una 2-forma no degenerada en una variedad M es una 2-forma ω tal que ω_p es un 2-covector no degenerado para todo $p \in M$.

Una forma simpléctica es una 2-forma no degenerada que es cerrada.

Definición 4.2.1. Sea M una variedad y ω una forma simpléctica, llamamos a (M, ω) una variedad simpléctica.

Por la anterior proposición se tiene que toda variedad simpléctica tiene dimensión par.

Definición 4.2.2. Sean (M_1, ω_1) y (M_2, ω_2) variedades simplécticas. Un difeomorfismo $F : M_1 \rightarrow M_2$ se llama simplectomorfismo si $F^*\omega_2 = \omega_1$.

Ejemplo 4.2.2. \mathbb{R}^{2n} con las coordenadas estándar $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ es una variedad simpléctica con la forma simpléctica

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i.$$

Un elemento en T^*M tiene la forma (q, ϕ) con $\phi \in T_q^*M$. Ya que ϕ es una 1-forma evaluada en el punto q , entonces el pullback bajo π es una 1-forma evaluada en el punto (q, ϕ) .

Definimos $\tau \in \Omega^1(T^*M)$ como:

$$\tau = \pi^*\phi,$$

llamada 1-forma tautológica. Para $\nu \in T_{(q,\phi)}(T^*M)$ tenemos que

$$\tau_{(q,\phi)}(\nu) = \phi(d\pi_{(q,\phi)}(\nu)).$$

Proposición 4.2.2. *Sea M una variedad. La 1-forma tautológica τ es suave y $\omega = -d\tau$ es una forma simpléctica en T^*M .*

Demostración. Las coordenadas naturales de $(q, \phi) \in T^*M$ son de la forma $(x^1, \dots, x^n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ con x^i la representación en coordenadas de q y $\phi = \sum_{i=1}^n \xi_i dx^i$. Ya que $\pi(x, \xi) = x$ entonces $\pi^*(dx^j) = dx^j$, por lo tanto

$$\tau_{(x,\xi)}(\xi_i dx^j) = \xi_i dx^j.$$

Entonces τ es suave, pues en sus coordenadas las componentes son lineales. Sea $\omega = -d\tau \in \Omega^2(T^*M)$, ya que $d\omega = -d(d\tau) = 0$ entonces es una 2-forma cerrada. Además en coordenadas naturales se tiene que

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge d\xi_i.$$

Por la identificación de un abierto de T^*M con un abierto de \mathbb{R}^{2n} bajo las coordenadas naturales se tiene que ω es la forma simpléctica canónica de \mathbb{R}^{2n} por lo que es ω es forma simpléctica. \square

La 1-forma tautológica permite definir una 1-forma en el espacio cotangente a partir de una 1-forma en el espacio tangente. Por lo tanto las simetrías del espacio tangente son llevadas al espacio cotangente mediante τ .

La forma simpléctica definida en la proposición se llama forma simpléctica canónica de T^*M .

Teorema 4.2.1. (Darboux). *Sea (M, ω) una variedad simpléctica $2n$ -dimensional. Para todo $p \in M$ existen coordenadas $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ centradas en p tales que ω está representada en estas coordenadas de la forma*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i. \quad (4.2.3)$$

La prueba de este teorema y mas resultados sobre la geometría simpléctica pueden ser encontrados en [DST01] y [McI15].

4.3. Formalismo Hamiltoniano

Los resultados expuestos en esta sección son basados en el capítulo 22 de [Lee01] y el capítulo 5 de [GN12].

Sea M una variedad n -dimensional. Definimos el conjunto

$$TM \oplus T^*M = \bigcup_{z \in M} T_z M \times T_z^* M,$$

donde $(v, \alpha) \in T_z M \times T_z^* M$ es de la forma

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad \alpha = \sum_{i=1}^n p_i dq^i.$$

Este conjunto es una variedad con la estructura diferenciable dada por las coordenadas locales $(q^1, \dots, q^n, v^1, \dots, v^n, p_1, \dots, p_n)$; con (q^1, \dots, q^n) las coordenadas locales en M . Esta variedad tiene asociadas las proyecciones $\pi_1 : TM \oplus T^*M \rightarrow TM$ y $\pi_2 : TM \oplus T^*M \rightarrow T^*M$ definidas $\pi_1(v, \alpha) = v$ y $\pi_2(v, \alpha) = \alpha$.

Vamos a definir la función hamiltoniana extendida $\hat{H} : TM \oplus T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\hat{H} = \alpha(v) - L(v), \quad (4.3.1)$$

donde L es el Lagrangiano. Escrito en coordenadas locales

$$\hat{H}(q^1, \dots, q^n, v^1, \dots, v^n, p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i v^i - L(q^1, \dots, q^n, v^1, \dots, v^n),$$

por lo que

$$d\hat{H} = \sum_{i=1}^n \left(p_i - \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) dv^i + \sum_{i=1}^n v^i dp_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i.$$

Si restringimos \hat{H} a $T_z M \times \{\alpha\}$, con $z \in M$ y $\alpha \in T_z^* M$ fijos, entonces el conjunto de puntos críticos satisface

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(q^1, \dots, q^n, v^1, \dots, v^n), \quad (4.3.2)$$

llamaremos S a este conjunto.

En coordenadas locales, definimos

$$\Psi(q^1, \dots, q^n, v^1, \dots, v^n, p_1, \dots, p_n) = \left(p_1 - \frac{\partial L}{\partial v^1}, \dots, p_n - \frac{\partial L}{\partial v^n} \right).$$

Por lo tanto $S = \Psi^{-1}(0)$. Ya que la matriz de derivadas de Ψ es de la forma

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{\partial L}{\partial q^i \partial v^j} & \frac{\partial L}{\partial v^i \partial v^j} & I_{n \times n} \end{array} \right),$$

entonces para cualquier punto en S esta matriz es de rango máximo por lo que S es subvariedad de $TM \oplus T^*M$ con dimensión $2n$, además el mapa $\pi_1|_S : S \rightarrow TM$ es un difeomorfismo. Si $\pi_2|_S : S \rightarrow T^*M$ es un difeomorfismo, entonces el Lagrangiano asociado a la función Hamiltoniana extendida se llama hiperregular. Para un Lagrangiano hiperregular se tiene que $\pi_2|_S \circ \pi_1|_S^{-1} : TM \rightarrow T^*M$ es un difeomorfismo llamado transformada de Legendre.

