

Campos geométricos, tensor de Ricci y aplicaciones

Kevin Daniel Guerrero Barragán

Dirigida por
Andrés Vargas Domínguez (Dr. rer. nat.)

Tesis presentada para obtener el título de
Matemático



Departamento de Matemáticas
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia
2023

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Métrica Riemanniana y conexiones	3
1.2. Tensor de curvatura	10
1.3. Forma de volumen Riemanniano	13
2. Campos vectoriales de Killing y conformes	14
2.1. Campos vectoriales de Killing	14
2.2. Campos vectoriales conformes	20
2.3. Campos vectoriales 2-Killing	23
2.3.1. Relación con campos vectoriales monótonos	26
3. Aplicaciones a solitones de Ricci	29
3.1. Definición y propiedades	29
3.2. Relación con campos vectoriales 2-Killing y conformes	33
4. Ejemplos	35
4.1. Campos vectoriales de Killing	35
4.2. Campos vectoriales 2-Killing y conformes	40
4.3. Solitones de Ricci	43
Bibliografía	46

Introducción

En el contexto de la geometría Riemanniana, existen campos vectoriales X en la variedad Riemanniana (M, g) cuyos flujos consisten de isometrías, es decir, los conceptos de ángulo, distancia, norma y ortogonalidad en M permanecen invariantes bajo la acción del flujo. Infinitesimalmente

$$\mathcal{L}_X g = 0,$$

en donde \mathcal{L}_X denota la derivada de Lie en la dirección de X . En el capítulo 2 se estudia este tipo de campos vectoriales llamados campos vectoriales de Killing (o simplemente campos de Killing), su nombre se debe en honor al matemático Wilhelm Killing. Este concepto se puede generalizar a campos n -Killing, que son aquellos que satisfacen

$$\mathcal{L}_X^n g = \underbrace{\mathcal{L}_X \mathcal{L}_X \dots \mathcal{L}_X}_{n\text{-veces}} g = 0.$$

Sin embargo, en este trabajo se analiza [5], en donde Teodor Oprea estudia los campos 2-Killing y los relaciona con los campos vectoriales monótonos. En el capítulo 3, se introduce la idea de flujo de Ricci (que es una ecuación diferencial parcial para la métrica Riemanniana que depende del tiempo) y soluciones particulares de este flujo llamadas soluciones autosimilares o solitones de Ricci, las cuales se consideran como puntos fijos generalizados de dicho flujo (ver [13]). Por último, se presenta la relación entre los campos vectoriales 2-Killing y conformes con estas soluciones.

Históricamente, el matemático estadounidense Richard Hamilton introdujo por primera vez la noción de flujo de Ricci para aplicarlo a la conjetura de geometrización de Thurston, que describe las posibles geometrías que pueden ocurrir en variedades cerradas de tres dimensiones, diciendo que se pueden construir a partir de ocho geometrías modelo básicas. Un corolario de esta conjetura es la conjetura de Poincaré (ahora teorema), que hizo parte de uno de los siete problemas del milenio.

El texto tiene la intención de profundizar los conocimientos de campos vectoriales de Killing, conformes, 2-Killing, y su relación con los solitones de Ricci. Además, de aportar y presentar ejemplos de cada uno.

Notación y símbolos

$\otimes^{(k,l)}$	Producto tensorial
$g(X, Y)$	Métrica Riemanniana o producto interno
$T_p M$	Espacio tangente en p
TM	Haz tangente
∇	Conexión
$[X, Y]$	Corchete de Lie de X e Y
Γ_{ij}^k	Coefficientes de conexión
grad	Gradiente
Hess f	Hessiano de f
df	Diferencial de f
div	Divergencia
R	Tensor de curvatura Riemanniano
K	Curvatura seccional
Ric	Curvatura de Ricci
S	Curvatura escalar
tr	Traza o contracción
dv_g	Forma de volumen Riemanniano
∂M	Frontera de M
\mathcal{L}	Derivada de Lie
$\mathfrak{X}(M)$	Conjunto de campos vectoriales suaves sobre M
$\text{End}(\mathfrak{X}(M))$	Espacio de endomorfismos en $\mathfrak{X}(M)$
Δ	Laplaciano
X^\flat	1-forma dual al campo vectorial X
EDO	Ecuación diferencial ordinaria
$\Omega^k(M)$	Espacio de k -formas suaves sobre M
vol	Volumen de una variedad

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo se mencionan diferentes resultados básicos e importantes de la geometría de Riemann con énfasis en las técnicas encontradas, que serán de utilidad para el estudio y cálculos de pruebas posteriores. En la sección 1.1 se mencionan distintos enunciados básicos de métrica Riemanniana, la derivada covariante de campos vectoriales como de tensores, y la generalización de varios operadores mencionados en un curso de cálculo de varias variables al contexto Riemanniano. En la sección 1.2 se define el tensor de curvatura de Riemann para posteriormente a partir de esta curvatura definir la curvatura seccional, la curvatura de Ricci y por último, la curvatura escalar de una variedad Riemanniana. Para finalizar, en la sección 1.3 se define la forma de volumen Riemanniano y se menciona el teorema de la divergencia en el entorno Riemanniano. El lector interesado en profundizar los temas mencionados a continuación, se puede remitir a las referencias utilizadas, que fueron principalmente [1], [2], [3] y [6].

1.1. Métrica Riemanniana y conexiones

Sea M una variedad suave. Una **métrica Riemanniana** g es una sección de $\otimes^2(T^*M)$, es decir un campo 2-tensorial suave $g \in \Gamma(\otimes^2(T^*M))$ (a menudo en la literatura $\Gamma(\otimes^k(T^*M))$ se denota de forma abreviada por $\mathcal{T}^k(M)$ de manera que $g \in \mathcal{T}^2(M)$), cuya imagen g_p es un producto interno en cada uno de los espacios tangentes T_pM de M . Así, g satisface

- i. Simetría: $g_p(v, w) = g_p(w, v)$ para todo $p \in M$ y todos $v, w \in T_pM$,
- ii. Bilinealidad: $g_p(\lambda v_1 + v_2, w) = \lambda g_p(v_1, w) + g_p(v_2, w)$ para todo $p \in M$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y todos $v_1, v_2, w \in T_pM$,
- iii. Definido positivo: $g_p(v, v) \geq 0$ y $g_p(v, v) = 0$ si, y sólo si $v = 0$, para todo $p \in M$ y todo $v \in T_pM$,

iv. No degenerado: $g_p(v, w) = 0$ para todo $w \in T_pM$ y todo $p \in M$, implica que $v = 0$.

Una **variedad Riemanniana es un par (M, g)** , donde M es una variedad suave y g es una métrica Riemanniana específica en M .

Proposición 1.1.1 ([1, Prop. 2.4]). *Toda variedad suave admite una métrica Riemanniana.*

Suponga que $p \mapsto g_p$ varía suavemente. Esto quiere decir que para cualesquiera dos campos vectoriales suaves X e Y , el producto interno $g_p(X_p, Y_p)$ (normalmente se utiliza la siguiente notación de paréntesis: para todo $v, w \in T_pM$, $\langle v, w \rangle_g = g_p(v, w)$) es una función suave de p . Cuando se desee asociar la métrica con M también se denota como g_M . Por otro lado, teniendo en mano este producto interno, se puede definir longitudes de vectores tangentes

$$\|v\|_g = \langle v, v \rangle_g^{\frac{1}{2}}$$

(de ahora en adelante $\|\cdot\|_g$ simplemente se denotará por $\|\cdot\|$), ángulos entre vectores tangentes distintos de cero, ortogonalidad e incluso una estructura de métrica natural. Dada una curva suave $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, la longitud de γ está definida por

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

donde $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ es el vector velocidad de la curva.

Definición 1.1.2. Para cada par de puntos (x, y) en M la **distancia Riemanniana entre x e y** está dada por

$$d(x, y) = \inf_{\gamma \in C^\infty(x, y)} L(\gamma),$$

donde $C^\infty(x, y)$ denota el conjunto de curvas suaves que conectan a x con y .

Ahora, suponga que (M, g_M) y (N, g_N) son dos n -variedades Riemannianas. Una **isometría** de (M, g_M) a (N, g_N) es un difeomorfismo $\psi : M \rightarrow N$ tal que $\psi^*g_N = g_M$, i.e.,

$$g_M(v, u) = g_N(d\psi(v), d\psi(u)),$$

para todo $v, u \in T_pM$ y $p \in M$, en este caso ψ^* denota el pullback por ψ y $d\psi$ el diferencial global de ψ . Se dice que (M, g_M) y (N, g_N) son **isométricos** si existe una isometría entre ellos. Una isometría $\psi : M \rightarrow M$ se llama isometría de (M, g) . El conjunto de todas las isometrías de (M, g) es un grupo bajo la composición de funciones, llamado **grupo de isometrías de (M, g)** y se denota por **$\text{Iso}(M)$** . También, es fácil ver que ser isométrico es una relación de equivalencia en la clase de todas las variedades Riemannianas. Todos los espacios vectoriales de productos internos de la misma dimensión son isométricos; de esta manera, si (M, g) es una n -variedad Riemanniana, todos los espacios tangentes T_pM son isométricos al espacio euclidiano

\mathbb{R}^n con su producto interno estándar. En consecuencia, todas las variedades Riemannianas tienen la misma estructura localmente.

Usando nuevamente el pullback, se puede definir una nueva variedad Riemanniana: sea (\tilde{M}, \tilde{g}) una variedad Riemanniana, suponga que $M \subseteq \tilde{M}$ es una subvariedad embebida o inmersa. La **métrica inducida en M** es la métrica $g = \iota^* \tilde{g}$ inducida por el mapa de inclusión $\iota : M \hookrightarrow \tilde{M}$. Con esta métrica, M se denomina **subvariedad Riemanniana** de \tilde{M} .

Sea $(U, (x^i))$ una carta de coordenadas en una n -variedad Riemanniana (M, g_M) . Los campos vectoriales $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ (en donde ∂_i es una abreviación de $\frac{\partial}{\partial x^i}$) forman una base local para TM y las 1-formas $\{dx^i\}_{i=1}^n$ forman una base dual para T^*M , es decir $dx^i(\partial_j) = \delta_j^i$. La métrica se puede escribir como

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

donde $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, y $dx^i \otimes dx^j$ denota el producto tensorial del diferencial de las coordenadas locales en U . Acá y en todo el texto se usa la **convención de suma de Einstein** de suma sobre índices repetidos para evitar expresiones muy largas.

Definición 1.1.3. Sea $\pi : TM \rightarrow M$ el haz tangente sobre una variedad suave M y sea $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de campos vectoriales suaves en M . **Una conexión en TM** es un mapa

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y, \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

- i. $\nabla_X Y$ es lineal sobre $C^\infty(M)$ en X : para $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ y $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y.$$

- ii. $\nabla_X Y$ es lineal sobre \mathbb{R} en Y : para $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla_X (\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \nabla_X Y_1 + \lambda_2 \nabla_X Y_2.$$

- iii. ∇ cumple la siguiente regla del producto: para $f \in C^\infty(M)$,

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf)Y.$$

$\nabla_X Y$ se llama **la derivada covariante de Y en la dirección X** .

Para los cálculos es importante observar cómo aparece una conexión en términos de una base

de coordenadas. Sea M una n -variedad Riemanniana y $(U, (x^i))$ una carta en M . Para cada elección de los índices i y j , se expande el campo vectorial $\nabla_{\partial_i}\partial_j$,

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k\partial_k. \quad (1.1)$$

Observe que los índices i, j y k están acotados por 1 y n . Los coeficientes Γ_{ij}^k se denominan **coeficientes de conexión de ∇** con respecto a la base de coordenadas dada. Tenga presente que la conexión ∇ no es un tensor, pues no es lineal sobre $C^\infty(M)$ en la segunda componente. Sin embargo, el mapa \mathbb{R} -lineal $\nabla : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes TM)$ en cualquier imagen ∇Y de un campo Y , es un $(1, 1)$ -tensor y en cada punto $p \in M$ da un mapa \mathbb{R} -lineal $(\nabla Y)_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ que depende suavemente de p .

