LA CONSTRUCCIÓN INICIAL DE LOS NÚMEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS Y LA COMPOSICIÓN ADITIVA DE RELACIONES DE ORDEN Y DE OPERADORES

EXPERIENCIA DIDÁCTICA CON ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL ANTONIO JOSÉ URIBE.

RUTH MELINA BENITEZ MENDIVELSO

LUIS EMIR CORDOBA MOYA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C. 2018

LA CONSTRUCCIÓN INICIAL DE LOS NÚMEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS Y LA COMPOSICIÓN ADITIVA DE RELACIONES DE ORDEN Y DE OPERADORES

EXPERIENCIA DIDÁCTICA CON ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL ANTONIO JOSÉ URIBE.

RUTH MELINA BENITEZ MENDIVELSO

LUIS EMIR CORDOBA MOYA

Trabajo de grado presentado para optar al título de Magíster en Educación

Tutor del Proyecto

JORGE CASTAÑO GARCIA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C. 2018

NOTA DE ADVERTENCIA

"La universidad no se hace responsable por los conceptos emitidos por sus alumnos en sus trabajos de tesis. Sólo velará porque no se publique nada contrario al dogma y a la moral católica y porque las tesis no contengan ataques personales contra persona alguna, antes bien se vean en ellas el anhelo de buscar la verdad y la justicia."

Artículo 23, resolución No 13 del 6 de Julio de 1946,

por la cual se reglamenta lo concerniente a Tesis y Exámenes de Grado en la Pontificia Universidad Javeriana.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

RECTOR: JORGE HUMBERTO PELÁEZ PIEDRAHITA.

DECANO ACADÉMICO: FÉLIX ANTONIO GÓMEZ HERNÁNDEZ.

DIRECTOR POSGRADOS: RICARDO MAURICIO DELGADO SALAZAR.

DIRECTOR DE LINEA: JORGE CASTAÑO GARCÍA

DIRECTOR DE LA TESIS: JORGE CASTAÑO GARCÍA

AGRADECIMIENTOS

A Dios por su guía y compañía incondicional, porque gracias a su motivación y fortaleza, hemos logrado una nueva meta.

A nuestra familia por el apoyo incondicional durante la consecución de este sueño, sacrificando parte de su tiempo para apoyarnos.

A nuestro director de tesis, el Doctor Jorge Castaño García, quien con su experiencia y sabiduría nos orientó con excelencia para hacer de esta investigación un aporte significativo a nuestra práctica pedagógica.

A los estudiantes del grado sexto del Colegio Antonio José presente Uribe IED, por su disposición e interés al hacerse partícipes activos del estudio.

TABLA DE CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS. …… ……IV

INDICE DE TABLAS VII

INDICE DE FIGURAS IX

RESUMEN XI

ABSTRACT XII

INTRODUCCIÓN XIII

1 ANTECEDENTES 1

1.1 Investigaciones en Colombia 2

1.1.1 Errores que se presentan en el proceso de enseñanza de los números enteros. 2

1.1.2 Diseño e implementación de propuestas didácticas. 4

1.2 Investigaciones a nivel internacional 8

1.2.1 Errores y dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje. 8

1.2.2 Estrategias y propuestas de enseñanza. 10

2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 12

3 JUSTIFICACIÓN 20

4 OBJETIVOS 21

4.1 General 21

4.2 Específicos 21

5 MARCO TEÓRICO 22

5.1 Recorrido histórico para la construcción de los números negativos 22

5.1.1 Aparición de los números negativos. 23

5.1.2 Proceso para su legitimación. 24

5.2 Dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje 24

5.2.1 Obstáculos y concepciones de aprendizaje. 25

5.2.2 Obstáculos y concepciones de enseñanza. 26

5.3 Los números relativos 27

5.4 La composición de transformaciones 31

6 METODOLOGÍA 34

6.1 Caracterización de la población 34

6.2 Descripción global del procedimiento 35

6.3 Instrumentos de recolección de la información 36

6.3.1 Prueba inicial. 37

6.3.2 Prueba final. 40

6.3.3 Juego de la ruta. 42

6.3.4 Entrevistas Semiestructuradas. 43

6.4 Secuencia didáctica 44

6.5 Plan de Análisis 45

6.5.1 Momento uno: Organización de la información recolectada y tipificación de procedimientos y respuestas. 46

6.5.2 Momento dos: se comparan los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes en la prueba inicial y final. 47

6.5.3 Momento 3: Análisis de resultados 48

7 ANÁLISIS DE DATOS 51

7.1 Análisis Cuantitativo. Comparación de las respuestas a las tareas de composición de relaciones y de operadores 51

7.1.1 Tarea 1 52

7.1.2 Tarea 2 57

7.1.3 Tarea 3 61

7.1.4 Tarea 4 64

7.2 Análisis Cualitativo. Análisis intersujetos 67

7.2.1 Análisis comparativo sobre las tareas de composición de relaciones antes de la secuencia didáctica. 68

7.2.2 Análisis comparativo sobre las tareas de composición de relaciones después de la secuencia didáctica. 72

7.2.3 Análisis comparativo sobre las tareas de composición de operadores 79

7.2.4 Análisis de las tareas de desplazamiento durante la secuencia didáctica 86

8 CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN 94

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS 98

ANEXOS……....101

ANEXO 1: SECUENCIA DIDÁCTICA- GUÍAS DE TRABAJO 101

ANEXO 2: TABULACION DE RESULTADOS DE LAS PRUEBAS INICIAL Y FINAL.... 112

ANEXO 3: TABULACIÓN DE RESULTADOS GUÍAS DE TRABAJO DEL JUEGO DE LA RUTA ……..…131

ANEXO 4: NÁLISIS CUALITATIVO SUJETO E1 NIVEL ALTO ..... ….153

ANEXO 5: ANÁLISIS CUALITATIVO SUJETO E22 NIVEL MEDIO 172

ANEXO 6: ANÁLISIS CUALITATIVO SUJETO E20 NIVEL BAJO 189

INDICE DE TABLAS

Tabla 1: Comparación de resultados a nivel institucional, distrital y nacional de la Prueba Saber 2017. …….……..……...…….. 16