Definimos la función Hamiltoniana $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$H = \hat{H} \circ \pi_2|_S^{-1},$$

por lo tanto

$$dH = \sum_{i=1}^n v^i dp_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i.$$

Ya que H es función suave en T^*M , entonces

$$dH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i.$$

Por las anteriores igualdades tenemos que

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} = v^i. \end{cases} \quad (4.3.3)$$

En consecuencia la función Hamiltoniana, a pesar de estar definida en el espacio cotangente T^*M el cual no posee métrica Riemanniana, guarda

información sobre la métrica Riemanniana de la variedad .

Las ecuaciones de Euler–Lagrange definen un campo vectorial en el espacio de configuración TM . Las transformaciones de (1.3.2) bajo (4.3.3) da lugar a las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Estas definen un campo vectorial en T^*M . Por lo tanto vamos a tener que las soluciones al problema de los n -cuerpos serán las curvas integrales asociadas a este campo vectorial. El sistema (M, ω, H) , donde (M, ω) es una variedad simpléctica y H función Hamiltoniana, se llama sistema Hamiltoniano y por las ecuaciones de Hamilton (4.3.4) describe el mismo flujo que se describe en el formalismo Lagrangiano por lo que es solución al sistema de ecuaciones diferenciales (1.0.1).

El campo vectorial Hamiltoniano de H es el campo vectorial suave X_H definido por

$$\iota_{X_H}\omega = dH,$$

para cualquier campo vectorial Y se tiene

$$\omega(X_H, Y) = dH(Y) = YH.$$

En las coordenadas dadas por el teorema de Darboux escribimos

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b^i \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Para determinar los coeficientes (a^i, b^i) calculamos:

$$\begin{aligned} \iota_{X_H}\omega &= \sum_{i=1}^n (a^i dp_i - b^i dq^i), \\ dH &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right). \end{aligned}$$

Igualando estas dos expresiones se tiene que $a^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ y $b^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$ por lo que:

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Aunque el campo vectorial Hamiltoniano está definido de manera análoga al gradiente en geometría Riemanniana, este cumple propiedades complementarias al gradiente, pues está definido en términos de una forma simpléctica. Estas propiedades son:

Proposición 4.3.1. *Sea (M, ω) variedad simpléctica y $H \in C^\infty(T^*M)$.*

- (a) *H es constante a lo largo de cada curva integral de X_H .*
- (b) *Para cada valor regular de H , el campo vectorial hamiltoniano X_H es tangente a la curva de nivel de H .*

Demostración. Ya que

$$X_H H = dH(X_H) = \omega(X_H, X_H),$$

y como ω es alternante se tiene que $X_H H = 0$. Por lo tanto H es constante a lo largo de las trayectorias descritas por X_H , es decir, sus curvas integrales. Además, al H ser constante a lo largo de una curva integral se tiene que la preimagen de un valor regular de H es una curva integral por lo que X_H es tangente a la curva integral, por lo tanto a la curva de nivel de H . \square

Ya que el Hamiltoniano extendido (4.3.1) está definido en términos del Lagrangiano, podemos encontrar el Hamiltoniano asociado al problema de los n -cuerpos. Para ello primero debemos pasar de las coordenadas del espacio tangente al cotangente, por lo que utilizamos (4.3.2), entonces:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = m_i \dot{q}^i.$$

Por lo tanto

$$T(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{m_i} (\sigma q^i \odot q^i),$$

$$U(q) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j q^i \odot q^j}{[\sigma - \sigma(q^i \odot q^j)^2]^{1/2}}.$$

Sea

$$H(q, p) = T(q, p) - U(q). \quad (4.3.5)$$

Ya que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= m_i^{-1} p_i, \\ -\frac{\partial H}{\partial q^i} &= \nabla_{q^i} U(q) - m_i^{-1} (p_i \odot p_i) q^i, \end{aligned}$$

las ecuaciones de Hamilton (4.3.4) nos dan el campo vectorial X_H en el espacio cotangente, dado por:

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left((m_i^{-1} p_i) \frac{\partial}{\partial q^i} + (\nabla_{q^i} U(q) - m_i^{-1} (p_i \odot p_i) q^i) \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Por lo tanto una curva integral de este campo vectorial debe cumplir el sistema de ecuaciones diferenciales (3.3.1), es decir, las ecuaciones asociadas al problema de los n -cuerpos en espacios de curvatura constante.

Capítulo 5

Ejemplos

Ya que $O(\mathbb{S}^3)$ y $O(\mathbb{H}^3)$ son las isometrías de \mathbb{S}^3 y \mathbb{H}^3 , dadas n partículas puntuales de masas $m_1, \dots, m_n > 0$ tales que sus trayectorias preservan las distancias para todo instante de tiempo, sus soluciones están descritas por la acción de los grupos $O(\mathbb{S}^3)$ y $O(\mathbb{H}^3)$ sobre \mathbb{S}^3 y \mathbb{H}^3 . Si además estas isometrías preservan la orientación, es decir, las matrices ortogonales de determinante 1 $SO(\mathbb{S}^3)$ y $SO(\mathbb{H}^3)$, entonces la acción de estos grupos van a generar un tipo particular de soluciones las cuales vamos a llamar en equilibrio relativo. Gracias al teorema del eje principal de Euler vamos a poder dar una descripción más detallada de este tipo de soluciones y algunos ejemplos.

Las soluciones propuestas, los criterios para su existencia y ejemplos en \mathbb{S}^3 y \mathbb{H}^3 se encuentran, y pueden profundizar en [Dia12].

5.1. Equilibrio relativo

Los elementos de $SO(\mathbb{S}^3)$ son rotaciones con respecto a algún eje que dejan invariante a \mathbb{S}^3 . Por el teorema de los ejes principales de Euler toda rotación de $SO(\mathbb{S}^3)$

puede ser escrita de la forma PAP^{-1} con $P \in \text{SO}(\mathbb{S}^3)$ y

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Los ángulos θ y ϕ son los ángulos asociados a las rotaciones en los planos wx y yz , donde los elementos de \mathbb{S}^3 son de la forma

$$\mathbb{S}^3 = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

De manera análoga los elementos de $\text{SO}(\mathbb{H}^3)$ son de la forma PBP^{-1} y PCP^{-1} donde $P \in \text{SO}(H^3)$ y

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \phi & -\sinh \phi \\ 0 & 0 & \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\xi & \xi \\ 0 & \xi & 1 - \xi^2/2 & \xi^2/2 \\ 0 & \xi & -\xi^2/2 & 1 + \xi^2/2 \end{pmatrix}.$$

Una rotación se llama:

- **Elíptica-elíptica** matrices de la forma PAP^{-1} con $\theta \neq 0$ y $\phi \neq 0$.
- **Positiva elíptica** matrices de la forma PAP^{-1} con $\theta \neq 0$ y $\phi = 0$ (o $\phi \neq 0$ y $\theta = 0$).
- **Negativa elíptica** matrices de la forma PBP^{-1} con $\theta \neq 0$ y $\phi = 0$.
- **Negativa hiperbólica** matrices de la forma PBP^{-1} con $\theta = 0$ y $\phi \neq 0$.
- **Negativa elíptica-hiperbólica** matrices de la forma PBP^{-1} con $\theta \neq 0$ y $\phi \neq 0$.
- **Negativa parabólica** matrices de la forma PCP^{-1} .