Observación. Sean $X = X^i\partial_i$ y $Y = Y^j\partial_j$, contemple que

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^i\partial_i} Y^j\partial_j \\ &= X^i\nabla_{\partial_i} Y^j\partial_j \\ &= X^i((\partial_i Y^j)\partial_j + Y^j\nabla_{\partial_i}\partial_j) \\ &= X^i((\partial_i Y^j)\partial_j + Y^j\Gamma_{ij}^k\partial_k) \\ &= X^i(\partial_i Y^k + Y^j\Gamma_{ij}^k)\partial_k. \end{aligned}$$

Por lo anterior, se obtiene

$$(\nabla_{\partial_i} Y)^k = \partial_i Y^k + Y^j\Gamma_{ij}^k.$$

Definición 1.1.4. Sea (M, g) una variedad Riemanniana y ∇ una conexión en TM

i. Se dice que ∇ es **compatible con g** si para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla_X g(Y, Z) = Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \quad (1.2)$$

ii. La conexión ∇ es **simétrica** si para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se cumple

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \quad (1.3)$$

A menudo, se suele utilizar el $(1, 2)$ -tensor de torsión suave $\tau : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dado por la ecuación $\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$, para verificar que la conexión ∇ sea simétrica, pues esta es simétrica si, y sólo si su torsión se anula. De hecho, ∇ es simétrica si, y sólo si sus coeficientes de conexión en cada base de coordenadas cumplen:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Teorema 1.1.5 ([1, Teorema fundamental de la geometría Riemanniana]). *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Existe una única conexión ∇ en TM que satisface (1.2) y (1.3). Se denomina **la conexión de Levi-Civita de g** .*

En este texto siempre se usa la conexión de Levi-Civita, a menos que se especifique lo contrario.

Dada la carta de coordenadas $(U, (x^i))$ en una n -variedad Riemanniana (M, g) . Los **símbolos de Christoffel** son los coeficientes que se obtienen al expandir la conexión de Levi-Civita, estos están dados por (1.1) y se obtienen mediante la siguiente fórmula

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \quad (1.4)$$

Combinando el hecho de que el corchete de Lie de campos vectoriales coordenados es cero, y la fórmula de **Koszul**

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

el lector puede verificar (1.4).

Ejemplo 1. Sea g la métrica estándar en \mathbb{R}^n , i.e.,

$$g = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$$

(otras veces escrito simplemente por $\sum_i (dx^i)^2$). Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, tal que $X_p = X^i(p)\partial_i \Big|_p$ y $Y_p = Y^j(p)\partial_j \Big|_p$, se tiene que

$$\begin{aligned} g(X_p, Y_p) &= \sum_i dx^i \otimes dx^i(X_p, Y_p) \\ &= \sum_i dx^i(X_p)dx^i(Y_p) \\ &= \sum_i X^i(p)Y^i(p) \\ &= \langle X_p, Y_p \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto, la métrica euclidiana es la métrica Riemanniana g en \mathbb{R}^n cuyo valor en cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ es simplemente el producto escalar habitual en $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. En notación matricial, se tiene que $G = I_n$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$. Usando este hecho y (1.4), se tiene que $\Gamma_{ij}^k = 0$ para todas las elecciones de los índices i, j, k .

Proposición 1.1.6 ([1, Prop. 4.15]). *Sea M una variedad suave, y sea ∇ cualquier conexión en TM . Entonces ∇ determina de manera única una conexión en cada haz tensorial $\otimes^{(k,l)} TM$, también denotada por ∇ , tal que las siguientes condiciones se satisfacen.*

i. En $\otimes^{(1,0)} TM = TM$, ∇ coincide con la conexión dada.

ii. En $\otimes^{(0,0)} TM = M \times \mathbb{R}$, ∇ está dada por la diferenciación ordinaria de funciones:

$$\nabla_X f = Xf.$$

iii. ∇ cumple la siguiente regla del producto con respecto a los productos tensoriales:

$$\nabla_X(S \otimes G) = (\nabla_X S) \otimes G + S \otimes (\nabla_X G).$$

iv. ∇ conmuta con toda contracción o traza: si "tr" denota la traza en cualquier par de índices, uno covariante y uno contravariante, entonces

$$\nabla_X(\text{tr } S) = \text{tr}(\nabla_X S).$$

Se define la diferenciación covariante ∇_X que actúa sobre campos tensoriales. En particular, actúa sobre los campos $(0, l)$ -tensoriales

$$\nabla_X : \Gamma(\otimes^l TM) \longrightarrow \Gamma(\otimes^l TM),$$

donde

$$\nabla_X(Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_l) = \sum_{i=1}^l Y_1 \otimes \cdots \otimes \nabla_X Y_i \otimes \cdots \otimes Y_l.$$

La derivada covariante de un campo (k, l) -tensorial S con $k = 0, 1$ es entonces definida por

$$\begin{aligned} (\nabla S)(X, Z_1, \dots, Z_l) &= (\nabla_X S)(Z_1, \dots, Z_l) = \nabla_X(S(Z_1, \dots, Z_l)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^l S(Z_1, \dots, \nabla_X Z_i, \dots, Z_l). \end{aligned}$$

De forma más general se tiene la siguiente definición.

Definición 1.1.7 ([1, Prop. 4.17]). *Sea M una variedad y ∇ cualquier conexión en TM . Para cada $S \in \Gamma(\otimes^{(k,l)}(TM))$, el mapa*

$$\nabla S : \underbrace{\Omega^1(M) \times \cdots \times \Omega^1(M)}_{k\text{-copias}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{l+1\text{-copias}} \longrightarrow C^\infty(M)$$

dado por

$$\begin{aligned}
(\nabla S)(\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l, X) &= (\nabla_X S)(\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l) \\
&= X(S(\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^k S(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^i, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l) \\
&\quad - \sum_{j=1}^l S(\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, \nabla_X Y_j, \dots, Y_l),
\end{aligned}$$

define un campo $(k, l + 1)$ -tensorial suave en M llamado la **derivada covariante total de S** .

Un campo (k, l) -tensorial S se dice que es **paralelo** si $\nabla S = 0$. En una variedad Riemanniana (M, g) la métrica es siempre paralela.

Proposición 1.1.8. *En una n -variedad Riemanniana (M, g)*

$$\nabla g = 0.$$

Demostración. Observe que

$$\begin{aligned}
(\nabla g)(X, Z_1, Z_2) &= \nabla_X(g(Z_1, Z_2)) - g(\nabla_X Z_1, Z_2) - g(Z_1, \nabla_X Z_2) \\
&= g(\nabla_X Z_1, Z_2) + g(Z_1, \nabla_X Z_2) - g(\nabla_X Z_1, Z_2) - g(Z_1, \nabla_X Z_2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Igualmente, se le puede tomar la derivada total al campo $(k, l + 1)$ -tensorial ∇S , definido anteriormente para obtener el campo $(k, l + 2)$ -tensorial $\nabla(\nabla S) = \nabla^2 S$. Dados dos campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se usa la siguiente notación del campo (k, l) -tensorial denotado por $\nabla_{X,Y}^2 S$ para introducir los dos campos vectoriales precedentes en las últimas coordenadas de $\nabla^2 S$, i.e.,

$$\nabla_{X,Y}^2 S(\dots) = \nabla^2 S(\dots, Y, X).$$

Es tentativo considerar que $\nabla_{X,Y}^2 S$ y $\nabla_X(\nabla_Y S)$ son iguales, lo cual no es cierto. Sin embargo, existe la siguiente relación entre ellos:

$$\nabla_{X,Y}^2 S = \nabla_X(\nabla_Y S) - \nabla_{\nabla_X Y} S. \tag{1.5}$$

Definición 1.1.9. Sea (M, g) una variedad Riemanniana, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. El **gradiente Riemanniano de f** está dado por

$$g(\text{grad } f, X) = Xf = df(X).$$

Proposición 1.1.10 ([2, Prop. 2.2.6]). Si $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$(\nabla_X df)(Y) = g(\nabla_X \text{grad } f, Y) = \text{Hess } f(X, Y),$$

donde Hess denota el **Hessiano** de f .

El lector puede probar que para cualquier función f y vectores X e Y en un punto $p \in M$, se tiene la siguiente fórmula para el Hessiano (también denotado por algunos autores como $\nabla\nabla f$)

$$\text{Hess } f(X, Y) = X(Yf) - (\nabla_X Y)f.$$

Definición 1.1.11. Sea (M, g) una n -variedad Riemanniana y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Si $e_1, \dots, e_n \in T_p M$ es una base ortonormal, entonces la **divergencia de X** denotada por $\text{div } X$, se define por

$$\begin{aligned} \text{div } X &= \text{tr}(X \mapsto \nabla X) \\ &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i). \end{aligned}$$

Usando las definiciones 1.1.9 y 1.1.11, se obtiene

$$\begin{aligned} \text{div}(fX) &= Xf + f \text{div}(X) \\ &= g(\text{grad } f, X) + f \text{div}(X). \end{aligned}$$

1.2. Tensor de curvatura

Sea (M, g) una variedad Riemanniana. La aplicación $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ es llamado el **(1,3)-tensor de curvatura**, definido por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

No es difícil probar que R es $C^\infty(M)$ -bilineal en $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ y el operador de curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ que a cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ lo envía en $R(X, Y)Z$ es $C^\infty(M)$ -lineal. Observe que si $M = \mathbb{R}^n$, entonces $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Por tanto, se piensa en R como una forma de medir cuánto se desvía M de ser euclídeana. Por otro lado, teniendo (1.5) se sigue que

$$R(X, Y)Z = \nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,X}^2 Z \quad (1.6)$$

$$\nabla_{fX,Y}^2 Z = \nabla_{X,fY}^2 Z = f\nabla_{X,Y}^2 Z \quad (1.7)$$

y

$$\nabla_{X,Y}^2(fZ) = f\nabla_{X,Y}^2 Z + Yf\nabla_X Z + Xf\nabla_Y Z - ((\nabla_X Y)f)Z + X(Yf)Z. \quad (1.8)$$

para cualquier función $f \in C^\infty(M)$. Note que (1.6), (1.7) y (1.8) inmediatamente se derivan de la bilinealidad y linealidad de R y $R(X, Y)$, respectivamente. Otro punto al destacar es: si (x^i) son coordenadas locales, entonces R tiene la siguiente expresión

$$R = R_{ijk}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l,$$

donde los coeficientes R_{ijk}^l se definen por $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}^l \partial_l$. Además

$$R = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l,$$

donde $R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}^m$, visto a R como un $(0, 4)$ -tensor, note que

$$R_{ijkl} = R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = g(R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l).$$

Algunas simetrías del tensor de curvatura de Riemann son:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}.$$

Sea (M, g) una variedad Riemanniana y p un punto en M . Si $\pi \subset T_p M$ es un 2-plano, entonces la **curvatura seccional** de π está definida por

$$K(\pi) = g(R(e_1, e_2)e_2, e_1),$$

donde e_1, e_2 es una base ortonormal de π ; esta definición es independiente de la elección de tal base. Más general, si X e Y son dos vectores linealmente independientes de π , entonces

$$K(\pi) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - g(X, Y)^2}.$$

La curvatura seccional es independiente de los vectores que generan a π . Si X_1, X_2 y X'_1, X'_2 son dos listas de vectores linealmente independientes que generan el mismo 2-plano π , entonces

$$K(\pi_{X_1, X_2}) = K(\pi_{X'_1, X'_2}),$$

donde π_{X_1, X_2} y $\pi_{X'_1, X'_2}$ son los 2-planos generados por X_1, X_2 y X'_1, X'_2 , respectivamente.

Definición 1.2.1. La curvatura de Ricci, denotada por Ric es una traza o contracción de R . Si $e_1, \dots, e_n \in T_p M$ es una base ortonormal, entonces

$$\begin{aligned} Ric(v, w) &= \text{tr}(x \mapsto R(x, v)w) \\ &= \sum_{i=1}^n g(R(v, e_i)e_i, w). \end{aligned}$$

Por lo tanto, Ric es una forma bilineal simétrica. También podría definirse como el $(1, 1)$ -tensor simétrico

$$Ric(v) = \sum_{i=1}^n R(v, e_i)e_i.$$

Las componentes de este tensor se definen por $R_{ij} = Ric(\partial_i, \partial_j)$, están dados por

$$R_{ij} = R_{kij}^k = g^{km} R_{kijm}.$$

Proposición 1.2.2 ([1, Lemma. 7.15]). *La curvatura de Ricci es un campo 2-tensorial simétrico. Se puede expresar de cualquiera de las siguientes formas*

$$R_{ij} = R_{kij}^k = R_{ikj}^k = -R_{kij}^k = -R_{ikj}^k.$$

Cuando una variedad Riemanniana (M, g) satisface $Ric(v) = \lambda v$, o equivalentemente $Ric(v, w) = \lambda g(v, w)$, entonces (M, g) se dice que es una **variedad de Einstein con constante de Einstein** λ . Si (M, g) tiene curvatura constante λ , entonces (M, g) también es una variedad de Einstein con constante de Einstein $(n - 1)\lambda$.

Definición 1.2.3. Sea (M, g) una n -variedad Riemanniana, la **curvatura escalar de (M, g)** está dada por

$$S = \sum_{j=1}^n g(Ric(e_j), e_j),$$

donde e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de $T_p M$.