Tabla 2: Traducción de enunciados verbales a representaciones analíticas de la tarea 1. …. 38

Tabla 3: Traducción de enunciados verbales a representaciones analíticas de la tarea 2. …. 39

Tabla 4: Objetivos de la secuencia didáctica. ……..…….. 44

Tabla 5: Descripción de la secuencia didáctica. ……...…...…….. 45

Tabla 6: Instrumento 1, Tipicacion de resultados. ……...…….. 46

Tabla 7: Instrumento 2, tabulación de resultados. …….....……..…. 47

Tabla 8: Instrumento 3, comparación de los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes en la prueba inicial y final. …...…… 47

Tabla 9: Instrumento 4, Comparación de las producciones de cada estudiante en las Pruebas inicial y final. ……...……..... 48

Tabla 10: Instrumento 5: Comparación de las respuestas de cada estudiante en la tarea ___ de las pruebas inicial y final. ……..... 49

Tabla 11: Instrumento 6: Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes en las tareas de composición de la secuencia didáctica. ……... 50

Tabla 12: Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes a la tarea 1 en la prueba inicial y final. ……...…..… 53

Tabla 13: Comparación de las respuestas de cada estudiante en la tarea 1 de las pruebas inicial y final. ……..……..…….……..……... 56

Tabla 14: Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes a la tarea 2 en la prueba inicial y final. ……..……..…… 58

Tabla 15: Comparación de las respuestas de cada estudiante en la tarea 2 de las pruebas inicial y final. ……..……..….. 60

Tabla 16: Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes en la tarea 3 de las pruebas inicial y final. ……..……. 62

Tabla 17: Comparación de las respuestas de cada estudiante en la tarea 3 de las pruebas inicial y final. ……...……... 64

Tabla 18: Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes en la tarea 4 de **las** pruebas inicial y final……...…….…. 65

Tabla 19: Comparación de las respuestas de cada estudiante en la tarea 4 de las pruebas inicial y final. ……..……..….… 66

Tabla 20: Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes en las tareas de composición de relaciones antes de la secuencia didáctica. …... 69

Tabla 21: Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes en las tareas de composición de relaciones después de la secuencia didáctica. ... 73

Tabla 22: Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionadas por los estudiantes en las tareas de composición de operadores antes de la secuencia didáctica. ….. 80

Tabla 23: Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionadas por los estudiantes en las tareas de composición de operadores después de la secuencia didáctica… 81

INDICE DE FIGURAS

Figura 1, Coherencia horizontal y vertical de los estándares (Tomado de: file:///C:/Users/ruthm/Downloads/TESIS%20ENTEROS%20(1).pdf). ……..…. 15

Figura 2, Estructuras aditivas (Tomado de: Estructuras aditivas (Bruno, 2000)). …..... 32

Figura 3, Composición de estructuras aditivas (Tomado de: Estructuras aditivas (Bruno, 2000)). ……...…….……. 32

Figura 4, Juego de la ruta. …….……..……...…….. 42

Figura 5, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 1 de la guía 1. ….……..……. 87

Figura 6, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 1 de la guía 1. ……...…..……. 88

Figura 7, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 1 de la guía 1. …….,,,,,….…… 88

Figura 8, Respuesta del estudiante E1 la pregunta 1 de la guía 2. ...……..…….……. 88

Figura 9, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 1 de la guía 2. …….. 89

Figura 10, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 1 de la guía 2. …….……... 89

Figura 11, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 1 de la guía 3. …….. 90

Figura 12, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 2 de la guía 3. …….…. 90

Figura 13, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 1 de la guía 3. …… 91

Figura 14, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 2 de la guía 3. …… 91

Figura 15, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 3 de la guía 3. …… 91

Figura 16, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 2 de la guía 1. …… 93

Figura 17, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 6 de la prueba final. ..……. 93

RESUMEN

Este trabajo de investigación busca aportar a la enseñanza inicial de los números negativos. Específicamente intenta mostrar que es necesario ayudar a construir en el pensamiento numérico de los estudiantes para que ellos cuenten con mejores elementos para empezar a comprender los números negativos. Los autores de este trabajo fundamentan la construcción inicial de los negativos en el pensamiento aditivo de los estudiantes en los naturales; siguiendo a Vargas et al (1990) parece razonable aceptar que en la base de la comprensión de los enteros con sus relaciones de orden (mayor e igual y menor e igual) y sus operaciones aditivas (adición y sustracción) está en la posibilidad de componer relaciones del tipo "X es mayor que Y en n unidades" y operadores (o transformadores) aditivos en los números naturales.

Para llevar a cabo dicho la investigación, se estudió la forma como los estudiantes de sexto grado de una institución educativa oficial abordan situaciones que involucran la composición de relaciones de orden y la composición de operadores aditivos, antes y después de aplicar una secuencia didáctica, en la que se trabajaron situaciones que involucraban la realización de desplazamientos en sentidos opuestos. Se siguió una metodología de estudio de caso con tres sujetos, de niveles de rendimiento en matemática distintos (alto, medio y bajo), a quienes se aplicaron entrevistas semiestructuradas para conocer a profundidad la formas resolver y comprender las tareas propuestas y se hizo seguimiento a las respuestas que ofrecían a lo largo de la secuencia didáctica. El estudio pone en evidencia la complejidad que supone para los estudiantes abordar las situaciones de composición (de estas relaciones y operadores).

PALABRAS CLAVE

Número relativo, número negativo, operadores aditivos, orden relativo, números enteros.