Consideremos una 2-esfera en \mathbb{S}^3 . Ya que las rotaciones son isometrías basta con considerar

$$\mathbb{S}_z^2 = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{S}^3 : z = 0\},$$

es decir, la intersección del plano $z = 0$ con \mathbb{S}^3 .

Las rotaciones elípticas-elípticas actúan sobre un elemento $(w, x, y, 0) \in \mathbb{S}_z^2$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w \cos \theta - x \sin \theta \\ w \cos \theta + x \sin \theta \\ y \cos \phi \\ y \sin \phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto una rotación elíptica-elíptica deja invariante a un elemento de \mathbb{S}_z^2 cuando $z_1 = y \sin \phi = 0$, ya que y no tiene por qué ser la constante cero tenemos que $\phi = 0$.

Las rotaciones que dejan invariante a \mathbb{S}_z^2 son de la forma:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que las rotaciones positivas elípticas dejan invariantes las 2-esferas de \mathbb{S}^3 .

Una 2-esfera hiperbólica \mathbb{H}^3 es de la forma:

$$\mathbb{H}_w^2 = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{H}^3 : w = 0\},$$

donde se utilizó el mismo argumento de rotar cualquier 2-esfera hiperbólica para obtener esta.

Las rotaciones negativas hiperbólicas actúan sobre $(0, x, y, z) \in \mathbb{H}_w^2$ de la

siguiente manera:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \phi & \sinh \phi \\ 0 & 0 & \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \cosh \phi + z \sinh \phi \\ y \sinh \phi + z \cosh \phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto toda rotación negativa hiperbólica deja invariante a \mathbb{H}_w^2 .

Definición 5.1.1. Una configuración $q \in \mathbb{R}^{3n}$ se llama central si

$$\nabla U(q) = \lambda \nabla I(q),$$

con $I(q) = \sum m_i |q_i|^2$ momento de inercia y λ una constante.

Definición 5.1.2. Una solución $q(t) = (q^1(t), \dots, q^n(t))$ al problema de los n -cuerpos en \mathbb{S}^3 se llama homográfica si existen una función escalar $R(t) > 0$ y una matriz $\Omega \in SO(\mathbb{S}^3)$ tales que

$$q^k(t) = R(t)\Omega(t)q^k(0), \quad k = \overline{1, n},$$

donde $(q^1(0), \dots, q^n(0))$ es una configuración central.

Esta solución se llama homotética si $\Omega(t) \equiv I_{3 \times 3}$ y en equilibrio relativo si $R(t) \equiv 1$.

De manera análoga se definen las soluciones homográficas en \mathbb{H}^3 .

Ya que sabemos cómo son las matrices que pertenecen a $SO(\mathbb{S}^3)$ y $SO(\mathbb{H}^3)$, podemos clasificar las soluciones en equilibrio relativo pues están definidas en términos de estas matrices.

Por lo tanto, en \mathbb{S}^3 , las soluciones al problema de los n -cuerpos se llaman:

- **Elíptica-elíptica** cuando $\Omega(t)$ es una rotación elíptica-elíptica para todo instante de tiempo.
- **Positiva elíptica** cuando $\Omega(t)$ es una rotación positiva elíptica para todo instante de tiempo.

De manera análoga se definen en \mathbb{H}^3 las soluciones negativas elípticas, negativas hiperbólicas y negativas elípticas-hiperbólicas. La rotación parabólica no pertenece al conjunto de soluciones.

Existe una constante que relaciona los ángulos con tiempo llamada frecuencia angular y denotada por α . Sea F el número de vueltas que realiza un objeto en un segundo, se tiene que $\alpha = 2\pi F$, donde esta frecuencia angular está relacionada con el ángulo θ .

Sea (q_0^1, \dots, q_0^n) con $q_0^i = (w_0^i, x_0^i, y_0^i, z_0^i)$ la posición inicial de n cuerpos.

Una solución positiva elíptica es de la forma:

$$\begin{pmatrix} w_0^i \cos \theta - x_0^i \sin \theta \\ w_0^i \cos \theta + x_0^i \sin \theta \\ y_0^i \\ z_0^i \end{pmatrix},$$

tomando $r^i = \sqrt{(w_0^i)^2 + (x_0^i)^2}$, se pueden encontrar constantes $a^i \in \mathbb{R}$ tales que $w_0^i = r^i \cos a^i$ y $x_0^i = r^i \sin a^i$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_0^i \cos \alpha t - x_0^i \sin \alpha t \\ w_0^i \cos \alpha t + x_0^i \sin \alpha t \\ y_0^i \\ z_0^i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r^i \cos a^i \cos \alpha t - r^i \sin a^i \sin \alpha t \\ r^i \cos a^i \cos \alpha t + r^i \sin a^i \sin \alpha t \\ y_0^i \\ z_0^i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^i \cos(\alpha t + a^i) \\ r^i \sin(\alpha t + a^i) \\ y_0^i \\ z_0^i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Una solución negativa hiperbólica es de la forma:

$$\begin{pmatrix} w_0^i \\ x_0^i \\ y_0^i \cosh \phi + z_0^i \sinh \phi \\ y_0^i \sinh \phi + z_0^i \cosh \phi \end{pmatrix},$$

sea β la frecuencia angular asociada al ángulo ϕ y $\eta^i = \sqrt{(z_0^i)^2 - (y_0^i)^2}$, se pueden encontrar constantes $b^i \in \mathbb{R}$ tales que $z_0^i = \eta^i \cosh b^i$ y $y_0^i =$