Observación. En una n -variedad de Einstein (M, g) , tomando traza a ambos lados de la igualdad $Ric = \lambda g$, se tiene

$$\lambda = \frac{S}{n}.$$

De este modo,

$$Ric = \frac{S}{n}g.$$

1.3. Forma de volumen Riemanniano

Sea (M, g) una n -variedad Riemanniana orientada. Existe una única n -forma dv_g en M llamada **forma de volumen Riemanniano** tal que, si e_1, \dots, e_n es cualquier base ortonormal para T_pM , entonces

$$dv_g(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Equivalentemente, si (x^i) son cualesquiera coordenadas locales orientadas, entonces

$$dv_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Con esta forma de volumen, se puede integrar funciones en la variedad Riemanniana orientada M . Si f es una función continua con soporte compacto y de valor real en una n -variedad Riemanniana orientada (M, g) , entonces $f dv_g$ es una n -forma con soporte compacto. Así, la integral $\int_M f dv_g$ tiene sentido. Análogamente, si M es compacta, el volumen de M se define por

$$\text{vol}(M) = \int_M dv_g.$$

Además, si (M, g) es una variedad Riemanniana orientada con frontera, y X es cualquier campo vectorial suave en M con soporte compacto, entonces

$$\int_M (\text{div } X) dv_g = \int_{\partial M} g(X, N) dv_{\tilde{g}},$$

donde N es el campo vectorial unitario que apunta hacia afuera a lo largo de ∂M y \tilde{g} es la métrica Riemanniana inducida en ∂M . Este resultado se conoce como el **Teorema de la divergencia**.

Capítulo 2

Campos vectoriales de Killing y conformes

A lo largo de una variedad Riemanniana, la métrica en cada uno de sus puntos tiende a cambiar. Sin embargo, existe una clase de campos vectoriales cuya métrica a lo largo del flujo de estos campos no cambia. La sección 2.1 está dedicada a dichos campos vectoriales denominados campos vectoriales de Killing y se estudia la relación que tienen con el grupo de isometrías. Luego, en la sección 2.2 se estudian algunas caracterizaciones de los campos vectoriales conformes. Un ejemplo son los campos vectoriales de Killing por ser un caso particular. Por último, en la sección 2.3 se generaliza el concepto de campos de Killing, a campos vectoriales 2-Killing estudiados por primera vez por Teodor Oprea en [5]. Para este capítulo, se tuvo en cuenta las referencias [1], [2], [5], [7], [8], [9], [10], [11] y [15], en donde la intención es corroborar la información de algunos de estos textos.

2.1. Campos vectoriales de Killing

Sea (M, g) una variedad Riemanniana, se puede calcular la derivada de Lie de los campos tensoriales con respecto a los campos vectoriales en M . Para la métrica g , se tiene

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = \mathcal{L}_X(g(Y, Z)) - g(\mathcal{L}_X Y, Z) - g(Y, \mathcal{L}_X Z).$$

También, se puede escribir como

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]).$$

Dado que ∇ es la conexión de Levi-Civita, se sigue que

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_X Y - [X, Y], Z) + g(Y, \nabla_X Z - [X, Z])$$

$$= g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X). \quad (2.1)$$

Definición 2.1.1. Un campo vectorial X en una variedad Riemanniana (M, g) , se dice que es un **campo vectorial de Killing** si $\mathcal{L}_X g = 0$.

Esto significa que g es invariante bajo el flujo de X , que resultan ser isometrías. De (2.1) se tiene que un campo vectorial X es de Killing si, y sólo si para todos los demás campos vectoriales Y y Z satisfacen la identidad $g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0$. Es decir, el operador $\nabla X \in \text{End}(\mathfrak{X}(M))$ resulta ser antisimétrico.

Sea $(U, (x^i))$ una carta de coordenadas en la variedad Riemanniana (M, g) y $X = X^k \partial_k$ un campo vectorial en M , primero observe que $\mathcal{L}_X dx^i = d(\mathcal{L}_X x^i) = d(X x^i) = dX^i$. Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X g &= \mathcal{L}_X g_{ij} dx^i \otimes dx^j \\ &= \mathcal{L}_X(g_{ij}) dx^i \otimes dx^j + g_{ij}(\mathcal{L}_X dx^i) \otimes dx^j + g_{ij} dx^i \otimes (\mathcal{L}_X dx^j) \\ &= X g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} dX^i \otimes dx^j + g_{ij} dx^i \otimes dX^j \\ &= (X^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i X^k + g_{ik} \partial_j X^k) dx^i \otimes dx^j. \end{aligned}$$

Si X es un campo de Killing, implica que

$$X^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i X^k + g_{ik} \partial_j X^k = 0. \quad (2.2)$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X g)(\partial_i, \partial_j) &= g(\nabla_{\partial_i} X, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_j} X) \\ &= (\nabla_{\partial_i} X)^k g_{kj} + (\nabla_{\partial_j} X)^m g_{im} \\ &= (\nabla_{\partial_i} X)^k g_{kj} + (\nabla_{\partial_j} X)^k g_{ik} \\ &= (\nabla_{\partial_i} X)_j + (\nabla_{\partial_j} X)_i, \end{aligned}$$

usando la notación $\nabla_{\partial_i} = \nabla_i$, se concluye que X es un campo de Killing si

$$(\nabla_i X)_j + (\nabla_j X)_i = 0.$$

La ecuación (2.2) es lineal tanto en el campo como en la métrica. Observe que si X es un campo de Killing, entonces $-X$ es también un campo de Killing. Si hay una n -tupla de campos de Killing $\{X_1, \dots, X_n\}$, entonces $\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n$, donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, nuevamente es un campo de Killing, en otras palabras los campos de Killing forman un \mathbb{R} -espacio vectorial denotado por $\mathfrak{iso}(M, g)$, que es un subespacio vectorial del espacio de todos los campos vectoriales suaves $\mathfrak{X}(M)$. De hecho, si X y Y son campos de Killing, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[X,Y]}g &= [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]g \\
&= \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Yg) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_Xg) \\
&= \mathcal{L}_X(0) - \mathcal{L}_Y(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esto muestra que $\mathfrak{iso}(M, g)$ junto con el corchete de Lie configura un álgebra de Lie. Además, este espacio tiene dimensión $\leq n(n+1)/2$.

Proposición 2.1.2 ([2, Prop. 8.1.4]). *Si X y X' son campos de Killing tal que $X_p = X'_p$ y $(\nabla X)_p = (\nabla X')_p$ para algún $p \in M$, entonces $X = X'$.*

Una curva parametrizada $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ se dice que es una **geodésica** si $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = 0$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. En términos de coordenadas locales (x^i) , si $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, entonces γ es una geodésica si, y sólo si sus funciones componentes satisfacen

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0,$$

donde $x(t)$ es una abreviación de $(x^1(t), \dots, x^n(t))$. Si γ es una geodésica, entonces

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 2g(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0,$$

es decir, la longitud del vector tangente $\dot{\gamma}(t)$ es constante.

Proposición 2.1.3. *Un campo vectorial X en la variedad Riemanniana (M, g) tiene longitud constante si, y sólo si cada curva integral del campo X es una geodésica en (M, g) .*

Demostración. Sea $Y \in \mathfrak{X}(M)$, dado que $\mathcal{L}_Xg(X, Y) = 0$, de (2.1) se sigue que

$$g(\nabla_X X, Y) + g(X, \nabla_Y X) = 0.$$

Como las curvas integrales de X son geodésicas (es decir, $X_p = \dot{\gamma}(0)$ con $\gamma(0) = p$, para alguna geodésica γ en M), entonces $\nabla_X X = 0$. Así

$$g(X, \nabla_Y X) = \frac{1}{2}\nabla_Y g(X, X) = 0.$$

Por lo tanto, X tiene longitud constante. □

Observación. Sea M una variedad suave, para cualesquiera dos conexiones ∇ y $\widehat{\nabla}$ en TM se define un mapa $\Upsilon : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ por

$$\Upsilon(X, Y) = \nabla_X Y - \widehat{\nabla}_X Y.$$

No es difícil mostrar que Υ es $C^\infty(M)$ -bilineal y por lo tanto, define un campo $(1, 2)$ -tensorial.

Proposición 2.1.4. *Si X es un campo de Killing, entonces $\nabla_Y(\nabla X) = R(X, Y)$ para todo campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demostración. Se calcula la derivada de Lie de la conexión ∇ , para dar el campo $(1, 2)$ -tensorial $\mathcal{L}_X \nabla$ (la derivada de Lie es un límite de una diferencia. Por la Observación precedente, la derivada de Lie de la conexión es un campo $(1, 2)$ -tensorial) como sigue: dado $Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \nabla)_Y Z &= \mathcal{L}_X \nabla_Y Z - \nabla_{\mathcal{L}_X Y} Z - \nabla_Y \mathcal{L}_X Z \\ &= [X, \nabla_Y Z] - \nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_Y [X, Z] \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_Y Z} X - \nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Y \nabla_Z X \\ &= R(X, Y)Z + \underbrace{(\nabla_Y(\nabla X))Z}_{\nabla_{Y, Z}^2 X}. \end{aligned}$$

Si X es de Killing, el flujo consiste en isometrías que conservan la conexión de Levi-Civita ∇ (no es difícil ver esto de la fórmula de Koszul, mencionada en la sección (1.1), lo que significa $\mathcal{L}_X \nabla = 0$). \square

Proposición 2.1.5. *Sea (M, g) una n -variedad Riemanniana. Para cualquier campo de Killing X , se tiene que $\operatorname{div} X = 0$.*

Demostración. Como X es cualquier campo vectorial de Killing, se tiene que

$$(\mathcal{L}_X g)(e_i, e_i) = 2g(\nabla_{e_i} X, e_i) = 0,$$

donde e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de $T_p M$. Por tanto

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i) = 0.$$

\square

Sea X un campo de Killing en la variedad Riemanniana (M, g) y f una función en M dada por $f = \frac{1}{2}g(X, X) = \frac{1}{2}\|X\|^2$. Entonces $\operatorname{grad} f = -\nabla_X X$. En efecto, dado $Y \in \mathfrak{X}(M)$, se sigue que

$$\begin{aligned} g(Y, \operatorname{grad} f) &= Yf \\ &= \frac{1}{2}(Y\|X\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(2g(\nabla_Y X, X)) \\ &= g(\nabla_Y X, X) \end{aligned}$$

$$= -g(Y, \nabla_X X).$$

Teniendo en cuenta esto, observe que

$$\begin{aligned}
\text{Hess } f(Y, Y) &= -g(\nabla_Y \nabla_X X, Y) \\
&= -g(\nabla_Y \nabla_X X, Y) + g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) - g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) + g(\nabla_{[Y, X]} X, Y) \\
&\quad - g(\nabla_{[Y, X]} X, Y) \\
&= -g(R(Y, X)X, Y) - g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) - g(\nabla_{[Y, X]} X, Y) \\
&= -R(Y, X, X, Y) - g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) - g(\nabla_{\nabla_Y X} X, Y) + g(\nabla_{\nabla_X Y} X, Y) \\
&= -R(Y, X, X, Y) - g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) + \|\nabla_Y X\|^2 - g(\nabla_X Y, \nabla_Y X) \\
&= -R(Y, X, X, Y) + \|\nabla_Y X\|^2 - \underline{X(g(\nabla_Y X, Y))} \\
&= -R(Y, X, X, Y) + \|\nabla_Y X\|^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{Hess } f(Y, Y) = -R(Y, X, X, Y) + \|\nabla_Y X\|^2. \quad (2.3)$$

Lemma 2.1.6. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y X un campo de Killing en M . Si f es una función en M dada por $f = \frac{1}{2}\|X\|^2$, entonces $\Delta f = \|\nabla X\|^2 - Ric(X, X)$ ($\Delta f = \text{div}(\text{grad } f)$ denota el **operador Laplaciano de f**).*

Demostración. Sea e_1, \dots, e_n una base ortonormal de $T_p M$, por (2.3)

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sum_{i=1}^n \text{Hess } f(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \|\nabla_{e_i} X\|^2 - \sum_{i=1}^n R(e_i, X, X, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \|\nabla_{e_i} X\|^2 - Ric(X, X) \\
&= \|\nabla X\|^2 - Ric(X, X).
\end{aligned}$$

Por ende,

$$\Delta f = \|\nabla X\|^2 - Ric(X, X). \quad (2.4)$$

□

Teorema 2.1.7 (Bochner, 1946). *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada (acá y en todo el texto cerrado significa compacto sin frontera), y X un campo de Killing en M . Entonces*

i. Si $Ric \leq 0$, entonces X es un campo vectorial paralelo.

ii. Si $Ric < 0$, entonces $X = 0$.

Demostración. Considerando (2.4) e integrando, se obtiene

$$\int_M \Delta f dv_g = \int_M \|\nabla X\|^2 dv_g - \int_M Ric(X, X) dv_g.$$

Luego,

$$\int_M \|\nabla X\|^2 dv_g = \int_M Ric(X, X) dv_g.$$

Suponiendo que $Ric \leq 0$, resulta que

$$0 \leq \int_M \|\nabla X\|^2 dv_g = \int_M Ric(X, X) dv_g \leq 0,$$

lo que implica $\|\nabla X\|^2 = 0$ y $Ric(X, X) = 0$. Así $\nabla X = 0$. Si $Ric < 0$, esta última conclusión implica que $X = 0$. \square

Corolario 2.1.8 ([2, Corolario. 8.2.3]). *Con (M, g) como en el teorema, se tiene*

$$\dim(\mathfrak{iso}(M, g)) = \dim(\text{Iso}(M, g)) \leq \dim M,$$

y $\text{Iso}(M, g)$ es finito si $Ric(M, g) < 0$.