ABSTRACT

This research work seeks to contribute to the initial teaching of negative numbers. Specifically, he tries to show that it is necessary to help build students' numerical thinking so that they have better elements to begin to understand negative numbers. The authors of this work base the initial construction of the negatives in the additive thinking of the students in the natural ones; following Vargas et al (1990) it seems reasonable to accept that on the basis of understanding the integers with their relations of order (greater and equal and less and equal) and their additive operations (addition and subtraction) is in the possibility of composing relationships of type "X is greater than Y in n units" and operators (or transformers) additives in natural numbers.

To carry out said research, the way in which the sixth grade students of an official educational institution address situations involving the composition of order relationships and the composition of additive operators, before and after applying a didactic sequence, was studied. the one that worked on situations that involved the realization of displacements in opposite directions. A case study methodology was followed with three subjects, of different levels of performance in mathematics (high, medium and low), to whom semistructured interviews were applied to know in depth the ways to solve and understand the proposed tasks and follow-up was done to the answers that they offered throughout the didactic sequence. The study highlights the complexity involved in the students' approach to compositional situations (of these relationships and operators).

KEYWORDS

Relative number, negative number, additive operators, relative order, integers.

INTRODUCCIÓN

El objeto de la presente investigación se encamina a describir y comparar la capacidad (el modo de operar) de los estudiantes para resolver situaciones que involucran composiciones de relaciones aditivas y de operadores aditivos en los números naturales antes y después de la aplicación de una secuencia didáctica que involucra situaciones de composición aditiva de desplazamientos en sentidos opuestos. Esta pretensión surge por la necesidad como docentes de prestar un buen servicio a la comunidad estudiantil ya que se ha visto que la enseñanza de números enteros, en particular la introducción del concepto en bachillerato no se aborda como debería.

Los investigadores revisados, evidencian que la resolución de ejercicios y problemas matemáticos en forma mecánica con números enteros es una constante, que pareciera, se perpetúa en los estudiantes, logrando aprendizajes cortos y efímeros, permitiendo desempeños académicos muy bajos. (Gómez & Sacristán, 1992). Así mismo, la incapacidad de contextualizar una situación problema matemática y de comprenderla, lleva a los alumnos a operar mecánicamente con números enteros, además de manera indiscriminada y sin el debido entendimiento de estos, lo que extrapola en una errónea resolución (Rico, 1995); operando bien los números (algunos casos); pero negándose a una comprensión real del problema.

Este tema ha sido de interés por muchos investigadores que advierten sobre las dificultades en la enseñanza, los efectos de esta, y aluden a algunas estrategias de enseñanza utilizadas que necesariamente no atacan el problema y si permiten que la dificultad persista. Es decir, se ha referido sobre las dificultades en la enseñanza, y surgen estrategias de enseñanza, aun así, el problema que alude a la formalización y reproducción algorítmica del objeto matemático se

mantiene negando la posibilidad aquellos estudiantes ávidos de conocer y de una mejor forma de este aparte de la disciplina matemática.

Nuestra propuesta, a partir de las dificultades previamente expuestas, permite describir y comparar la capacidad de los estudiantes de abordar situaciones que involucran composiciones de relaciones aditivas y de operadores aditivos en los números naturales, lo que podría advertir sobre dificultades presentadas y permitir a otros investigadores continuar esta tarea que parece tediosa de abordar. Esta comparación se pudo llevar a cabo atendiendo a las respuestas ofrecidas por los estudiantes, y las entrevistas que pretendían hacerlas más completas.

La revisión de la literatura, el proceso y resultados de esta investigación se llevaron a cabo en siete capítulos a saber:

En el capítulo 1 se exponen los antecedentes que recuperan información documental sobre los errores que se presentan en la enseñanza a nivel local e internacional, además del diseño e implementación de propuestas didácticas.

En los capítulos 2, 3 y 4, el planteamiento del problema, justificación y objetivos, que justifican la investigación a partir de la presentación de la problemática, la importancia de revisarla, y las pretensiones de los investigadores para validar la propuesta.

El siguiente capítulo, el marco teórico se desarrollará en 4 apartes que comprenden algunos elementos sobre la historia de la construcción de los números enteros, didáctica en la construcción de los números relativos, números relativos como dimensión disciplinar, y por último las características de la secuencia didáctica.

En el capítulo sexto se explicita el diseño y desarrollo de la propuesta, así también como el análisis de la intervención. Entonces, en este se encontrará la caracterización de la población, la

descripción del procedimiento de investigación, los instrumentos de recolección de datos y los instrumentos de organización y análisis de la información.

En el capítulo 7 se lleva a cabo el análisis de las producciones de los estudiantes a partir del recurso que ofrecen las respuestas escritas y las entrevistas, que dan pie a categorizar y tipificar las múltiples comprensiones de ellos.

Y, por último, en el capítulo 8, se muestran las conclusiones y consideraciones suscitadas a partir de los objetivos y lo encontrado en el análisis de las producciones.

1. ANTECEDENTES

En nuestra práctica diaria como docentes encontramos que los estudiantes presentan dificultades para la comprensión, interpretación y utilización de algunos temas y conceptos matemáticos; en particular, la comprensión de los números enteros es un tema que presenta altas dificultades para los estudiantes. Nuestro trabajo de investigación tiene como base explorar las posibles relaciones entre la capacidad[1] de los estudiantes que cursan sexto grado de: a) componer aditivamente cierta forma de relaciones de orden aditivo (**a** es mayor –o menor – que **b** en **n** unidades) y b) componer operadores o transformadores aditivos naturales (a un estado inicial natural **a** se adiciona o se sustrae un número natural), con la capacidad de manejar los números relativos[2] con la operación de adición y la relaciones de orden. Se considera importante estudiar esta posible relación en tanto que desde una perspectiva cognitiva resulta razonable asumir estas capacidades como fundamentales para acceder a la comprensión de los números enteros.