$\eta^i \sinh b^i$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_0^i \\ x_0^i \\ y_0^i \cosh \beta t + z_0^i \sinh \beta t \\ y_0^i \sinh \beta t + z_0^i \cosh \beta t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} w_0^i \\ x_0^i \\ \eta^i \sinh b^i \cosh \beta t + \eta^i \cosh b^i \sinh \beta t \\ \eta^i \sinh b^i \sinh \beta t + \eta^i \cosh b^i \cosh \beta t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w_0^i \\ x_0^i \\ \eta^i \sinh(\beta t + b^i) \\ \eta^i \cosh(\beta t + b^i) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces para n cuerpos puntuales con posición inicial (q_0^1, \dots, q_0^n) , con $q_0^i = (w_0^i, x_0^i, y_0^i, z_0^i)$, las soluciones en equilibrio relativo positivo elíptico en \mathbb{S}^3 y las soluciones en equilibrio relativo negativo hiperbólico en \mathbb{H}^3 vienen dadas respectivamente de la forma:

$$\begin{cases} w^i(t) = r^i \cos(\alpha t + a^i), \\ x^i(t) = r^i \sin(\alpha t + a^i), \\ y^i(t) = y_0^i, \\ z^i(t) = z_0^i, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

con $(w_0^i)^2 + (x_0^i)^2 = (r^i)^2$ y $(r^i)^2 + (y^i)^2 + (z^i)^2 = 1$, para $i = \overline{1, n}$.

$$\begin{cases} w^i(t) = w_0^i, \\ x^i(t) = x_0^i, \\ y^i(t) = \eta^i \sinh(\beta t + b^i), \\ z^i(t) = \eta^i \cosh(\beta t + b^i), \end{cases} \quad (5.1.2)$$

con $(z^i)^2 - (y^i)^2 = (\eta^i)^2$ y $(w^i)^2 + (x^i)^2 - (\eta^i)^2 = -1$, para $i = \overline{1, n}$.

Para obtener las condiciones que debe cumplir una solución positiva elíptica para ser solución al problema de los n -cuerpos en \mathbb{S}^3 reemplazamos (5.1.1) en (3.2.4). Ya que $k = 1$ obtenemos para las posiciones de las partículas dadas por $q^i = (r^i \cos(\alpha t + a^i), r^i \sin(\alpha t + a^i), y_0^i, z_0^i)$ las ecuaciones:

$$\nu^{ij} = q^i \odot q^j = r^i r^j \cos(a^i - a^j) + y_0^i y_0^j + z_0^i z_0^j.$$

Además, ya que $\dot{q}^i = (-\alpha r^i \sin(\alpha t + a^i), \alpha r^i \cos(\alpha t + a^i), 0, 0)$ se tiene

$$\dot{q}^i \odot \dot{q}^i = (\alpha r^i)^2 \left[\sin^2(\alpha t + a^i) + \cos^2(\alpha t + a^i) \right] = (\alpha r^i)^2.$$

Tomando la primera componente de q^i , y como $\ddot{w}^i = -\alpha^2 r^i \cos(\alpha t + a^i)$, el sistema de ecuaciones (3.2.4) queda de la forma:

$$\begin{aligned} & -\alpha^2 r^i \cos(\alpha t + a^i) \\ = & \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j [r^j \cos(\alpha t + a^j) - \nu^{ij} r^i \cos(\alpha t + a^i)]}{[1 - (\nu^{ij})^2]^{3/2}} - (\alpha r^i)^2 r^i \cos(\alpha t + a^i). \end{aligned}$$

Utilizando la identidad $\cos(\alpha t + a^i) = \cos(\alpha t) \cos a^i - \sin(\alpha t) \sin a^i$ y separando la ecuación en términos de $\cos(\alpha t)$ y $\sin(\alpha t)$ obtenemos:

$$\cos(\alpha t) \left[\alpha^2 r^i \cos a^i - (\alpha r^i)^2 r^i \cos a^i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j [r^j \cos a^j - \nu^{ij} r^i \cos a^i]}{[1 - (\nu^{ij})^2]^{3/2}} \right], \quad (5.1.3)$$

$$\sin(\alpha t) \left[(\alpha r^i)^2 r^i \sin a^i - \alpha^2 r^i \sin a^i - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j [r^j \sin a^j - \nu^{ij} r^i \sin a^i]}{[1 - (\nu^{ij})^2]^{3/2}} \right]. \quad (5.1.4)$$

Por lo tanto se tiene que cumplir, para todo instante de tiempo, la ecuación (5.1.3) + (5.1.4) = 0. Esto es cierto si y sólo si se cumplen las condiciones

$$\left((r^i)^2 - 1 \right) \alpha^2 r^i \cos a^i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j [r^j \cos a^j - \nu^{ij} r^i \cos a^i]}{[1 - (\nu^{ij})^2]^{3/2}}, \quad (5.1.5)$$

$$\left((r^i)^2 - 1 \right) \alpha^2 r^i \sin a^i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j [r^j \sin a^j - \nu^{ij} r^i \sin a^i]}{[1 - (\nu^{ij})^2]^{3/2}}. \quad (5.1.6)$$

Es sencillo ver que para la segunda componente de q^i se deben cumplir las ecuaciones (5.1.5) y (5.1.6).

Para la tercera y cuarta componente de q^i obtenemos las ecuaciones

$$(\alpha r^i)^2 y^i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j [y^j - \nu^{ij} y^i]}{[1 - (\nu^{ij})^2]^{3/2}}, \quad (5.1.7)$$

$$(\alpha r^i)^2 z^i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j [z^j - \nu^{ij} z^i]}{[1 - (\nu^{ij})^2]^{3/2}}. \quad (5.1.8)$$

Proposición 5.1.1. Sean $q^1, \dots, q^n \in \mathbb{S}^3$ partículas puntuales de masas $m_1, \dots, m_n > 0$. El sistema de ecuaciones diferenciales (3.2.4) admite una solución en equilibrio relativo positivo elíptico de la forma (5.1.1) si y sólo si se existen constantes $r^i, a^i \in \mathbb{R}$ tales que las ecuaciones (5.1.5), (5.1.6), (5.1.7) y (5.1.8) se cumplen.