Proposición 2.1.9. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Si X es un campo de Killing en M tal que $X = \text{grad } f$ para alguna función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, entonces*

$$\nabla X = 0 \quad \text{y} \quad \Delta f = 0.$$

Demostración. Por la Proposición 2.1.5, es fácil ver que $\Delta f = 0$. Ahora, sean $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $\text{Hess } f(Y, Z) = g(\nabla_Y \text{grad } f, Z) = g(\nabla_Y X, Z)$ es antisimétrico, ya que $\text{Hess } f(Z, Y) = -g(\nabla_Z X, Y)$. Sin embargo, $\text{Hess } f$ también es simétrico, pues como ∇ es libre de torsión, se tiene

$$\begin{aligned} [Y, Z]f &= (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y)f \Leftrightarrow Y(Zf) - Z(Yf) = (\nabla_Y Z)f - (\nabla_Z Y)f \\ &\Leftrightarrow Y(Zf) - (\nabla_Y Z)f = Z(Yf) - (\nabla_Z Y)f. \end{aligned}$$

Esto implica que $g(\nabla_Y X, Z) = 0$ para todo Z , esto a su vez implica que $\nabla_Y X = 0$ para todo Y . Así, $\nabla X = 0$. \square

2.2. Campos vectoriales conformes

Sean (N, g_N) y (M, g_M) variedades Riemannianas. Las métricas g_N y g_M se dicen **(puntualmente) conformes** si existe una función suave $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}_+$, tal que

$$g_N = e^{2\rho} g_M,$$

y **conformemente equivalentes** si existe un difeomorfismo $\psi : M \rightarrow N$, tal que $\psi^* g_N$ y $e^{2\rho} g_M$ son puntualmente conformes, ψ se denomina **función conforme**. Además, si $M = N$, entonces ψ se llama **transformación conforme**. Observe que si $\rho = 0$, entonces ψ es una isometría. Por otro lado, un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se denomina **campo conforme** si

$$\mathcal{L}_X g = 2\lambda g,$$

donde \mathcal{L}_X es la derivada de Lie en la dirección de X en M , g es la métrica Riemanniana y $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave denominada **función potencial** del campo vectorial conforme X . Se dice que un campo vectorial conforme es no trivial si el campo no es de Killing, es decir, si la función potencial λ no es cero. También, análogamente que con los campos de Killing, si X es un campo vectorial conforme, entonces

$$(\nabla_i X)_j + (\nabla_j X)_i = 2\lambda g_{ij}.$$

Además, si $X, Y \in \mathfrak{co}(TM)$, entonces $[X, Y] \in \mathfrak{co}(TM)$ ($\mathfrak{co}(TM)$ denota el conjunto de campos vectoriales conformes). En efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[X,Y]} g &= [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] g \\ &= \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y g) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X g) \\ &= \mathcal{L}_X(2\lambda_Y g) - \mathcal{L}_Y(2\lambda_X g) \\ &= (X2\lambda_Y)g + 2\lambda_Y(\mathcal{L}_X g) - (Y2\lambda_X)g - 2\lambda_X(\mathcal{L}_Y g) \\ &= (X2\lambda_Y)g + \cancel{4\lambda_Y \lambda_X g} - (Y2\lambda_X)g - \cancel{4\lambda_X \lambda_Y g} \\ &= (X2\lambda_Y - Y2\lambda_X)g. \end{aligned}$$

Esto muestra que $\mathfrak{co}(TM)$ junto con el corchete de Lie configura un álgebra de Lie.

Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Usando la fórmula de Koszul, se tiene el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Y X, Z) &= Yg(X, Z) + Xg(Y, Z) - Zg(Y, X) - g(Y, [X, Z]) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Z, [Y, X]) \\ &= g(\nabla_X Y - [X, Y], Z) + g(Y, \nabla_X Z - [X, Z]) + g(\nabla_Y X, Z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \overbrace{g(X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - g(Y, \nabla_Z X) - g(X, [Y, Z])} \\
= & \underbrace{g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X)}_{(\mathcal{L}_X g)(Y, Z)} + \underbrace{g(\nabla_Y X, Z) - g(Y, \nabla_Z X)}_{\text{curl}_X(Y, Z)}, \tag{2.5}
\end{aligned}$$

donde curl_X es un campo $(0, 2)$ -tensorial definido por (2.5), y llamado el **rotacional** de X . También, denotado por dX^\flat , en donde $\flat : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ es una aplicación dada por la ecuación $X^\flat = g(X, \cdot)$, a menudo en la literatura denominada **isomorfismo musical**. Defina un campo $(1, 1)$ -tensorial antisimétrico G en M por

$$dX^\flat(Y, Z) = 2g(GY, Z). \tag{2.6}$$

Proposición 2.2.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana, y X un campo vectorial conforme con función potencial λ . Entonces*

$$\nabla_Y X = \lambda Y + GY.$$

Demostración. Como X es un campo vectorial conforme con función potencial λ , se obtiene

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = 2\lambda g(Y, Z), \quad Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.7}$$

Utilizando (2.5), (2.6) y (2.7), observe que

$$\begin{aligned}
g(2\nabla_Y X, Z) &= (\mathcal{L}_X g)(Y, Z) + dX^\flat(Y, Z) \\
&= 2\lambda g(Y, Z) + 2g(GY, Z) \\
&= g(2\lambda Y + 2GY, Z).
\end{aligned}$$

Así,

$$\nabla_Y X = \lambda Y + GY.$$

□

Observación. Utilizando la Proposición 2.2.1, se presenta una expresión del tensor de curvatura de Riemann de la variedad Riemanniana (M, g) , mediante el próximo cálculo:

$$\begin{aligned}
R(Y, Z)X &= \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X \\
&= \nabla_Y(\lambda Z + GZ) - \nabla_Z(\lambda Y + GY) - \lambda[Y, Z] - G([Y, Z]) \\
&= \nabla_Y(\lambda Z) + \nabla_Y(GZ) - \nabla_Z(\lambda Y) - \nabla_Z(GY) - \lambda[Y, Z] - G([Y, Z]) \\
&= Z(Y\lambda) + \lambda \nabla_Y Z + \nabla_Y(GZ) - Y(Z\lambda) - \lambda \nabla_Z Y - \nabla_Z(GY) - \lambda[Y, Z] \\
&\quad - G([Y, Z]) \\
&= g(\text{grad } \lambda, Y)Z + \nabla_Y(GZ) - g(\text{grad } \lambda, Z)Y - \nabla_Z(GY) - G(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g(\text{grad } \lambda, Y)Z + \nabla_Y(GZ) - g(\text{grad } \lambda, Z)Y - \nabla_Z(GY) - G(\nabla_Y Z) + G(\nabla_Z Y) \\
&= g(\text{grad } \lambda, Y)Z - g(\text{grad } \lambda, Z)Y + (\nabla G)(Y, Z) - (\nabla G)(Z, Y).
\end{aligned}$$

Así pues,

$$R(Y, Z)X = g(\text{grad } \lambda, Y)Z - g(\text{grad } \lambda, Z)Y + (\nabla G)(Y, Z) - (\nabla G)(Z, Y).$$

De la Proposición 2.2.1, como G es antisimétrico

$$2g(\nabla_{e_i} X, e_i) = 2\lambda g_{ii} + \cancel{2g(Ge_i, e_i)},$$

sumando para $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene

$$\text{div } X = n\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\text{div } X}{n}.$$

Por consiguiente, para un campo vectorial conforme X en una variedad Riemanniana cerrada (M, g) con función potencial λ , se obtiene por el Teorema de la divergencia:

$$\int_M \lambda \, dv_g = 0.$$

Proposición 2.2.2. *Sea (M, g) una n -variedad Riemanniana cerrada y X un campo vectorial conforme con función potencial λ . Entonces*

$$\int_M g(\text{grad } \lambda, X) \, dv_g = -n \int_M \lambda^2 \, dv_g.$$

Demostración. Dado que $\text{div } X = n\lambda$, usando $\text{div}(\lambda X) = X(\lambda) + \lambda \text{div } X = g(\text{grad } \lambda, X) + \lambda \text{div } X$, se tiene

$$\text{div}(\lambda X) = g(\text{grad } \lambda, X) + n\lambda^2.$$

Luego,

$$\int_M \cancel{\text{div}(\lambda X)} \, dv_g = \int_M g(\text{grad } \lambda, X) \, dv_g + \int_M n\lambda^2 \, dv_g.$$

Por lo tanto,

$$\int_M g(\text{grad } \lambda, X) \, dv_g = -n \int_M \lambda^2 \, dv_g.$$

□

Para un campo (1,1)-tensorial T , se tiene $\|T\|^2 = \sum_i \|Te_i\|^2$, donde e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de $T_p M$.

Proposición 2.2.3 ([10, Lemma 2.4]). *Sea (M, g) una n -variedad Riemanniana cerrada y X un campo vectorial conforme en M con función potencial λ . Entonces*

$$\int_M Ric(X, X) - n(n-1)\lambda^2 - \|G\|^2 dv_g = 0.$$

Corolario 2.2.4 ([10, Corolario 2.5]). *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de curvatura de Ricci negativa. Entonces no existe un campo vectorial conforme en M distinto de cero.*

Teorema 2.2.5 ([15, Teorema 2.14. Bochner-Yano]). *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión $n \geq 2$. Si X es un campo vectorial conforme en M para el cual $Ric(X, X) \leq 0$, entonces X es un campo de Killing.*

2.3. Campos vectoriales 2-Killing

Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Se dice que un campo vectorial X sobre M es **2-Killing** si satisface

$$\mathcal{L}_X \mathcal{L}_X g = 0,$$

donde \mathcal{L}_X es la derivada de Lie en la dirección de X en M .

Teorema 2.3.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ es 2-Killing si, y sólo si para todo $U \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$R(X, U, U, X) = g(\nabla_U \nabla_X X, U) + \|\nabla_U X\|^2,$$

donde R es el tensor de curvatura Riemanniano de M .

Demostración. Como $\mathcal{L}_X \mathcal{L}_X g$ es un tensor simétrico, se tiene que: para todo $U \in \mathfrak{X}(M)$

$$\mathcal{L}_X \mathcal{L}_X g = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_X g)(U, U) = 0. \quad (2.8)$$

Usando la definición de la derivada de Lie de un tensor y (2.1), se sigue que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_X g)(U, U) &= \mathcal{L}_X((\mathcal{L}_X g)(U, U)) - (\mathcal{L}_X g)([X, U], U) - (\mathcal{L}_X g)(U, [X, U]) \\ &= 2(\mathcal{L}_X(g(\nabla_U X, U))) - (\mathcal{L}_X g)([X, U], U) \\ &= 2((\mathcal{L}_X g)(\nabla_U X, U)) + g([X, \nabla_U X], U) + \cancel{g(\nabla_U X, [X, U])} - g(\nabla_{[X, U]} X, U) \\ &\quad - \cancel{g(\nabla_U X, [X, U])} \\ &= 2((\mathcal{L}_X g)(\nabla_U X, U) + g(\nabla_X \nabla_U X, U) - \cancel{g(\nabla_{\nabla_U X} X, U)}) - g(\nabla_{[X, U]} X, U) \\ &\quad + \cancel{g(\nabla_{\nabla_U X} X, U)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(g(\nabla_{\nabla_U X} X, U) + g(\nabla_U X, \nabla_U X) + g(\nabla_X \nabla_U X, U) - g(\nabla_{\nabla_X U} X, U)) \\
&= 2(\|\nabla_U X\|^2 + g(\nabla_X \nabla_U X, U) - g(\nabla_{[X, U]} X, U)) \\
&= 2(g(\nabla_{[U, X]} X, U) + g(\nabla_X \nabla_U X, U) + \|\nabla_U X\|^2) \\
&= 2(-g(R(U, X)X, U) + g(\nabla_U \nabla_X X, U) + \|\nabla_U X\|^2).
\end{aligned}$$

De (2.8) y teniendo en cuenta que

$$g(R(U, X)X, U) = R(U, X, X, U) = R(X, U, U, X),$$

se obtiene que X es un campo vectorial 2-Killing si, y sólo si

$$R(X, U, U, X) = g(\nabla_U \nabla_X X, U) + \|\nabla_U X\|^2.$$

□

Observación. Del siguiente cálculo, se obtiene otra caracterización de los campos vectoriales 2-Killing

$$\begin{aligned}
2R(X, U, X, V) &= R(X, U + V, X, U + V) - R(X, U, X, U) - R(X, V, X, V) \\
&= -g(\nabla_{U+V} \nabla_X X, U + V) - \|\nabla_{U+V} X\|^2 + g(\nabla_U \nabla_X X, U) + \|\nabla_U X\|^2 \\
&\quad + g(\nabla_V \nabla_X X, V) + \|\nabla_V X\|^2 \\
&= -g(\nabla_U \nabla_X X + \nabla_V \nabla_X X, U + V) - \|\nabla_U X + \nabla_V X\|^2 + g(\nabla_U \nabla_X X, U) \\
&\quad + \|\nabla_U X\|^2 + g(\nabla_V \nabla_X X, V) + \|\nabla_V X\|^2 \\
&= \cancel{-g(\nabla_U \nabla_X X, U)} - g(\nabla_U \nabla_X X, V) - g(\nabla_V \nabla_X X, U) - \cancel{g(\nabla_V \nabla_X X, V)} \\
&\quad - \cancel{\|\nabla_U X\|^2} - 2g(\nabla_U X, \nabla_V X) - \cancel{\|\nabla_V X\|^2} + \cancel{g(\nabla_U \nabla_X X, U)} + \cancel{\|\nabla_U X\|^2} \\
&\quad + \cancel{g(\nabla_V \nabla_X X, V)} + \cancel{\|\nabla_V X\|^2} \\
&= -(g(\nabla_U \nabla_X X, V) + g(\nabla_V \nabla_X X, U) + 2g(\nabla_U X, \nabla_V X)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$-2R(X, U, X, V) = g(\nabla_U \nabla_X X, V) + g(\nabla_V \nabla_X X, U) + 2g(\nabla_U X, \nabla_V X).$$

Al igual que en el Teorema 2.1.7 de la sección 2.1, en una variedad Riemanniana cerrada (M, g) la clase de campos vectoriales 2-Killing que satisfacen

$$Ric(X, X) \leq 0,$$

donde Ric es el tensor de Ricci de una variedad Riemanniana (M, g) , es exactamente el conjunto de campos paralelos.