La introducción de los números negativos en el contexto escolar ha sido objeto de múltiples investigaciones tanto a nivel nacional como internacional, para efectos de nuestro estudio revisamos trabajos, por una parte, sobre métodos de enseñanza-aprendizaje propuestos por los docentes y, por otra, sobre los errores y dificultades que pueden cometer los docentes en el proceso de enseñanza y los estudiantes en el proceso de aprendizaje. La revisión bibliográfica realizada se organizó en dos grandes grupos, estudios nacionales y estudios internacionales y cada uno de estos dos grupos, según que fueran estudios orientados a identificar y caracterizar

---

[1] La expresión capacidad a lo largo de este documento se toma no como una entidad cognitiva (psicológica) sino para expresar que el sujeto es capaz de …

[2] En este estudio se entienden los números relativos como un tipo de número con un soporte intuitivo para acceder a los enteros (Vargas, 1990 Pág.176).

errores que se presentan en el proceso de enseñanza de los números enteros o que trabajaran en el diseño e implementación de propuestas didácticas.

1.1 Investigaciones en Colombia

1.1.1 Errores que se presentan en el proceso de enseñanza de los números enteros.

La intención de este tipo de investigaciones es analizar los patrones de error que cometen tanto alumnos como docentes en el aula; el objetivo principal de estos estudios es proporcionar claves sobre las estrategias que pueden resultar más convenientes a la hora de llevar a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje de los números negativos. Asimismo, los errores cometidos tanto por docentes como por estudiantes pueden emplearse como instrumento de motivación y como punto de partida para exploraciones matemáticas creativas de los alumnos, lo que implicaría que se desarrollen actividades valiosas de planteamiento y resolución de problemas.

Maca (2016) muestra los resultados de un estudio realizado a docentes de matemáticas en el cual da cuenta de los errores cometidos por ellos en el proceso de enseñanza de los números enteros. En su investigación clasifica los errores cometidos en tres grupos:

- Conceptos intuitivos circulando en el aula: la autora muestra que al indagar a los docentes acerca del concepto de número entero, ellos se limitan a describir situaciones en las que es necesario emplear este concepto, mas no a definir el concepto como tal, de ahí que no pueda esperarse que los profesores orienten una enseñanza adecuada, razón por la que resulta que el estudiante tenga dificultad en la construcción del concepto y en su aplicación en diferentes contextos.
- La ejemplificación como estrategia para enseñar los números enteros; con base en las respuestas dadas ´por los docentes a preguntas acerca de las estrategias utilizadas en la

introducción del concepto de número entero. La autora indica que la mayoría de los docentes recurre a “ejemplos típicos” como estrategia para introducir el concepto, añadiendo que la mayoría no utiliza los ejemplos adecuados y esto pueden conllevar a confusiones en los estudiantes. Además, resalta que para brindar un buen proceso de enseñanza es fundamental que los docentes manejen el concepto disciplinar y un adecuado lenguaje matemático, para que así pueda generar una estrategia didáctica que le posibilite a los estudiantes el apropiarse de todos los conocimientos sobre dicho conjunto numérico.

- Restricciones didácticas en la enseñanza de los números enteros, Maca muestra que cuando indaga a los docentes acerca del significado del material didáctico y de las estrategias utilizadas en la enseñanza de los números enteros, los docentes muestran con sus respuestas que la mayoría no tiene una visión clara acerca de lo que pretende lograr en los estudiantes, dejando ver con esto que algunos desconocen los fundamentos conceptuales referentes a las diferentes estrategias y metodologías que ayudan a la introducción de este concepto.

Como conclusión reitera que para que el estudiante logre comprender y dar sentido al concepto de número entero es necesario que el docente conozca el concepto y desarrolle un plan que le permita aplicar diversas estrategias, que promuevan la apropiación de los conceptos por parte de los estudiantes y logren disminuir así las dificultades que pueden acarrearles. Señala que la mayoría de los contenidos que se enseñan con relación a este tema se abordan en el bachillerato de manera trivial.

Pérez (2012) señala que parte de las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del concepto de número entero se debe a estrategias de enseñanza inadecuadas llevadas a cabo por los docentes; entre ellas:

- Uso exagerado de algoritmos y rutinas sin fundamento teórico
- Desarrollos de tipo algebraico, alejados de la resolución de problemas.
- Abordaje de contenidos descontextualizados y no articulados.

1.1.2 Diseño e implementación de propuestas didácticas.

Para el presente ejercicio investigativo, nos documentamos con trabajos anteriores, que se relacionan con nuestro objeto de estudio, en los que se propone el diseño de estrategias, cuyo objetivo es contribuir a superar las dificultades presentadas en el aprendizaje de los números enteros y sus operaciones a través de acciones metodológicas que favorecen el aprendizaje y permiten la adquisición y claridad del concepto de número negativo; entre ellas encontramos tres grupos que le apuntan a:

- **La comprensión del significado de numero entero, en particular del número negativo**

Acosta (2015) diseña una unidad didáctica dirigida a los estudiantes de grado séptimo con el propósito de introducir el concepto de número entero negativo y superar los obstáculos de aprendizaje a través de la implementación de material manipulativo y recreativo; esta propuesta se caracteriza por incluir situaciones de la vida diaria (saltos, recorridos, temperaturas, alturas con relación al niveles del mar, entre otros), que permiten llevar al estudiante hacia conceptualizaciones más formales del concepto matemático, llegando a afirmar como conclusión que la manipulación de materiales didácticos en clase de matemáticas, en especial en la

introducción del concepto de número negativo se convierte en una alternativa de aprendizaje, ya que los estudiantes desarrollan y aplican conceptos con más facilidad.

En el artículo publicado en la revista Educación científica y tecnológica acerca de los procesos de enseñanza y de aprendizaje del número relativo, Medina (2013) muestra que el abordar el concepto de numero relativo a partir de diferentes magnitudes de la física y otras ramas del conocimiento que se adaptan a la vida cotidiana y que se pueden agrupar en dos categorías cuyas medidas tienden a ser opuesta; ayuda a mejorar la agilidad en los estudiantes para realizar operaciones entre números negativos y positivos.