Para obtener las condiciones que debe cumplir una solución negativa hiperbólica para ser solución al problema de los n -cuerpos en \mathbb{H}^3 reemplazamos (5.1.2) en (3.2.4). Ya que $k = -1$ obtenemos para las posiciones de las partículas dadas por $q^i = (w_0^i, x_0^i, \eta^i \sinh(\beta t + b^i), \eta^i \cosh(\beta t + b^i))$ las ecuaciones:

$$\mu^{ij} = q^i \odot q^j = w_0^i w_0^j + x_0^i x_0^j - \eta^i \eta^j \cosh(b^i - b^j).$$

Además, ya que $\dot{q}^i = (0, 0, \beta \eta^i \cosh(\alpha t + b^i), \beta \eta^i \sinh(\alpha t + b^i))$ se tiene

$$\dot{q}^i \odot \dot{q}^i = (\beta \eta^i)^2 \left[\cosh^2(\beta t + b^i) - \sinh^2(\beta t + b^i) \right] = (\beta \eta^i)^2.$$

Tomando la tercera componente de q^i , y como $\ddot{y}^i = \beta^2 \eta^i \sinh(\alpha t + b^i)$, el sistema de ecuaciones (3.2.4) queda de la forma:

$$\begin{aligned} & \beta^2 \eta^i \sinh(\alpha t + b^i) \\ = & \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j \left[\eta^j \sinh(\beta t + b^j) + \mu^{ij} \eta^i \sinh(\beta t + b^i) \right]}{[(\mu^{ij})^2 - 1]^{3/2}} + (\beta \eta^i)^2 \eta^i \sinh(\beta t + b^i). \end{aligned}$$

Utilizando la identidad $\sinh(\beta t + b^i) = \sinh(\beta t) \cosh b^i + \cosh(\beta t) \sinh b^i$ y separando la ecuación en términos de $\cosh(\beta t)$ y $\sinh(\beta t)$ obtenemos:

$$\cosh(\beta t) \left[-\beta^2 \eta^i \sinh b^i + (\beta \eta^i)^2 \eta^i \sinh b^i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j \left[\eta^j \sinh b^j + \mu^{ij} \eta^i \sinh b^i \right]}{[(\mu^{ij})^2 - 1]^{3/2}} \right], \quad (5.1.9)$$

$$\sinh(\beta t) \left[-\beta^2 \eta^i \cosh b^i + (\beta \eta^i)^2 \eta^i \cosh b^i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j \left[\eta^j \cosh b^j + \mu^{ij} \eta^i \cosh b^i \right]}{[(\mu^{ij})^2 - 1]^{3/2}} \right]. \quad (5.1.10)$$

Por lo tanto se tiene que cumplir, para todo instante de tiempo, la ecuación (5.1.9) + (5.1.10) = 0. Esto es cierto si y sólo si se cumplen las condiciones

$$\left(1 - (\eta^i)^2\right)\beta^2\eta^i \sinh b^i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j [\eta^j \sinh b^j + \mu^{ij}\eta^i \sinh b^i]}{[(\mu^{ij})^2 - 1]^{3/2}}, \quad (5.1.11)$$

$$\left(1 - (\eta^i)^2\right)\beta^2\eta^i \cosh b^i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j [\eta^j \cosh b^j + \mu^{ij}\eta^i \cosh b^i]}{[(\mu^{ij})^2 - 1]^{3/2}}. \quad (5.1.12)$$

Es sencillo ver que para la cuarta componente de q^i se deben cumplir las ecuaciones (5.1.11) y (5.1.12).

Para la primera y segunda componente de q^i obtenemos las ecuaciones

$$-(\beta\eta^i)^2 w^i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j [w^j + \mu^{ij}w^i]}{[(\mu^{ij})^2 - 1]^{3/2}}, \quad (5.1.13)$$

$$-(\beta\eta^i)^2 x^i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j [x^j + \mu^{ij}x^i]}{[(\mu^{ij})^2 - 1]^{3/2}}. \quad (5.1.14)$$

Proposición 5.1.2. Sean $q^1, \dots, q^n \in \mathbb{H}^3$ partículas puntuales de masas $m_1, \dots, m_n > 0$. El sistema de ecuaciones diferenciales (3.2.4) admite una solución en equilibrio relativo negativo hiperbólico de la forma (5.1.2) si y solo si se existen constantes $\eta^i, b^i \in \mathbb{R}$ tales que las ecuaciones (5.1.11), (5.1.12), (5.1.13) y (5.1.14) se cumplen.

5.2. Ejemplo en \mathbb{S}^3

Tomamos 3 cuerpos puntuales de masas m_1, m_2, m_3 ubicados en los extremos de un triángulo. Por la proposición 5.3 si tomamos las posiciones

$q^1, q^2, q^3 \in \mathbb{S}^3$, con $q^i = (w^i, x^i, y^i, z^i)$ tales que:

$$\begin{aligned} w^1(t) &= \cos(\alpha t + a^1), & x^1(t) &= \sin(\alpha t + a^1), \\ y^1(t) &= 0, & z^1(t) &= 0, \\ w^2(t) &= \cos(\alpha t + a^2), & x^2(t) &= \sin(\alpha t + a^2), \\ y^2(t) &= 0, & z^2(t) &= 0, \\ w^3(t) &= \cos(\alpha t + a^3), & x^3(t) &= \sin(\alpha t + a^3), \\ y^3(t) &= 0, & z^3(t) &= 0, \end{aligned}$$

tenemos que $r^1 = r^2 = r^3 = 1$. Además para $a^1 = 0$, $a^2 = 5\pi/6$ y $a^3 = 7\pi/6$, los ángulos que determinan la forma del triángulo, podemos encontrar masas m_1, m_2, m_3 mediante las ecuaciones (5,1,5), (5,1,6), (5,1,7) y (5,1,8). Para $m \in \mathbb{R}^+$ tenemos que

$$\begin{aligned} m_1 &= m, \\ m_2 &= 3m, \\ m_3 &= 3m. \end{aligned}$$

Bajo estas condiciones este sistema posee una solución dada por las rotaciones positivas elípticas de su posición inicial. Además, como estas rotaciones dejan invariante a \mathbb{S}_{yz}^3 con

$$\mathbb{S}_{yz}^3 = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{S}^3 : y = 0, z = 0\},$$

entonces el movimiento de los cuerpos permanece en \mathbb{S}_{yz}^3 para todo instante de tiempo.

Ya que el Hamiltoniano (4.3.5) es constante sobre el flujo asociado a X_H y, este flujo son justamente las trayectorias solución al problema de los n -cuerpos, entonces H es constante sobre la solución propuesta en esta sección. Esto se verifica ya que para

$$\begin{aligned} q^1 &= \left(\cos(\alpha t), \sin(\alpha t), 0, 0 \right), \\ q^2 &= \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \cos(\alpha t) - \frac{1}{2} \sin(\alpha t), \frac{-\sqrt{3}}{2} \cos(\alpha t) + \frac{1}{2} \sin(\alpha t), 0, 0 \right), \\ q^3 &= \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \cos(\alpha t) + \frac{1}{2} \sin(\alpha t), \frac{-\sqrt{3}}{2} \cos(\alpha t) - \frac{1}{2} \sin(\alpha t), 0, 0 \right), \end{aligned}$$