Teorema 2.3.2. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada, y X un campo vectorial 2-Killing en M . Si $Ric(X, X) \leq 0$, entonces X es un campo vectorial paralelo.*

Demostración. Sea $p \in M$ y e_1, \dots, e_n una base ortonormal en $T_p M$. Del Teorema 2.3.1 se sigue que: para todo $i \in \{1, \dots, n\}$

$$R(X, e_i, e_i, X) = g(\nabla_{e_i} \nabla_X X, e_i) + \|\nabla_{e_i} X\|^2.$$

Sumando para $i \in \{1, \dots, n\}$, se obtiene

$$Ric(X, X) = \operatorname{div}(\nabla_X X) + \operatorname{tr}(\|\nabla X\|^2).$$

Ahora, integrando en la variedad Riemanniana cerrada M y usando el Teorema de la divergencia, se tiene

$$\begin{aligned} \int_M Ric(X, X) dv_g &= \int_M \operatorname{div}(\nabla_X X) dv_g + \int_M \operatorname{tr}(\|\nabla X\|^2) dv_g \\ &= \int_M \operatorname{tr}(\|\nabla X\|^2) dv_g. \end{aligned}$$

Dado que $Ric(X, X) \leq 0$ y $\operatorname{tr}(\|\nabla X\|^2) \geq 0$, implica que

$$Ric(X, X) = 0,$$

y

$$\operatorname{tr}(\|\nabla X\|^2) = 0.$$

Esta última ecuación implica que X es un campo vectorial paralelo. \square

Teorema 2.3.3. *Sea $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ la variedad Riemanniana euclidiana. Un campo vectorial $X = X^i \partial_i$ en \mathbb{R}^n es 2-Killing si, y sólo si para todo $i \in \{1, \dots, n\}$,*

$$\partial_i X^l \partial_l X^j + \partial_j X^l \partial_l X^i + X^l \partial_l (\partial_i X^j + \partial_j X^i) + 2 \sum_{k=1}^n \partial_i X^k \partial_j X^k = 0.$$

Demostración. De la observación de esta sección, se obtiene que X es un campo vectorial 2-Killing si, y sólo si para todo $U, V \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\langle \nabla_U \nabla_X X, V \rangle + \langle \nabla_V \nabla_X X, U \rangle + 2 \langle \nabla_U X, \nabla_V X \rangle = 0.$$

Equivalentemente, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\langle \nabla_{\partial_i} \nabla_X X, \partial_j \rangle + \langle \nabla_{\partial_j} \nabla_X X, \partial_i \rangle + 2 \langle \nabla_{\partial_i} X, \nabla_{\partial_j} X \rangle = 0.$$

Como los símbolos de Christoffel son cero, implica

$$\langle \nabla_{\partial_i} \nabla_X X, \partial_j \rangle = \partial_i \langle \nabla_X X, \partial_j \rangle,$$

y

$$\langle \nabla_{\partial_j} \nabla_X X, \partial_i \rangle = \partial_j \langle \nabla_X X, \partial_i \rangle.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} & \partial_i \langle \nabla_X X, \partial_j \rangle + \partial_j \langle \nabla_X X, \partial_i \rangle + 2 \langle \nabla_{\partial_i} X, \nabla_{\partial_j} X \rangle \\ &= \partial_i (X^l \partial_l X^j) + \partial_j (X^l \partial_l X^i) + 2 \sum_{k=1}^n \partial_i X^k \partial_j X^k \\ &= \partial_i X^l \partial_l X^j + X^l \partial_i \partial_l X^j + \partial_j X^l \partial_l X^i + X^l \partial_j \partial_l X^i + 2 \sum_{k=1}^n \partial_i X^k \partial_j X^k \\ &= \partial_i X^l \partial_l X^j + \partial_j X^l \partial_l X^i + X^l \partial_l (\partial_i X^j + \partial_j X^i) + 2 \sum_{k=1}^n \partial_i X^k \partial_j X^k. \end{aligned}$$

□

Observación. Si bien, los campos vectoriales de Killing forman un álgebra de Lie, los campos vectoriales 2-Killing y a fortiori los campos n -Killing no necesariamente forman un álgebra de Lie, pues no están cerrados bajo corchetes de Lie, a menos que hayan algunas restricciones.

2.3.1. Relación con campos vectoriales monótonos

Sea (M, g) una variedad Riemanniana, y $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ cualquier geodésica. Un campo vectorial X sobre M se dice que es **monótono** si la función $\phi_X^\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi_X^\gamma(t) = g(X(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)),$$

es monótona. Si ϕ_X^γ es una función creciente o decreciente, el campo vectorial X se denomina campo vectorial creciente o decreciente, respectivamente.

Lemma 2.3.4 ([5, Teorema 1.1]). *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y X un campo vectorial en M . Se dice que X es creciente (decreciente) si, y sólo si para cualquier campo vectorial suave $Y \in \mathfrak{X}(M)$, se sigue*

$$g(\nabla_Y X, Y) \geq 0 \ (\leq 0).$$

Teorema 2.3.5. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial 2-Killing, con la propiedad de que $\nabla_X X$ es un campo vectorial creciente. Si existe un punto $p \in M$ y un vector tangente $v \in T_p M$, $v \neq 0$ de modo que $R(X_p, v, v, X_p) \leq 0$, entonces*

i. $\nabla_v X = 0$ y $R(X_p, v, v, X_p) = 0$.

ii. El campo vectorial $\nabla_X X$ no es estrictamente creciente.

Demostración. Debido a que X es un campo vectorial 2-Killing, para todo $U \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene

$$R(X, U, U, X) = g(\nabla_U \nabla_X X) + \|\nabla_U X\|^2.$$

Suponiendo que existe un punto $p \in M$ y un vector tangente $v \in T_p M$, $v \neq 0$, tal que

$$R(X_p, v, v, X_p) \leq 0. \quad (2.9)$$

De esta manera

$$R(X_p, v, v, X_p) = g(\nabla_v \nabla_X X, v) + \|\nabla_v X\|^2.$$

Luego,

$$\|\nabla_v X\|^2 = R(X_p, v, v, X_p) - g(\nabla_v \nabla_X X, v). \quad (2.10)$$

Como $\nabla_X X$ es un campo vectorial creciente, usando el Lemma 2.3.4, se sigue que

$$g(\nabla_v \nabla_X X, v) \geq 0. \quad (2.11)$$

Las relaciones (2.9), (2.10) y (2.11) implican que

$$\|\nabla_v X\|^2 = 0 \Leftrightarrow \nabla_v X = 0,$$

pues $\|\nabla_v X\|^2 \geq 0$ y la métrica g es no degenerada. Así,

$$R(X_p, v, v, X_p) = 0$$

y

$$g(\nabla_v \nabla_X X, v) = 0.$$

Por lo tanto, $\nabla_X X$ no es un campo vectorial estrictamente creciente. \square

Teorema 2.3.6. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana con curvatura seccional negativa y X un campo vectorial 2-Killing en M . Entonces*

i. $\nabla_X X$ es un campo vectorial decreciente.

ii. Si la curvatura seccional es estrictamente negativa y $\nabla_X X$ no se anula en M , entonces $\nabla_X X$ es un campo vectorial estrictamente decreciente.

Demostración. i) Dado que X es un campo vectorial 2-Killing, se tiene

$$R(X, U, U, X) = g(\nabla_U \nabla_X X) + \|\nabla_U X\|^2.$$

Luego,

$$g(\nabla_U \nabla_X X) = R(X, U, U, X) - \|\nabla_U X\|^2.$$

Como (M, g) es una variedad Riemanniana con curvatura seccional negativa, para todo $U \in \mathfrak{X}(M)$,

$$g(\nabla_U \nabla_X X, U) = R(X, U, U, X) - \|\nabla_U X\|^2 \leq 0. \quad (2.12)$$

Por el Lemma 2.3.4 $\nabla_X X$ es un campo vectorial decreciente.

ii) Suponga que la curvatura seccional es estrictamente negativa, el campo vectorial $\nabla_X X$ no se anula en M y $\nabla_X X$ no es estrictamente decreciente, entonces existe un punto $p \in M$ y un vector tangente $v \in T_p M$, tal que

$$g(\nabla_v \nabla_X X, v) = 0.$$

Por (2.12), esto implica que

$$R(X_p, v, v, X_p) = 0 \quad (2.13)$$

y

$$\nabla_v X = 0. \quad (2.14)$$

Dado que la curvatura seccional es estrictamente negativa y X_p no se anula en M , entonces (2.13) implica que X_p y v son colineales, i.e., para todo $\alpha \in \mathbb{R}^*$,

$$v = \alpha X_p,$$

utilizando (2.14), se sigue que $\nabla_{X_p} X = 0$, esto no puede ocurrir, pues se supuso que $\nabla_X X$ no se anula en M . Por lo tanto, $\nabla_X X$ es un campo vectorial estrictamente decreciente. □

Capítulo 3

Aplicaciones a solitones de Ricci

El objetivo de este capítulo es dar una relación entre los campos geométricos vistos y ciertas soluciones particulares del flujo de Ricci. En la sección 3.1 se introduce la noción de flujo de Ricci, para posteriormente estudiar las denominadas soluciones autosimilares o equivalentemente solitones de Ricci. Para el estudio de estos conceptos, se tuvo en cuenta las referencias [6], [13], [16], [17] y [18]. Luego, en la sección 3.2 los autores de [4], realizan una generalización de solitones de Ricci, que se utiliza en este capítulo para relacionarla con los campos vectoriales 2-Killing y campos conformes. Adicionalmente, estas nociones permiten definir una generalización natural de la métrica de Einstein.

3.1. Definición y propiedades

Dada una familia de métricas suaves de un parámetro $g(t)$ en una n -variedad Riemanniana M , definida en un intervalo de tiempo $I \subset \mathbb{R}$, la ecuación del **flujo de Ricci** con valor inicial $g_0 = g(0)$ está dada por la siguiente expresión

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2Ric.$$

Observación. El lector puede probar que bajo el flujo de Ricci, los símbolos de Christoffel están dados por

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k = -g^{kl} (\nabla_i R_{jl} + \nabla_j R_{ij} - \nabla_l R_{ij}).$$

Y si $(M, g(t))$ es una solución del flujo de Ricci, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta_{g(t)}) = 2R_{ij} \cdot \nabla_i \nabla_j,$$

en donde $\Delta_{g(t)}$ es el operador de Laplace actuando sobre funciones.

Hamilton demostró que para cualquier métrica suave g_0 en una n -variedad cerrada M ,

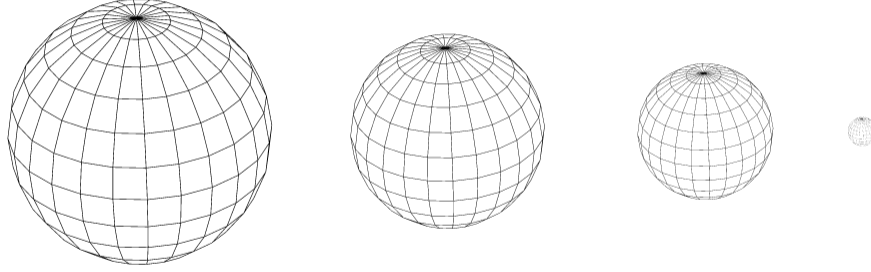


Figura 3.1: Algunas etapas del flujo de Ricci de la n -esfera

existe una única solución $g(t)$, $t \in [0, \epsilon)$ a la ecuación del flujo de Ricci para algún $\epsilon > 0$, con $g_0 = g(0)$. Por otra parte, una variedad Riemanniana (M, g) es un punto fijo del flujo de Ricci si, y sólo si la variedad es Ricci plana (i.e., el tensor de curvatura de Riemann se anula de forma idéntica). Existe una clase más amplia de soluciones que pueden considerarse como puntos fijos generalizados, se denominan soluciones autosimilares o solitones de Ricci.