Por otra parte, Chica (2011) realiza, en su estudio de maestría, una propuesta pedagógica basada en guías de trabajo donde incluye actividades y problemas referentes al contexto del estudiante, con el objetivo de fomentar la creatividad del estudiante e incentivarlo a crear propuestas diferentes que hacen referencia a conceptos de: comparación, relación de orden, opuesto de un número, recta numérica y valor absoluto, para desarrollar el concepto de números enteros y sus operaciones; en su estudio concluye que la comprensión de la temática se hace mucho más fácil cuando se aplica a situaciones del contexto, ya que en la ejecución de propuestas metodológicas basadas en situaciones didácticas, los estudiantes se familiarizan más fácilmente con los números negativos, logrando incluso resolver preguntas que tiene un nivel de dificultad más elevado, también concluye que los estudiantes retienen el concepto de número entero y logran aplicarlo en diferentes contextos, incluso donde se retoman reglas y algoritmos de tipo memorístico.

- **Enseñanza- aprendizaje de operaciones de suma y resta (estructura aditiva)**

Chaparro (2014) aborda el concepto de número entero y sus operaciones tomando como base las dificultades que se observan en los estudiantes al intentar realizar operaciones elementales con los números enteros. En la secuencia didáctica plantea el uso de herramientas didácticas (juego de dominó) como mediación para la enseñanza de la adición y sustracción (estructuras aditivas) de números enteros. Concluye que las actividades lúdicas ayudan a entender las situaciones algorítmicas y de operaciones, permitiendo que los estudiantes comprendan de forma más adecuada el signo (+, -) como operación y como número y sepan diferenciarlo.

Otero (2015) muestra en su propuesta didáctica que a través del uso de material concreto (manipulativo) como dados, dominós, juegos con la recta numérica, entre otros, que el uso de material concreto y el manejo de conceptos referentes a su contexto (desplazamientos en diferentes direcciones) en la enseñanza de las operaciones de suma y resta (estructura aditiva) de números promueve el aprendizaje significativo y el desarrollo de habilidades operacionales mediante en los estudiantes.

Castillo (2014) señala que mediante el diseño y aplicación de objetos físicos como “el tren de los enteros”, el cual simulaba el recorrido de un pasajero a través de diversas estaciones en los que se manejan objetos de color negro y rojo simulando los enteros positivos y negativos, es de gran ayuda en el proceso de enseñanza aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros (estructura aditiva), ya que mejora notablemente las habilidades de los estudiantes para realizar notablemente estas operaciones; así como su aplicación en cuanto a problemas relacionados con suma y resta.

- **Diseño e implementación de las tecnologías de la información y la comunicación TIC en aula.**

Si bien es cierto que las Tic se convierten en una alternativa dentro del diseño de estrategias didácticas, brindando motivación a los jóvenes, observamos que las experiencias utilizadas en la introducción del concepto de número entero mantienen la misma estructura de las situaciones presenciales.

Castrillón (2013) diseñó un curso virtual a manera de aventura educativa en el que se puede aprender a realizar operaciones básicas con números enteros utilizando la plataforma educativa virtual llamada “Erudito”. Pese a que la secuencia didáctica diseñada conserva los enfoques de enseñanza comunes que se practican con enteros en modalidad presencial, genera un alto grado de motivación hacia el aprendizaje y la introducción de conceptos ya que permite que el estudiante establezca cambios en diferentes situaciones mostrando avances conceptuales en cuanto al significado de numero negativo en diferentes contextos. También afirma que dicha metodología permite establecer métodos de enseñanza con miras a la comprensión y transformación de prácticas educativas.

Los resultados del trabajo de Castrillón dejan claro que la mayoría de los estudiantes no sabe realizar operaciones básicas con números enteros, por lo tanto, se hace necesario subsanar estas deficiencias y enseñarles a operar con números enteros, ya que generan dificultades insuperables en el proceso de enseñanza–aprendizaje.

En su tesis de maestría, Cano (2015) diseña una estrategia didáctica con el fin de mejorar el proceso de enseñanza de las matemáticas e involucrar la creación de videos, juegos interactivos, actividades de aprendizaje y cuestionarios on-line; este proyecto se basa en la construcción de un sitio web, diseñado con una ruta metodológica que le permite al estudiante aprender paso a paso las operaciones básicas, además afirma que el diseño e implementación de sitios WEB

interactivos como estrategia didáctica puede mejorar el proceso de enseñanza de los números enteros y de sus operaciones.

En parte de los trabajos de investigación revisados encontramos que parte de los errores y dificultades que se dan en el proceso de enseñanza- aprendizaje del número entero se debe a que los docentes no manejan los fundamentos teóricos como tal y que solo se vean conceptos intuitivos circulando en el aula, además de que la mecanización de procesos y desarrollos de tipo algebraico se convierta en un uso exagerado de algoritmos y rutinas sin fundamento teórico y sin relación alguna con la ejecución de problemas. Otros de los estudios tienen como propósito generar destrezas en el proceso de enseñanza - aprendizaje del número relativo en contextos de la vida cotidiana utilizando ejemplos referentes a desplazamientos, temperaturas, deportes, entre otros y se propone trabajar a partir de situaciones concretas, para luego ir definiendo el concepto y por último mostrar a los estudiantes la utilidad del número relativo y sus aplicaciones.

1.2 Investigaciones a nivel internacional

Para la revisión de investigaciones a nivel internacional se toman los trabajos realizados por Vargas, et al., (1990) y Cid (2003). Eva cid realiza un juicioso estado del arte de los trabajos realizados sobre los números enteros.