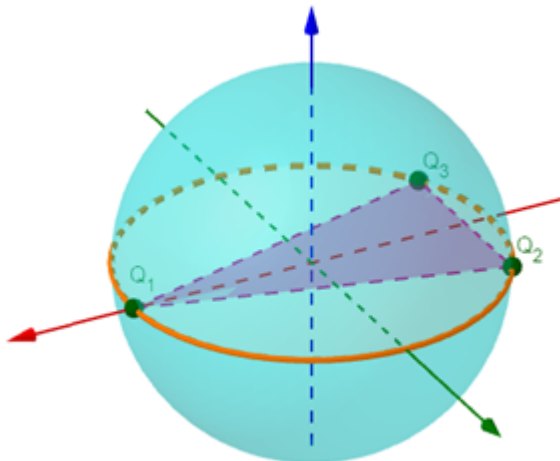


Figura 5.1: Solución positiva elíptica.

tenemos que

$$q^1 \odot q^2 = q^1 \odot q^3 = \frac{-\sqrt{3}}{2},$$

$$q^2 \odot q^3 = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto

$$U = \frac{3m^2(-\sqrt{3}/2)}{\sqrt{1/4}} + \frac{3m^2(-\sqrt{3}/2)}{\sqrt{1/4}} + \frac{9m^2(1/2)}{\sqrt{3/4}} = -3\sqrt{3}m^2.$$

Además

$$p_1 = m \left(-\alpha \sin(\alpha t), \alpha \cos(\alpha t), 0, 0 \right),$$

$$p_2 = 3m \left(-\alpha \sin(\alpha t + (5\pi/6)), \alpha \cos(\alpha t + (5\pi/6)), 0, 0 \right),$$

$$p_3 = 3m \left(-\alpha \sin(\alpha t + (7\pi/6)), \alpha \cos(\alpha t + (7\pi/6)), 0, 0 \right),$$

por lo que

$$T = \frac{7\alpha^2}{2}m.$$

Finalmente

$$H = T - U = \frac{7\alpha^2}{2}m + 3\sqrt{3}m^2,$$

ya que α, m son constantes se tiene que el Hamiltoniano es constante sobre las trayectorias de la solución propuesta en \mathbb{S}^3 .

5.3. Ejemplo en \mathbb{H}^3

Sean $q^1, q^2, q^3 \in \mathbb{H}^3$, con $q^i = (w^i, x^i, y^i, z^i)$, partículas puntuales de masas $m_1, m_2, m_3 > 0$. Dada una solución negativa hiperbólica de la forma:

$$\begin{aligned} w^1(t) &= 0, & y^1(t) &= \sinh \beta t, \\ x^1(t) &= 0, & z^1(t) &= \cosh \beta t, \\ w^2(t) &= 0, & y^2(t) &= \eta \sinh \beta t, \\ x^2(t) &= x, & z^2(t) &= \eta \cosh \beta t, \\ w^3(t) &= 0, & y^3(t) &= \eta \sinh \beta t, \\ x^3(t) &= -x, & z^3(t) &= \eta \cosh \beta t, \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

con $x^2 - \eta^2 = -1$. Ya que $b^i = 0$ entonces la ecuación (5.1.11) no nos da información sobre las soluciones. Del mismo modo, ya que $w^i = 0$ la ecuación (5.1.13) nos nos brinda información de las soluciones. Reemplazando (5.3.1) en (5.1.12) y (5.1.14), obtenemos las condiciones que debe cumplir el sistema para que exista la solución negativa hiperbólica. Estas condiciones vienen dadas por

$$\begin{aligned} \beta^2 \eta^2 &= \frac{\eta m_1}{(\eta^2 - 1)^{3/2}} + \frac{2\eta^2 m_3}{((1 - 2\eta^2)^2 - 1)^{3/2}}, \\ (1 - \eta^2)\beta^2 \eta &= \frac{(1 - \eta^2)m_1}{(\eta^2 - 1)^{3/2}} + \frac{(2\eta - 2\eta^3)m_3}{((1 - 2\eta^2)^2 - 1)^{3/2}}, \end{aligned}$$

multiplicando la primera ecuación por η y sumandola con la segunda obtenemos:

$$\beta^2 \eta^3 = \frac{\eta^2 m_1}{(\eta^2 - 1)^{3/2}} + \frac{2\eta^3 m_3}{((1 - 2\eta^2)^2 - 1)^{3/2}}.$$

Ya que

$$((1 - 2\eta^2)^2 - 1)^{3/2} = \left((4\eta^2)(\eta^2 - 1) \right)^{3/2}$$

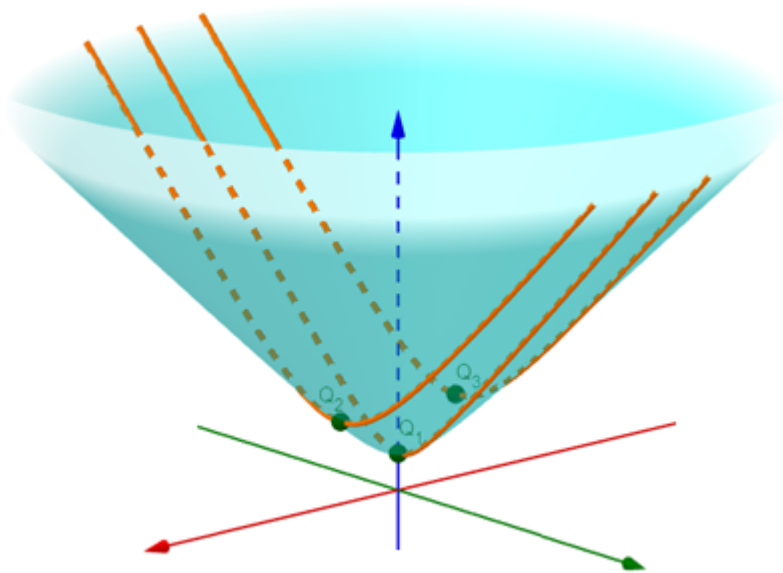


Figura 5.2: Solución negativa hiperbólica.

$$= 8\eta^3(\eta^2 - 1)^{3/2},$$

concluimos que

$$\beta^2 = \frac{4\eta^2 m_1 + m_3}{4\eta^3(\eta^2 - 1)^{3/2}}.$$

Por lo tanto la frecuencia angular puede tomar dos valores dados por:

$$\beta_1 = \frac{1}{2\eta} \sqrt{\frac{4\eta^2 m_1 + m_3}{\eta(\eta^2 - 1)^{3/2}}} \quad \text{y} \quad \beta_2 = -\frac{1}{2\eta} \sqrt{\frac{4\eta^2 m_1 + m_3}{\eta(\eta^2 - 1)^{3/2}}}.$$

Además las rotaciones negativas hiperbólicas dejan fijo \mathbb{H}_w^3 por lo que el movimiento de estos cuerpos permanece en \mathbb{H}_w^3 para todo instante de tiempo.