Definición 3.1.1. Sea $(M, g(t))$ una solución del flujo de Ricci en un intervalo de tiempo (a, b) que contiene cero, y considere $g_0 = g(0)$. Se dice que $g(t)$ es una solución autosimilar del flujo de Ricci si existen escalares $\sigma(t)$ y difeomorfismos ψ_t de M , tal que

$$g(t) = \sigma(t)\psi_t^*(g_0),$$

para todo $t \in (a, b)$.

La Figura 3.1 representa el flujo de Ricci de la n -esfera, donde $g(t)$ es una solución autosimilar. Observe que la esfera no cambia de forma, pero sí de tamaño.

Ahora, sea (M, g_0) una variedad Riemanniana fija. Suponga que existe una constante λ y un campo vectorial completo X en M (i.e., el campo X genera un flujo global), tal que

$$-2Ric_{g_0} = \mathcal{L}_X g_0 + 2\lambda g_0. \quad (3.1)$$

En este caso, se dice que g_0 es un **solitón de Ricci**. Tenga en cuenta que, si X es un campo vectorial de Killing, entonces un solitón de Ricci es simplemente una métrica de Einstein, y se dice que el solitón es trivial. Por consiguiente, cualquier solución de (3.1), se puede considerar como una generalización de métrica de Einstein. Dado que se asume que ∇ es la conexión de Levi-Civita (y en particular ∇ es libre de torsión, que implica que el Hessiano de una función

es simétrico), si X es un campo vectorial gradiente de una función suave $-f$ en M , entonces (3.1) toma la siguiente forma

$$\text{Hess } f = \text{Ric} + \lambda g,$$

y se dice que g_0 es un **solitón de Ricci gradiente**. También, se dice que el solitón de Ricci gradiente es trivial cuando f es constante y g es Einstein.

Por otra parte, para un campo vectorial X de solitón de Ricci general, se tiene la siguiente fórmula

$$\mathcal{L}_X S = |\text{Ric}|^2 + \Delta S - 2\lambda S,$$

en donde Δ es el operador Laplaciano y S es la curvatura escalar [16].

Lemma 3.1.2. *Sea ψ el flujo generado por un campo vectorial X en M . Para cualquier campo tensorial covariante T en M , se tiene*

$$\psi_s^*(\mathcal{L}_X T) = \left(\frac{d}{dt}(\psi_t^* T) \right)_{t=s}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \psi_s^*(\mathcal{L}_X T) &= \psi_s^* \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_t^*(T) - T}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \psi_s^* \left(\frac{\psi_t^*(T) - T}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_s^*(\psi_t^*(T)) - \psi_s^*(T)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_{s+t}^*(T) - \psi_s^*(T)}{t} \\ &= \left(\frac{d}{dt}(\psi_t^* T) \right)_{t=s}. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.3. *Si $(M, g(t))$ es una solución del flujo de Ricci tomando la forma de solución autosimilar, entonces existe un campo vectorial X en M tal que (M, g_0, X) resuelve (3.1). Por el contrario, dado cualquier solitón (M, g_0, X) de (3.1), existen familias de escalares de un parámetro $\sigma(t)$ y difeomorfismos ψ_t de M tal que, $(M, g(t))$ se convierte en una solución del flujo de Ricci cuando $g(t)$ está definido por la forma que toma la solución autosimilar.*

Demostración. Suponga que $(M, g(t))$ es solución del flujo de Ricci tomando la forma de solución autosimilar. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\sigma(0) = 1$ y $\psi_0 = id_M$.

Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
-2Ric_{g_0} &= \left. \frac{\partial}{\partial t} g(t) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma(t) \cdot \psi_0^*(g_0) + \sigma(0) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi_0^*(g_0) \\
&= \dot{\sigma}(0)g_0 + \mathcal{L}_{Y_0}g_0,
\end{aligned}$$

en donde Y_t es la familia de campos vectoriales que generan los difeomorfismos ψ_t (i.e. para cada t , se tiene que ψ_t es el flujo de Y_t). Esto implica que g_0 satisface (3.1) tomando $\lambda = \frac{1}{2}\dot{\sigma}(0)$ y $X = Y_0$.

Por el contrario, suponga que g_0 satisface (3.1). Defina

$$\sigma(t) = 1 + 2\lambda t,$$

y defina una familia de campos vectoriales de un parámetro Y_t en M por

$$Y_t(p) = \frac{1}{\sigma(t)}X(p).$$

Ahora, defina una familia de métricas suaves de un parámetro en M por

$$g(t) = \sigma(t)\psi_t^*(g_0)$$

en donde ψ_t denota los difeomorfismos generados por la familia Y_t , con $\psi_0 = id_M$. Observe que $g(t)$ toma la forma de solución autosimilar. Considerando el Lemma 3.1.2, se obtiene el siguiente cálculo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g &= \frac{d\sigma}{dt} \psi_t^*(g_0) + \sigma(t) \frac{d}{dt} \psi_t^*(g_0) \\
&= \frac{d\sigma}{dt} \psi_t^*(g_0) + \sigma(t) \psi_t^*(\mathcal{L}_{Y_t}g_0) \\
&= 2\lambda \psi_t^*(g_0) + (1 + 2\lambda t) \psi_t^*(\mathcal{L}_{Y_t}g_0) \\
&= 2\lambda \psi_t^*(g_0) + \frac{1}{1 + 2\lambda t} \psi_t^*(\mathcal{L}_X g_0) + \frac{2\lambda t}{1 + 2\lambda t} \psi_t^*(\mathcal{L}_X g_0) \\
&= \psi_t^*(2\lambda g_0 + \mathcal{L}_X g_0).
\end{aligned}$$

Por (3.1), esto implica que

$$\frac{\partial}{\partial t} g = \psi_t^*(-2Ric_{g_0}) = -2Ric_g.$$

Por tanto, $g(t)$ es una solución del flujo de Ricci. □

3.2. Relación con campos vectoriales 2-Killing y conformes

Sea (M, g) una n -variedad Riemanniana, X un campo vectorial conforme en M y λ una constante, tal que estos ingredientes satisfacen (3.1). Tomando traza a ambos lados de (3.1), se tiene que

$$S = \lambda n - \operatorname{div} X,$$

en este caso

$$\lambda = \frac{S + \operatorname{div} X}{n}.$$

Proposición 3.2.1 ([17, Lemma 5.2]). *Si X es un campo vectorial conforme con $\mathcal{L}_X g = 2\lambda g$, entonces la fórmula*

$$\mathcal{L}_X Ric = -(n-2) \operatorname{Hess} \lambda - \Delta \lambda \cdot g \quad (3.2)$$

se cumple, y para $n \geq 3$ las siguientes condiciones son equivalentes

i. $\mathcal{L}_X Ric = \rho g$ para una determinada función ρ .

ii. $\operatorname{grad}(\operatorname{div} X)$ es conforme.

Definición 3.2.2. Sea (M, g) una n -variedad Riemanniana ($n > 2$). Se dice que (g, X, μ, β) es un **solitón de Ricci generalizado** si la métrica Riemanniana, el campo vectorial X y las funciones suaves μ y β satisfacen las siguiente ecuación

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_X g + \mu Ric = \beta g, \quad (3.3)$$

en donde $\mathcal{L}_X g$ es la derivada de Lie en la dirección de X de la métrica Riemanniana g , y Ric es la curvatura de Ricci de g .

Dado (M, g) una n -variedad Riemanniana. Suponga que (g, X, μ, β) es un solitón de Ricci generalizado, en donde X es un campo vectorial 2-Killing y conforme con función potencial λ en M . Se toma la derivada de Lie en la dirección de X a ambos lados de (3.3)

$$\mathcal{L}_X \left(\frac{1}{2} \mathcal{L}_X g \right) + \mathcal{L}_X \mu Ric = \mathcal{L}_X \beta g.$$

Es natural considerar la siguiente generalización de métrica de Einstein

$$\mathcal{L}_X \mu Ric = \mathcal{L}_X \beta g.$$

Implica que

$$(X\mu) Ric + \mu \mathcal{L}_X Ric = (X\beta)g + 2\lambda \beta g. \quad (3.4)$$

Usando (3.3), se tiene que

$$\begin{aligned}\mu Ric &= \beta g - \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g \\ &= \beta g - \lambda g \\ &= (\beta - \lambda)g.\end{aligned}$$

para $\mu \neq 0$, se obtiene

$$Ric = \left(\frac{\beta - \lambda}{\mu} \right) g. \quad (3.5)$$

Ahora, se reemplaza (3.2) y (3.5) en (3.4)

$$(X\mu) \left(\frac{\beta - \lambda}{\mu} \right) g + \mu(-(n-2) \text{Hess } \lambda - \Delta \lambda \cdot g) = (X\beta)g + 2\lambda\beta g,$$

tomando traza (tenga en cuenta que $\Delta f = \text{tr}(\text{Hess } f)$, donde f es una función suave en M), se tiene

$$(X\mu) \left(\frac{\beta - \lambda}{\mu} \right) n + \mu(-(n-2) \text{Hess } \lambda - \Delta \lambda \cdot n) = (X\beta)n + 2\lambda\beta n.$$

Luego,

$$\left(\frac{-2(n-1)}{n} \right) \Delta \lambda = \frac{1}{\mu} \left(X\beta + 2\lambda\beta - (X\mu) \frac{\beta - \lambda}{\mu} \right).$$

Si β y μ son constantes, entonces

$$\left(\frac{-2(n-1)}{n} \right) \Delta \lambda = \frac{2\beta}{\mu} \lambda.$$

Se concluye que λ es un vector propio del operador de Laplace con valor propio $\frac{n\beta}{\mu(1-n)}$.

Capítulo 4

Ejemplos

A continuación, se presentan ejemplos de las nociones introducidas en los capítulos anteriores. Primero, se prueban con cálculos sencillos que los campos de rotación en coordenadas polares y en coordenadas esféricas son de Killing. Luego, se toman dos ejemplos de [5] y se analizan, de forma que se generaliza uno de ellos (esta generalización no se encuentra en ninguna de nuestras referencias, por lo cual podría ser nuevo). Con estos ejemplos, se llega a la conclusión de un teorema presentado en [14] y se desarrolla la prueba. Para finalizar, se extraen ciertos ejemplos de interés de [6], [13] y [4]. También se desarrolla un ejemplo de un campo vectorial 2-Killing cuya métrica es de Einstein (este ejemplo no se encontró en ninguna de nuestras referencias).