1.2.1 Errores y dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Autores como Cid (2003), y Vargas, et al., (1990) señalan que, entre las propuestas didácticas, trabajos y artículos referentes al estudio del número entero y su introducción en el aula, encontraron investigaciones que indican los errores y dificultades que se presentan tanto en el proceso de enseñanza como en el de aprendizaje de este concepto; entre ellos se encontró:

- **Representación en la recta numérica o desplazamientos**

Bruno (2003), en su estudio sobre estructuras aditivas con números negativos publicado en la revista Enseñanza de las ciencias, señala que los estudiantes presentan dificultades para interpretar la suma y la resta de números enteros usando la recta numérica, ya que terminan ubicando los resultados obtenidos como puntos aislados y no como vectores como debería ser.

También señala que los estudiantes usan estrategias básicas (recta numérica y operaciones) para resolver problemas que incluyen la suma y la resta de números enteros (estructura aditiva), pero son incapaces de establecer una conexión lógica entre los dos métodos (recta numérica y algoritmos) cuando se les pide que los usen al tiempo.

- **Modelos de fichas de dos colores**

Gallardo, (1994) y otros autores mencionados por Vargas, et al., (1990) y por Cid (2003), en sus trabajos de investigación, afirman que el utilizar el modelo de fichas de dos colores lleva a que se produzcan dificultades en la introducción e interpretación de la resta de números enteros, además, se pueden producir confusiones entre las estructuras aditivas y multiplicativas. Bell (2003), confirma que, en la parte contextual, al resolver problemas los estudiantes interpretan la suma ligada únicamente a las acciones de “añadir” o de” ganar” y la resta únicamente la ven como un sinónimo de “quitar”.

- **Uso de modelos concretos**

Las dificultades que presentan los estudiantes cuando se utilizan modelos concretos en el proceso de enseñanza aprendizaje, implica según Bell (2003), que no todos los estudiantes manejen expresiones contrarias cuando hay que hallar diferencias; por ejemplo, no interpretan adecuadamente las expresiones “más arriba y más abajo”, para calcular posiciones, o las expresiones “antes o después” para indicar el lugar.

Pese a que los modelos concretos pueden ser una herramienta muy valiosa en la introducción del concepto de número entero, es necesario entender que sólo se está facilitando ejemplos al estudiante y por tanto no es posible esperar que el adquiera un concepto que no se ha facilitado, Vargas, et al., (1990).

Además de los autores que han hecho investigaciones sobre errores y dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje, existen aquellos que relacionan el cómo los estudiantes asumen ciertos comportamientos al interpretar los números enteros; en particular los números negativos. Como ejemplo podemos mostrar que algunos estudiantes interpretan el signo (-) menos solo como algo desfavorable olvidando su contextualización y olvidando por completo sus características.

1.2.2 Estrategias y propuestas de enseñanza.

La introducción del concepto de número negativo por medio de modelos concretos es uno de los métodos que se usa con más frecuencia en el diseño de secuencias didácticas que pretenden introducir el concepto de numero entero y el de sus operaciones (suma y resta) de estructura aditiva Cid (2003). Esta autora clasifica en distintos modelos los diferentes trabajos que referencia, entre ellos están:

- **Modelos de neutralización:** En los modelos de neutralización, los números enteros expresan medidas de magnitud que pueden tener el mismo sentido o sentidos opuestos y los signos (+, _-) indican el sentido de la magnitud, mientras que los signos operativos binarios y unarios se relacionan con las acciones de añadir, quitar, reunir o separar, en este caso, los más utilizados en las secuencias didácticas propuestas incluyen fichas de dos colores, deudas y haberes, pérdidas y ganancias, personas que suben o bajan, etc.

- **Modelos de desplazamiento:** Los números enteros indican la posición con respecto a un punto de referencia y manejan la composición de movimientos o desplazamientos en diferentes sentidos. En cuanto a este tipo de modelo Cid (2003) muestra que existen propuestas como personajes u objetos que avanzan o retroceden a lo largo de un camino, peldaños que suben o bajan, temperaturas por encima o por debajo de cero, ascensores, alturas con respecto al nivel del mar, fechas con respecto a antes o después de Cristo, etc.

Pese a que existen diferentes propuestas, con diferentes métodos, es necesario comentar que casi ningún autor discute la posición de los números negativos en el currículo escolar, ni el momento en el que se debe introducir el concepto, sus propuestas se restringen a la generación de estrategias que permitan generar esa introducción Cid (2003).

Se puede afirmar que la utilización de modelos concretos en la introducción del concepto de número entero y de sus operaciones es una de las opciones más utilizada hoy en día por los docentes en sus prácticas diarias, sin embargo, los obstáculos que pueden venir inmersos en la utilización de este tipo de métodos se toman más como un mal proceso de enseñanza que como un esquema cognitivo inadecuado.

Además de buscar errores en el proceso de enseñanza y diseñar propuestas didácticas a fin de corregir algunos de estos errores, no hemos encontrado investigaciones que busquen explicar desde la cognición de los estudiantes qué es lo que hace tan difícil pasar de los números sin signo a positivos y negativos, de tal forma que se ofrezca otra mirada al tratar de describir el proceso y las dificultades que muestran los estudiantes cuando llevan a cabo la introducción del concepto de número entero.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática se han reportado diferentes tipos de dificultades, la introducción del concepto de número entero en particular del número negativo y del manejo de la estructura aditiva (operaciones de suma y resta) es una de ellas; si bien es cierto que se han propuesto diversas estrategias de enseñanza, aun no se ve resuelto por completo este problema. Esto nos ha llevado a reflexionar acerca de hacer algo orientado a la comprensión del proceso de construcción del número entero por parte de estudiantes que se inician en la idea de números negativos.

En las investigaciones y publicaciones revisadas al respecto, la mayoría de los autores está de acuerdo en que la dificultad en el proceso de enseñanza aprendizaje de los números enteros, en particular de los números negativos, se debe a:

- Muchas veces el docente introduce el concepto tomándolo como algo ya establecido, suponiendo que los estudiantes lo conocen y, por tanto, pueden modificar por si mismos las ideas que poseen sobre los números naturales.
- El proceso de enseñanza aprendizaje de los números negativos se hace a través de algoritmos y la transmisión de reglas con las que se operan los números naturales, lo cual se convierte en un obstáculo de aprendizaje ya que no considera a los números enteros con naturaleza propia.
- Otra problemática con relación a los números enteros se refiere a la contextualización de estos, Vargas, et al., (1990) indica que los números relativos expresan cantidades que pueden ser positivas o negativas de acuerdo con el punto de referencia indicado.