Ya que

$$\begin{aligned} q^1 &= (0, 0, \sinh \beta t, \cosh \beta t), \\ q^2 &= (0, x, \eta \sinh \beta t, \eta \cosh \beta t), \\ q^3 &= (0, -x, \eta \sinh \beta t, \eta \cosh \beta t), \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} q^1 \odot q^2 &= q^1 \odot q^3 = -\eta, \\ q^2 \odot q^3 &= 1 - 2\eta^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} U &= -\frac{m_1 m_2 \eta}{x} - \frac{m_1 m_3 \eta}{x} + \frac{m_2 m_3 (1 - 2\eta^2)}{2\eta x} \\ &= \frac{m_2 m_3 - 2\eta^2 (m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)}{2\eta x}. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} p_1 &= m_1 (0, 0, \beta \cosh \beta t, \beta \sinh \beta t), \\ p_2 &= m_2 (0, 0, \beta \eta \cosh \beta t, \beta \eta \sinh \beta t), \\ p_3 &= m_3 (0, 0, \beta \eta \cosh \beta t, \beta \eta \sinh \beta t), \end{aligned}$$

por lo que

$$T = \frac{\beta^2}{2} (m_1 + \eta^2(m_2 + m_3)).$$

Finalmente

$$H = T - U = \frac{\beta^2}{2} (m_1 + \eta^2(m_2 + m_3)) + \frac{2\eta^2(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3) - m_2m_3}{2\eta x}.$$

ya que $\eta, \beta, m_1, m_2, m_3$ son constantes con $x \neq 0$ y $\eta \neq 0$, se tiene que el Hamiltoniano es constante sobre las trayectorias de la solución propuesta en \mathbb{H}^3 .

Apéndice A

Formas diferenciales

Un k -tensor covariante se dice alternante si para $\sigma \in S_k$ una permutación de k elementos se tiene que

$$\delta^\sigma(v_1, \dots, v_k) = \delta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma) \delta(v_1, \dots, v_k).$$

Los k -tensores covariantes alternantes se llaman multicovectores o k -covectores. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, el espacio de todos los k -covectores de V se denota por $\Lambda^k(V^*)$ y el espacio de los k -tensores covariantes de V por $T^k(V^*)$. Sea $\text{Alt} : T^k(V^*) \rightarrow \Lambda^k(V^*)$ tal que

$$\text{Alt } \alpha = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) \alpha^\sigma,$$

con $\alpha \in T^k(V^*)$. Ya que para $\tau \in S_k$ se tiene

$$\begin{aligned} (\text{Alt } \alpha)^\tau(v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) \alpha(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k)}) \\ &= (\text{sgn } \tau) \frac{1}{k!} \sum_{\xi \in S_k} (\text{sgn } \xi) \alpha(v_{\xi(1)}, \dots, v_{\xi(k)}) = (\text{sgn } \tau) (\text{Alt } \alpha)(v_1, \dots, v_k), \end{aligned}$$

por lo que $\text{Alt } \alpha$ es alternante. Además para todo $\eta \in \Lambda^k(V^*)$ se cumple que $\text{Alt } \eta = \eta$.

Para $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ se define el producto cuña entre formas diferenciales $\wedge : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^l(V^*) \rightarrow \Lambda^{k+l}(V^*)$ como

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

Sean $\omega, \hat{\omega}, \eta, \hat{\eta}$ y ξ multivectores. El producto cuña cumple las siguientes propiedades:

1. **Bilinearidad:** para $a, \hat{a} \in \mathbb{R}$,

$$(a\omega + \hat{a}\hat{\omega}) \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + \hat{a}(\hat{\omega} \wedge \eta),$$

$$\eta \wedge (a\omega + \hat{a}\hat{\omega}) = a(\eta \wedge \omega) + \hat{a}(\eta \wedge \hat{\omega}).$$

2. **Asociatividad:**

$$\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi.$$

3. **Anticonmutatividad:** si $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y $\eta \in \Lambda^l(V^*)$,

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

4. Para cualquier k -tupla de covectores $\omega^1, \dots, \omega^k$ y vectores ν_1, \dots, ν_k ,

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k(\nu_1, \dots, \nu_k) = \det(\omega^j(\nu_i)).$$

Sea $v \in V$ y $\omega \in \Lambda^k(V^*)$. Existe una operación que relaciona los vectores y k -covectores, llamada multiplicación interior, definida:

$$\iota_v \omega(w_1, \dots, w_{k-1}) = \omega(v, w_1, \dots, w_{k-1}).$$

Ya que

$$\omega(w_1, \dots, v, \dots, \hat{v}, \dots, w_k) = -\omega(w_1, \dots, \hat{v}, \dots, v, \dots, w_k),$$

si $v = \hat{v}$ entonces

$$\omega(w_1, \dots, v, \dots, v, \dots, w_k) = 0.$$

Por lo tanto $\iota_v \circ \iota_v = 0$. Además como

$$\iota_v(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \omega^i(v) \omega^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega^i} \wedge \cdots \wedge \omega^k,$$

donde $\widehat{\omega^i}$ indica este argumento es omitido. Entonces

$$\iota_v(\eta \wedge \omega) = (\iota_v \eta) \wedge \omega + (-1)^l \eta \wedge (\iota_v \omega),$$

donde $\eta \in \Lambda^l(V^*)$.

Definición A.0.1. Sea M una variedad. Una k -forma es una sección suave de $\Lambda^k(T^*M)$ donde

$$\Lambda^k(T^*M) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M),$$

es decir, es una asignación suave $p \mapsto \omega_p \in \Lambda^k(T_p^*M)$.

El espacio vectorial de todas las k -formas de M se denota $\Omega^k(M)$. Dado un entero positivo k un multi-índice de longitud k es una k -tupla ordenada de enteros positivos (i_1, \dots, i_k) . Sean I, J multi-índices de longitud k , se define

$$\delta_J^I = \begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_k} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_k} \end{pmatrix}.$$

Un multi-índice $I = (i_1, \dots, i_k)$ se dice creciente si $i_1 < \dots < i_k$. Se introduce la notación

$$\sum_{\{I: i_1 < \dots < i_k\}} \alpha_I = \sum'_I \alpha_I.$$

En cartas locales $(\mathcal{U}, x^1, \dots, x^k)$ una k -forma se puede escribir como

$$\sum'_I \omega_I dx^I = \sum'_I \omega_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

donde ω_I son funciones suaves definidas en \mathcal{U} . Ya que

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \right) = \delta_J^I,$$

y por la linealidad del producto cuña se tiene que

$$\omega_I = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right).$$

Ejemplo A.0.1. Toda 3-forma en \mathbb{R}^3 viene dada por

$$\eta = f dx \wedge dy \wedge dz,$$

con $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Además $\omega = y dx \wedge dz + x dy \wedge dz$ es un ejemplo de 2-forma en \mathbb{R}^3 .