4.1. Campos vectoriales de Killing

Ejemplo 2. Sea \mathbb{R}^2 junto con la métrica estándar $g = dx^2 + dy^2$. Restringiendo al dominio adecuado $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$, se puede reescribir usando coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, entonces $dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$, $dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g &= dx^2 + dy^2 \\ &= (\cos^2 \theta dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2 - 2r \sin \theta \cos \theta drd\theta) \\ &\quad + (\sin^2 \theta dr^2 + r^2 \cos^2 \theta d\theta^2 + 2r \sin \theta \cos \theta drd\theta) \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2. \end{aligned}$$

Se prueba que ∂_θ es un campo vectorial de Killing como sigue:

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad y \quad [g^{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}.$$

Se calcula

$$(\mathcal{L}_{\partial_\theta}g)(X, Y) = g(\nabla_X \partial_\theta, Y) + g(\nabla_Y \partial_\theta, X),$$

en donde $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, tal que $X = X^r \partial_r + X^\theta \partial_\theta$ y $Y = Y^r \partial_r + Y^\theta \partial_\theta$. De esta manera

$$\nabla_X \partial_\theta = \nabla_{X^r \partial_r + X^\theta \partial_\theta} \partial_\theta = X^r \nabla_{\partial_r} \partial_\theta + X^\theta \nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta.$$

Luego,

$$\nabla_{\partial_r} \partial_\theta = \Gamma_{r\theta}^l \partial_l = \Gamma_{r\theta}^r \partial_r + \Gamma_{r\theta}^\theta \partial_\theta,$$

por (1.4), se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma_{r\theta}^r &= \frac{1}{2} g^{rl} (\partial_r g_{\theta l} + \partial_\theta g_{rl} - \partial_l g_{r\theta}) \\ &= \frac{1}{2} g^{rr} (\partial_r g_{\theta r} + \partial_\theta g_{rr} - \partial_r g_{r\theta}) + \frac{1}{2} g^{r\theta} (\partial_r g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{r\theta} - \partial_\theta g_{r\theta}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\theta l} (\partial_r g_{\theta l} + \partial_\theta g_{rl} - \partial_l g_{r\theta}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\theta r} (\partial_r g_{\theta r} + \partial_\theta g_{rr} - \partial_r g_{r\theta}) + \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_r g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{r\theta} - \partial_\theta g_{r\theta}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} (\partial_r r^2) \\ &= \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\nabla_{\partial_r} \partial_\theta = 0 + \frac{1}{r} \partial_\theta = \frac{1}{r} \partial_\theta.$$

De la misma manera,

$$\nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta = \Gamma_{\theta\theta}^l \partial_l = \Gamma_{\theta\theta}^r \partial_r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \partial_\theta,$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{1}{2} g^{rl} (\partial_\theta g_{\theta l} + \partial_\theta g_{\theta l} - \partial_l g_{\theta\theta}) \\ &= \frac{1}{2} g^{rr} (\partial_\theta g_{\theta r} + \partial_\theta g_{\theta r} - \partial_r g_{\theta\theta}) + \frac{1}{2} g^{r\theta} (\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\theta}) \\ &= \frac{1}{2} (-\partial_r r^2) \\ &= -r \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\theta\theta}^\theta &= \frac{1}{2}g^{\theta l}(\partial_\theta g_{\theta l} + \partial_\theta g_{\theta l} - \partial_l g_{\theta\theta}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\theta r}(\partial_\theta g_{\theta r} + \partial_\theta g_{\theta r} - \partial_r g_{\theta\theta}) + \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\theta}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sustituyendo, se tiene

$$\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta = -r\partial_r + 0\partial_\theta = -r\partial_r.$$

Así,

$$\nabla_X\partial_\theta = X^r\frac{1}{r}\partial_\theta - X^\theta r\partial_r.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\nabla_Y\partial_\theta &= \nabla_{Y^r\partial_r + Y^\theta\partial_\theta}\partial_\theta \\
&= Y^r\nabla_{\partial_r}\partial_\theta + Y^\theta\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta \\
&= Y^r\frac{1}{r}\partial_\theta - Y^\theta r\partial_r.
\end{aligned}$$

Por último, se sigue que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\partial_\theta}g)(X, Y) &= g(\nabla_X\partial_\theta, Y) + g(\nabla_Y\partial_\theta, X) \\
&= g(X^r\frac{1}{r}\partial_\theta - X^\theta r\partial_r, Y^r\partial_r + Y^\theta\partial_\theta) + g(Y^r\frac{1}{r}\partial_\theta - Y^\theta r\partial_r, X^r\partial_r + X^\theta\partial_\theta) \\
&= \cancel{g(X^r\frac{1}{r}\partial_\theta, Y^r\partial_r)} + g(X^r\frac{1}{r}\partial_\theta, Y^\theta\partial_\theta) + g(-X^\theta r\partial_r, Y^r\partial_r) + \cancel{g(-X^\theta r\partial_r, Y^\theta\partial_\theta)} \\
&\quad + \cancel{g(Y^r\frac{1}{r}\partial_\theta, X^r\partial_r)} + g(Y^r\frac{1}{r}\partial_\theta, X^\theta\partial_\theta) + g(-Y^\theta r\partial_r, X^r\partial_r) + \cancel{g(-Y^\theta r\partial_r, X^\theta\partial_\theta)} \\
&= X^r\frac{1}{r}Y^\theta g_{\theta\theta} - X^\theta rY^r g_{rr} + Y^r\frac{1}{r}X^\theta g_{\theta\theta} - Y^\theta rX^r g_{rr} \\
&= \cancel{X^rY^\theta r} - \cancel{X^\theta rY^r} + \cancel{X^\theta rY^r} - \cancel{X^rY^\theta r} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Que es lo que se esperaba.

Ejemplo 3. Considere el dominio en \mathbb{R}^2 , $\{(\phi, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \phi < 2\pi, 0 < \theta < \pi\}$ y \mathbb{R}^3 con la métrica estándar $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$. En coordenadas esféricas $x = \sin \theta \cos \phi$, $y = \sin \theta \sin \phi$, $z = \cos \theta$, en donde $dx = \cos \theta d\theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi d\phi$, $dy = \cos \theta d\theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi d\phi$, $dz = -\sin \theta d\theta$. La métrica toma la siguiente expresión,

$$g = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^2 \theta d\theta^2 \cos^2 \phi - \cancel{2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi d\theta d\phi} + \sin^2 \theta \sin^2 \phi d\phi^2 \\
&\quad + \cos^2 \theta d\theta^2 \sin^2 \phi + \cancel{2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi d\theta d\phi} + \sin^2 \theta \cos^2 \phi d\phi^2 \\
&\quad + \sin^2 \theta d\theta^2 \\
&= d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.
\end{aligned}$$

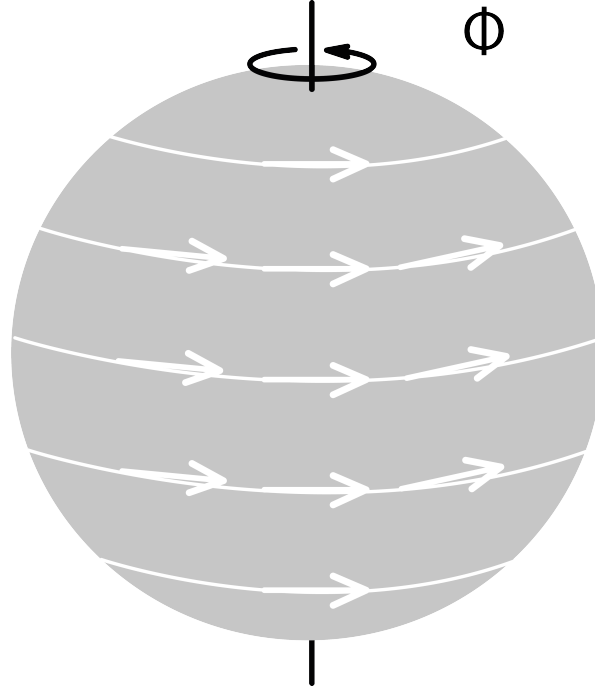


Figura 4.1: La métrica Riemanniana g es invariante bajo el flujo de ∂_ϕ

Se prueba que ∂_ϕ es un campo vectorial de Killing como sigue:

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad y \quad [g^{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}.$$

Se calcula

$$(\mathcal{L}_{\partial_\phi} g)(X, Y) = g(\nabla_X \partial_\phi, Y) + g(\nabla_Y \partial_\phi, X),$$

en donde $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, tal que $X = X^\phi \partial_\phi + X^\theta \partial_\theta$ y $Y = Y^\phi \partial_\phi + Y^\theta \partial_\theta$. Realizando un simple cálculo como en el ejemplo anterior, los símbolos de Christoffel en la 2-esfera están dados por

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\theta\theta}^\theta &= 0, & \Gamma_{\phi\phi}^\phi &= 0, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta, \\
\Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{\theta\theta}^\phi &= 0, & \Gamma_{\theta\phi}^\theta &= \Gamma_{\phi\theta}^\theta = 0.
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
\nabla_X \partial_\phi &= \nabla_{X^\phi \partial_\phi + X^\theta \partial_\theta} \partial_\phi \\
&= X^\phi \nabla_{\partial_\phi} \partial_\phi + X^\theta \nabla_{\partial_\theta} \partial_\phi \\
&= X^\phi \Gamma_{\phi\phi}^l \partial_l + X^\theta \Gamma_{\theta\phi}^k \partial_k \\
&= X^\phi (\Gamma_{\phi\phi}^\phi \partial_\phi + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \partial_\theta) + X^\theta (\Gamma_{\theta\phi}^\phi \partial_\phi + \Gamma_{\theta\phi}^\theta \partial_\theta) \\
&= X^\phi (-\sin \theta \cos \theta \partial_\theta) + X^\theta (\cot \theta \partial_\phi)
\end{aligned}$$

y

$$\nabla_Y \partial_\phi = Y^\phi (-\sin \theta \cos \theta \partial_\theta) + Y^\theta (\cot \theta \partial_\phi).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\partial_\phi} g)(X, Y) &= g(\nabla_X \partial_\phi, Y) + g(\nabla_Y \partial_\phi, X) \\
&= g(X^\theta \cot \theta \partial_\phi - X^\phi \sin \theta \cos \theta \partial_\theta, Y^\phi \partial_\phi + Y^\theta \partial_\theta) \\
&\quad + g(Y^\theta \cot \theta \partial_\phi - Y^\phi \sin \theta \cos \theta \partial_\theta, X^\phi \partial_\phi + X^\theta \partial_\theta) \\
&= g(X^\theta \cot \theta \partial_\phi, Y^\phi \partial_\phi) + \cancel{g(X^\theta \cot \theta \partial_\phi, Y^\theta \partial_\theta)} - \cancel{g(X^\phi \sin \theta \cos \theta \partial_\theta, Y^\phi \partial_\phi)} \\
&\quad - g(X^\phi \sin \theta \cos \theta \partial_\theta, Y^\theta \partial_\theta) + g(Y^\theta \cot \theta \partial_\phi, X^\phi \partial_\phi) + \cancel{g(Y^\theta \cot \theta \partial_\phi, X^\theta \partial_\theta)} \\
&\quad - \cancel{g(Y^\phi \sin \theta \cos \theta \partial_\theta, X^\phi \partial_\phi)} - g(Y^\phi \sin \theta \cos \theta \partial_\theta, X^\theta \partial_\theta) \\
&= X^\theta \cot \theta Y^\phi g_{\phi\phi} - X^\phi \sin \theta \cos \theta Y^\theta g_{\theta\theta} + Y^\theta \cot \theta X^\phi g_{\phi\phi} - Y^\phi \sin \theta \cos \theta X^\theta g_{\theta\theta} \\
&= \cancel{X^\theta Y^\phi \cos \theta \sin \theta} - \cancel{X^\phi Y^\theta \cos \theta \sin \theta} + \cancel{X^\phi Y^\theta \cos \theta \sin \theta} - \cancel{X^\theta Y^\phi \cos \theta \sin \theta} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Que es lo que se esperaba (ver Figura 4.1). El lector puede mostrar que los siguientes campos vectoriales también son de Killing

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \cos \phi \partial_\theta - \cot \theta \sin \phi \partial_\phi \\
\xi_2 &= -\sin \phi \partial_\theta - \cot \theta \cos \phi \partial_\phi.
\end{aligned}$$

Observación. Los campos vectoriales de rotación en todas las superficies de revolución son de Killing.

4.2. Campos vectoriales 2-Killing y conformes

Ejemplo 4. Si $n = 1$, entonces cualquier campo vectorial viene dado por $X = \varphi \frac{d}{dt}$, donde φ es una función diferenciable. Un campo vectorial 2-Killing en \mathbb{R} satisface

$$\varphi \varphi'' = -2(\varphi')^2. \quad (4.1)$$

Una clara solución a esta ecuación es $\varphi = C$, $C = \text{constante}$. Otra solución se tiene mediante el siguiente cálculo: realice la sustitución $u = \varphi' \Rightarrow u' = \varphi''$ en (4.1), entonces

$$\varphi \frac{du}{dt} + 2u^2 = 0.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{du}{d\varphi} u,$$

se sigue

$$\varphi \frac{du}{d\varphi} u + 2u^2 = 0.$$

Esta EDO es fácil de resolver, pues es separable

$$-2 \frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{du}{u} \Rightarrow -2 \ln(\varphi) + C = \ln(u).$$

Así,

$$u = \varphi^{-2} C.$$

Dado que se tomó $u = \varphi'$, se obtiene

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi^{-2} C.$$

Nuevamente, esta EDO es separable

$$C dt = \varphi^2 d\varphi \Rightarrow \varphi = (At + B)^{\frac{1}{3}}.$$

Por lo tanto, se tienen los siguientes campos 2-Killing

$$X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}), \quad X = C \frac{d}{dt}$$

y

$$X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \setminus \{-B/A\}), \quad X = (At + B)^{\frac{1}{3}} \frac{d}{dt}.$$

Ejemplo 5. Sea (M, g) una variedad Riemanniana y X un campo vectorial de Killing para g .

Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función estrictamente positiva en todo $p \in M$, entonces X es un campo vectorial conforme para $f(p) \cdot g_p$.