Si bien es cierto que existen gran cantidad de investigaciones relacionadas con este tema, no encontramos aquellas relacionadas con los procesos de pensamiento numérico de los estudiantes, más exactamente, con el pensamiento aditivo, cuando se lleva a cabo la introducción del concepto de número entero en el aula; a nuestro parecer investigaciones en esta dirección podrían aportar elementos al intentar explicar las dificultades que representa el tránsito de los números sin signos a los números positivos y negativos.

En Colombia, se propone la introducción del concepto de número entero a partir del grado sexto de educación básica, lo cual se enmarca en los requerimientos descritos para el grado séptimo de los estándares básicos de competencias en matemáticas y en los Derechos Básicos de Aprendizaje: "*Interpreta los números enteros y racionales (en sus representaciones de fracción y de decimal) con sus operaciones, en diferentes contextos, al resolver problemas de variación, repartos, particiones, estimaciones, etc. Reconoce y establece diferentes relaciones (de orden y equivalencia y las utiliza para argumentar procedimientos", (*Derechos Básicos de Aprendizaje, 2015, p.45), donde se propone como evidencia de aprendizaje para el grado sexto que el estudiante sea capaz de resolver problemas donde intervengan cantidades positivas y negativas y sean capaces de utilizar diferentes estrategias en la solución de estos.

"Evidencias de aprendizaje

- *Resuelve problemas en los que intervienen cantidades positivas y negativas en procesos de comparación, transformación y representación.*
- *Propone y justifica diferentes estrategias para resolver problemas con números enteros, racionales (en sus representaciones de fracción y de decimal) en contextos escolares y extraescolares.*
- *Representa en la recta numérica la posición de un número utilizando diferentes estrategias.*
- *Interpreta y justifica cálculos numéricos al solucionar problemas"* (MEN, 2015, p.45).

De acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, (MEN, 2006), la introducción de los números enteros en la escuela no se hace explícita como contenido matemático en el conjunto de grados de 6º a 7o, esto es, por la misma naturaleza de los de competencias donde se promueve el trabajo en diferentes contextos y dominios numéricos, lo que se puede interpretar como números naturales, enteros y racionales, y es de esta manera que queda abierta la posibilidad que en ciclos de escolaridad anteriores a estos grados se puedan abordar identificar y usar medidas relativas en distintos contextos.

Además, es preciso resaltar que en los Lineamientos Curriculares de Matemática, citado por Navia y Orozco, (2012), se observa que en lo estipulado para trabajar pensamiento numérico no se establece la formalización de los números enteros, pero si hay una postura más desde la construcción de los números enteros en el aspecto de número relativo, entendido como número contextualizado, donde los estudiantes se acercan al avance del pensamiento numérico por medio de situaciones didácticas como propuestas de trabajo en el aula. En el estudio del pensamiento numérico, los puntos de referencia absolutos o relativos son importantes, sobre todo, cuando se trata de hacer interpretaciones de los números enteros y de sus operaciones en la recta numérica, o de utilizarlos para representar situaciones de la vida real.

Para nuestra investigación, consideramos necesario seleccionar un estándar de pensamiento numérico del grado sexto a séptimo, como referente (Estándar: Utilizar números enteros en sus diferentes representaciones y en diversos contextos para resolver problemas) y establecer la relación de este con otros estándares del mismo pensamiento y con estándares de otros pensamientos del mismo nivel con el fin de visualizar el papel que juegan las actividades propuestas en el desarrollo del pensamiento numérico.