Sean M , n variedades y $F : M \rightarrow N$ función suave. Dada una forma diferencial ω en n se define una forma diferencial en M , llamada pullback de ω , como:

$$(F^*\omega)_p(\nu_1, \dots, \nu_k) = \omega_{F(p)}(dF_p(\nu_1), \dots, dF_p(\nu_k)).$$

Ejemplo A.0.2. Para la 2-forma definida en el ejemplo anterior y $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida $F(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ se tiene que

$$\begin{aligned} F^*(y dx \wedge dz + x dy \wedge dz) &= v du \wedge d(u^2 - v^2) + u dv \wedge d(u^2 - v^2) \\ &= -2v^2 du \wedge dv + 2u^2 dv \wedge du = -2(v^2 + u^2) dv \wedge du. \end{aligned}$$

La multiplicación interior se puede extender a formas diferenciales y campos vectoriales. Para ello sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \Omega^k(M)$, se define la $(k-1)$ -forma $\iota_X \omega$ como

$$\iota_X \omega = \iota_{X_p} \omega_p.$$

Definimos el operador $d : \Omega^k(\mathbb{R}^m) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^m)$, llamado derivada exterior, como

$$d\left(\sum_I' \omega_I dx^I\right) = \sum_I' d\omega_I \wedge dx^I,$$

donde $d\omega_I$ es el diferencial de la función ω_I . Las siguientes propiedades permiten extender la derivada exterior a variedades.

Proposición A.0.1. *Para la derivada exterior se cumple:*

(a) d es lineal sobre \mathbb{R} .

(b) si ω es una k -forma y η una l -forma, entonces

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

(c) $d \circ d = 0$.

(d) sea $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ mapa suave, se tiene

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Demostración. El numeral (a) se tiene por la definición de la derivada exterior. Para (b) ya que el producto cuña es bilineal basta con tomar $\omega = u dx^I$ y $\eta = \nu dx^J$, por lo que

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(u\nu dx^I \wedge dx^J) \\ &= (\nu du + u dv) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= (du \wedge dx^I) \wedge (\nu dx^J) + u(dv \wedge dx^I) \wedge dx^J \\ &= (du \wedge dx^I) \wedge (\nu dx^J) + (-1)^k (u dx^I) \wedge (dv \wedge dx^J) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

Para una 0-forma, es decir, una función f tenemos

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^j = 0, \end{aligned}$$

por lo que $d(df) = 0$ para cualquier función suave. Ya que la derivada exterior de una k -forma ω involucra la sumatoria de términos en los cuales siempre aparece $d \circ d$ aplicado a alguna función, se tiene que cada uno de los términos va ser igual a cero, es decir, $d(d\omega) = 0$. Por lo tanto se tiene (c). Finalmente para (d) considerar una k -forma, otra vez tenemos que basta con considerar la k -forma $\omega = u dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ por linealidad. Ya que

$$\begin{aligned} F^*(d(u dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})) &= F^*(du \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ &= d(u \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_k} \circ F), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d(F^*(u \, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k})) &= d((u \circ F) \, d(x^{j_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{j_k} \circ F)) \\ &= d(u \circ F) \wedge d(x^{j_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{j_k} \circ F), \end{aligned}$$

por lo que se tiene (d). □

Sea M una variedad y (\mathcal{U}, ϕ) una carta. Para $\omega \in \Omega^k(M)$ se define:

$$d\omega = \phi^* d(\phi^{-1*} \omega).$$

Dada (\mathcal{V}, ψ) otra carta de M . En $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ se cumple

$$(\phi \circ \psi^{-1})^* d(\phi^{-1*} \omega) = d((\phi \circ \psi^{-1})^* \phi^{-1*} \omega).$$

Ya que $(\phi \circ \psi^{-1})^* = \psi^{-1*} \circ \phi^*$ obtenemos

$$\psi^*(\phi \circ \psi^{-1})^* d(\phi^{-1*} \omega) = \psi^* d((\phi \circ \psi^{-1})^* \phi^{-1*} \omega) = \psi^* d(\psi^{-1*} \omega),$$

además

$$\psi^*(\phi \circ \psi^{-1})^* d(\phi^{-1*} \omega) = \phi^* d(\phi^{-1*} \omega),$$

por lo que

$$\phi^* d(\phi^{-1*} \omega) = \psi^* d(\psi^{-1*} \omega),$$

es decir, la derivada exterior está bien definida en variedades.

Ya que:

$$\begin{aligned} F^*(d\omega) &= F^* \psi^* d(\psi^{-1*} \omega) \\ &= \phi^* \circ (\psi \circ F \circ \phi^{-1})^* d(\psi^{-1*} \omega) \\ &= \phi^* d((\psi \circ F \circ \phi^{-1})^* \psi^{-1*} \omega) \\ &= \phi^* d(\phi^{-1*} F^* \omega) \\ &= d(F^* \omega), \end{aligned}$$

tenemos una extensión de la derivada exterior en variedades.

Bibliografía

- [BP12] Riccardo Benedetti and Carlo Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Bri14] Alain J Brizard. *An introduction to Lagrangian mechanics*. World Scientific Publishing Company, 2014.
- [Dia12] Florin Diacu. *Relative equilibria of the curved N-body problem*, volume 1. Springer Science & Business Media, 2012.
- [DST01] Ana Cannas Da Silva and F Takens. *Lectures on symplectic geometry*, volume 3575. Springer, 2001.
- [GN12] Leonor Godinho and José Natário. *An introduction to Riemannian geometry, With Applications to Mechanics and Relativity*. Springer, 2012.
- [Gud08] Sigmundur Gudmundsson. *An introduction to Riemannian geometry*. 2008.
- [Lee01] John M Lee. *Introduction to Smooth manifolds*. Springer, 2001.
- [McI15] Andrew McInerney. *First Steps in Differential Geometry*. Springer, 2015.
- [Río02] E García Río. *Una introducción a la curvatura*. 2002.
- [Win14] Aurel Wintner. *The analytical foundations of celestial mechanics*. Courier Corporation, 2014.