Ejemplo 6. Sea $X = x^{\frac{1}{3}}\partial_1 + y^{\frac{1}{3}}\partial_2$ un campo vectorial en $(\mathbb{R}^*)^2$, se calcula $\mathcal{L}_X \mathcal{L}_X g$ como sigue

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X g &= \mathcal{L}_X dx \otimes dx + dy \otimes dy \\
&= (\mathcal{L}_X dx) \otimes dx + dx \otimes (\mathcal{L}_X dx) + (\mathcal{L}_X dy) \otimes dy + dy \otimes (\mathcal{L}_X dy) \\
&= 2(\mathcal{L}_X dx) \otimes dx + 2(\mathcal{L}_X dy) \otimes dy \\
&= 2(d(Xx) \otimes dx + d(Xy) \otimes dy) \\
&= 2(d((x^{\frac{1}{3}}\partial_1 + y^{\frac{1}{3}}\partial_2)x) \otimes dx + d((x^{\frac{1}{3}}\partial_1 + y^{\frac{1}{3}}\partial_2)y) \otimes dy) \\
&= 2(d(x^{\frac{1}{3}}) \otimes dx + d(y^{\frac{1}{3}}) \otimes dy) \\
&= \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx \otimes dx + \frac{2}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy \otimes dy.
\end{aligned}$$

Luego, se calcula nuevamente la derivada de Lie de la expresión obtenida

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx \otimes dx + \frac{2}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy \otimes dy &= X\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)dx \otimes dx + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\mathcal{L}_X dx \otimes dx \\
&\quad + X\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{2}{3}}\right)dy \otimes dy + \frac{2}{3}y^{-\frac{2}{3}}\mathcal{L}_X dy \otimes dy \\
&= (x^{\frac{1}{3}}\partial_1 + y^{\frac{1}{3}}\partial_2)\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)dx \otimes dx + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}(2d(x^{\frac{1}{3}}) \otimes dx) \\
&\quad + (x^{\frac{1}{3}}\partial_1 + y^{\frac{1}{3}}\partial_2)\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{2}{3}}\right)dy \otimes dy + \frac{2}{3}y^{-\frac{2}{3}}(2d(y^{\frac{1}{3}}) \otimes dy) \\
&= \cancel{\frac{4}{9}x^{-\frac{4}{3}}dx \otimes dx} + \cancel{\frac{4}{9}x^{-\frac{4}{3}}dx \otimes dx} - \cancel{\frac{4}{9}y^{-\frac{4}{3}}dy \otimes dy} \\
&\quad + \cancel{\frac{4}{9}y^{-\frac{4}{3}}dy \otimes dy} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Este es un ejemplo de un campo vectorial que no es Killing, pero si es 2-Killing, Además, se puede generalizar para cualquier n tomando $X = (x^i)^{\frac{1}{3}}\partial_i$.

Ejemplo 7. Sea $X = x^{-\frac{k}{3}}\partial_1 + y^{-\frac{k}{3}}\partial_2$ un campo vectorial en $(\mathbb{R}^*)^2$, y $g = x^{k+1}dx \otimes dx + y^{k+1}dy \otimes dy$. Se calcula $\mathcal{L}_X \mathcal{L}_X g$ como sigue

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X g &= \mathcal{L}_X x^{k+1}dx \otimes dx + y^{k+1}dy \otimes dy \\
&= \mathcal{L}_X x^{k+1}dx \otimes dx + \mathcal{L}_X y^{k+1}dy \otimes dy \\
&= x^{\frac{2k}{3}} \left(\frac{k+3}{3}\right) dx \otimes dx + y^{\frac{2k}{3}} \left(\frac{k+3}{3}\right) dy \otimes dy.
\end{aligned}$$

Nuevamente, se calcula la derivada de Lie

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X x^{\frac{2k}{3}} \left(\frac{k+3}{3} \right) dx \otimes dx + y^{\frac{2k}{3}} \left(\frac{k+3}{3} \right) dy \otimes dy &= \mathcal{L}_X x^{\frac{2k}{3}} \left(\frac{k+3}{3} \right) dx \otimes dx \\
&+ \mathcal{L}_X y^{\frac{2k}{3}} \left(\frac{k+3}{3} \right) dy \otimes dy. \\
&= \frac{2k^2 + 6k}{9} x^{\frac{k-3}{3}} - \frac{2k^2 + 6k}{9} x^{\frac{k-3}{3}} \\
&+ \frac{2k^2 + 6k}{9} y^{\frac{k-3}{3}} - \frac{2k^2 + 6k}{9} y^{\frac{k-3}{3}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Este es otro ejemplo de un campo vectorial 2-Killing que no es Killing. Además, se puede generalizar para cualquier n , tomando $X = (x^i)^{-\frac{k}{3}} \partial_i$ y $g = (x^i)^{k+1} dx_i \otimes dx_i$, con $k \neq -3$. Y generaliza el Ejemplo 6.

Como se observa en los ejemplos anteriores, no todos los campos vectoriales 2-Killing son Killing. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado

Teorema 4.2.1. *Suponga que X es un campo vectorial conforme con función potencial λ en una variedad Riemanniana cerrada (M, g) con dimensión $n > 2$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- i. X es un campo vectorial de Killing.*
- ii. X es un campo vectorial 2-Killing.*

Demostración. Sea X un campo vectorial conforme y 2-Killing, i.e., existe $\lambda \in C^\infty(M)$ con $\lambda = \text{div } X/n$, tal que

$$\mathcal{L}_X g = 2\lambda g \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_X \mathcal{L}_X g = 0.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{L}_X (\mathcal{L}_X g) \\
&= \mathcal{L}_X (2\lambda g) \\
&= (X2\lambda)g + 2\lambda(\mathcal{L}_X g) \\
&= (X2\lambda)g + 4\lambda^2 g \\
&= (X2\lambda + 4\lambda^2)g.
\end{aligned}$$

Implica que $X\lambda = -2\lambda^2$. Usando $\text{div}(\lambda X) = X(\lambda) + \lambda \text{div } X$, se tiene que

$$\text{div}(\lambda X) - \lambda \text{div } X = -2\lambda^2.$$

Sustituyendo λ , se obtiene

$$\operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{div} X}{n} \cdot X \right) - \frac{\operatorname{div}^2 X}{n} = -2 \frac{\operatorname{div}^2 X}{n^2}$$

Luego,

$$\frac{1}{n} (\operatorname{div}(\operatorname{div} X \cdot X) - \operatorname{div}^2 X) = -\frac{2}{n^2} \operatorname{div}^2 X.$$

Así

$$\operatorname{div}(\operatorname{div} X \cdot X) = \left(1 - \frac{2}{n}\right) (\operatorname{div} X)^2.$$

Integrando sobre M , se tiene

$$\int_M \left(1 - \frac{2}{n}\right) (\operatorname{div} X)^2 dv_g = 0.$$

Por lo tanto $\operatorname{div} X = 0 \Rightarrow X$ es de Killing. □

4.3. Solitones de Ricci

Ejemplo 8. Al cambiar la escala, se puede suponer que $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ en (3.1). Estos tres casos corresponden a solitones que se contraen, se mantienen estables y se expanden, respectivamente. En el espacio Euclideo, junto con la métrica estándar (\mathbb{R}^n, g) , como la métrica es plana, la solución trivial de (3.1) obtenida al tomar $X = 0$, se puede considerar como un solitón de Ricci estable. Pero también se puede considerar como un solitón de Ricci gradiente en expansión, llamado el **solitón de Gauss**, tomando $\lambda = 1$ y eligiendo la función potencial

$$f(x) = \frac{1}{2}|x|^2.$$

Ejemplo 9 (Solitón de contracción del cilindro). Considere el producto de la esfera que se contrae con una línea: $(S^{n-1} \times \mathbb{R}, g(t))$, $t \in (-\infty, 0)$, $n \geq 3$, donde

$$g(t) = 2(n-1)|t|g_{S^{n-1}} + dr^2.$$

Su tensor de Ricci está dado por

$$\operatorname{Ric}(g(t)) = (n-2)g_{S^{n-1}} = \frac{1}{2|t|}g(t) - \frac{1}{2|t|}dr^2.$$

Si se toma

$$f(\theta, r, t) = \frac{r^2}{4|t|}, \quad \theta \in S^{n-1}, r \in \mathbb{R}, t < 0,$$

se tiene entonces que

$$Ric(g(t)) + \text{Hess } f(t) + \frac{1}{2t}g(t) = 0.$$

Por lo tanto, $g(t)$ es un solión de Ricci gradiente.

Ejemplo 10. Sea X un campo vectorial conforme no trivial en una n -variedad de Einstein (M, g) . Entonces se tiene

$$\mathcal{L}_X g = 2\lambda g, \quad Ric = \frac{S}{n}g.$$

Y por consiguiente, para una función suave μ en M , se tiene

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g + \mu Ric = \beta g,$$

donde $\beta = \lambda + \frac{1}{n}\mu S$. Por lo tanto, (g, X, μ, β) es un solitón de Ricci generalizado en M .

Ejemplo 11. Sea $g = \frac{3}{2}(x+y)^2(dx^2 + dy^2)$ una métrica Riemanniana y $X = (x+y)^{-1}(\partial_x + \partial_y)$ en \mathbb{R}^2 . Entonces X es 2-Killing y g es una métrica de Einstein.

Ejemplo 12. Sea g la métrica Riemanniana en coordenadas esféricas presentada en el Ejemplo 3, y X un campo vectorial en el dominio $\{(\phi, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3} - \epsilon, \text{ para algún } \epsilon > 0, -\pi \leq \theta \leq \pi\}$, dado por

$$X(\phi, \theta) = \frac{(-10 \cos \phi + (34 + 2 \cos 2\phi)^{\frac{1}{2}}) \sin \phi}{2 + 6 \cos 2\phi} \partial_\phi + \theta \partial_\theta.$$

Se verificó de forma computacional que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X g &= \frac{(-3 + \cos 2\phi + 2^{\frac{1}{2}} \cos \phi (17 + \cos 2\phi)^{\frac{1}{2}})}{1 + 3 \cos 2\phi} g \\ \text{div } X &= \frac{-3 + \cos 2\phi + 2^{\frac{1}{2}} \cos \phi (17 + \cos 2\phi)^{\frac{1}{2}}}{1 + 3 \cos 2\phi} \end{aligned}$$

y

$$\text{div}(\text{div } X \cdot X) = 0$$

$$\mathcal{L}_X \mathcal{L}_X g = 0.$$

Por consiguiente, X es un campo vectorial 2-Killing y conforme. Sin embargo, no es un campo de Killing. Además,

$$\left(g, X, 1, \frac{-1 + 7 \cos 2\phi + 2^{\frac{1}{2}} \cos \phi (17 + \cos 2\phi)^{\frac{1}{2}}}{2 + 6 \cos 2\phi} \right)$$

es un solitón de Ricci generalizado.

Bibliografia

- [1] John M. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds*. Springer, 2018.
- [2] Peter Petersen, *Riemannian Geometry*, 3 ed., Springer, 2016.
- [3] Manfredo Perdigao do Carmo, *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1993.
- [4] A.M. Blaga, A. Ishan & S. Deshmukh, *A Note on Solitons with Generalized Geodesic Vector Field*. Symmetry 2021, 13, 1104.
- [5] Teodor Oprea, *2-Killing vector fields on Riemannian manifolds*. Balkan Journal of Geometry and Its Applications 13(1), 2008.
- [6] Bennett Chow, Peng Lu & Lei Ni, *Hamilton's Ricci Flow*. American Mathematical Society, 2010.
- [7] V.N. Berestovski, YU.G. Nikonorov. *Killing vector fields of constant length on Riemannian manifolds*. Siberian Mathematical Journal Volume 49, pp 395-407 , 1960.
- [8] John M. Lee, *Introduction to Smood Manifolds*. Springer, 2003, 2013.
- [9] Shinsuke Yorozu, *Conformal and Killing Vector Fields on Complete Non-compact Riemannian Manifolds*. Advanced Studies in Pure Mathematics 3, 1984.
- [10] Sharief Deshmukh & Falleh R. Al-Solamy *Conformal vector fields and conformal transformations on a Riemannian manifold*. Balkan Society of Geometers, Geometry Balkan Press 2012.
- [11] Arthur L. Besse, *Einstein Manifolds*. Springer, 1987.
- [12] Sharief Deshmukh & Falleh R. Al-Solamy, *Conformal gradient vector fields on a compact Riemannian manifold*. Colloquium Mathematicum · January 2008
- [13] Bennett Chow & Dan Knopf, *The Ricci Flow: An Introduction*. American mathematical Society. 2004.

- [14] Hamid-Reza Fanai & Hamed Hessam, *On 2-Killing and Conformal Vector Fields on Riemannian Manifolds*. International Mathematical Forum, Vol. 12, 2017, no. 18, 869 - 878 HIKARI Ltd.
- [15] K. Yano & S. Bochner, *Curvature and Betti numbers*. Annals of Mathematics Studies, vol 32, 1953.
- [16] Ramesh Sharma, *Gradient Ricci solitons with a conformal vector field*. Journal of Geometry, 109(2), 33, 2018.
- [17] Dmitri V. Alekseevsky & Helga Baum, *Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry*. European Mathematical Society. 2008.
- [18] Pedro M. Gadea, Jaime Munoz Masque & Ihor V. Mykytyuk, *Analysis and Algebra on Differentiable Manifolds*. Springer, 2013.