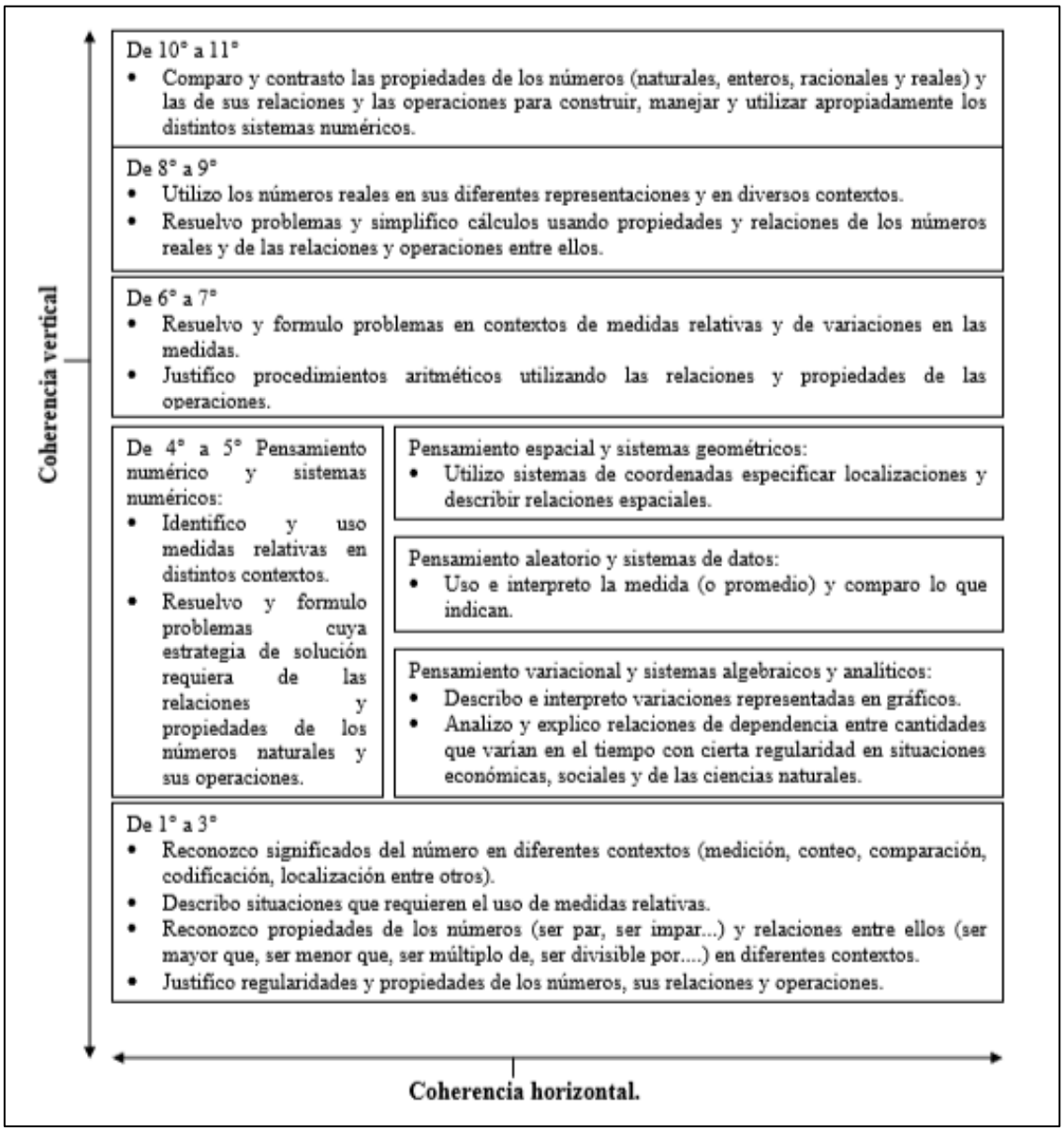


Figura 1, Coherencia horizontal y vertical de los estándares (Tomado de: File:///C:/Users/ruthm/Downloads/TESIS%20ENTEROS%20(1).pdf).

Por otra parte, a nivel nacional el ICFES evalúa a los estudiantes mediante la prueba SABER con el fin de medir los desempeños de estos en los componentes propios de cada área; en matemáticas el pensamiento numérico es uno de los que refleja mayor dificultad en el aprendizaje de conceptos y procesos básicos que se proponen en la misma.

Esta investigación se justifica en los resultados de las pruebas que se han realizado para medir la calidad de la educación en Colombia, el área de matemáticas muestra porcentajes bastante bajos en calificación deficiente; en particular, la Institución Educativa Distrital Antonio José Uribe (base del estudio) muestra un porcentaje muy alto en cuanto a conceptos matemáticos se refiere.

A nivel institucional vemos que la mayoría de las veces se utiliza un modelo reproduccionista para enseñanza de conceptos matemáticos, se presentan explicaciones sobre los conceptos y teorías relativas al tema y luego se suministran los procedimientos involucrados, a la manera de una receta de cómo resolver un problema y con esto se espera que los estudiantes comprendan y posteriormente apliquen los que se les ha instruido.

Tabla 1:

Comparación de resultados a nivel institucional, distrital y nacional de la Prueba Saber 2017

PRUEBA SABER 2017				
Grado	**Nivel**	**Porcentaje**		
		Nacional	**Distrital**	**Institucional**
Quinto	BAJO	43%	31%	61%
	MINIMO	29%	31%	30%
	SATISFACTORIO	20%	20%	7%
	AVANZADO	18%	18%	1%
Noveno	BAJO	22%	14%	39%
	MINIMO	53%	50%	54%
	SATISFACTORIO	20%	27%	7%
	AVANZADO	6%	0%	0%

Origen: Creación propia

Muchas de las alternativas que se ofrecen para la enseñanza de los números positivos y negativos, muestran las limitaciones que se advierten en las investigaciones que se han expuesto.

Parece que aún falta por entender qué es lo que se tiene que ayudar a construir en el pensamiento numérico de los estudiantes para acceder a compresiones adecuadas de los números enteros.

Este trabajo busca aportar en este sentido. Dado que la tarea es amplia y compleja, que supera las posibilidades de tiempo y conocimiento de los autores, se limita a explorar posibles relaciones entre algunos aspectos que a nuestro parecer no se encuentran en la literatura y que consideramos básicos.

Nos parece lícito afirmar que la posibilidad de comprender los números positivos y negativos se vincula con el pensamiento aditivo de los estudiantes. Esos objetos matemáticos que reconocemos como naturales y enteros se construyen a partir una estructura aditiva (la axiomatización que presenta Peano sugiere esta afirmación). De manera que podría pensarse que en la base de la comprensión de los enteros con sus relaciones de orden (mayor e igual y menor e igual) y sus operaciones aditivas (adición y sustracción) está en la posibilidad de componer relaciones de orden y operadores en los números naturales. Obsérvese que son relaciones y operaciones en los naturales y que para ser resueltas no se necesita de otro tipo de números diferentes a los naturales, lo que se necesita es una construcción adecuada por parte de los estudiantes del orden y de lo aditivo (un pensamiento que posibilite una adecuada comprensión de la estructura aditiva de los naturales). Es esto sobre lo que se pretende indagar; específicamente, se busca explorar vínculos entre dos capacidades de los estudiantes, la primera de estas capacidades corresponde a poder realizar: a) composiciones de dos relaciones especiales de orden (esto es: si **a** es mayor que **b** en **n** unidades y **b** es menor que **c** en **m** unidades, tener un pensamiento que posibilite operar con estas dos relaciones - permita entender-para obtener una nueva relación, es decir que permita afirmar que por lo tanto **a** es mayor que **c** en **n - m**

unidades o **a** es menor que **c** en **n- m** unidades) Ostra, (2005) y b) de dos transformaciones aditivas, Borjas. (2009), (esto es, a se aplica el operador +**a** y al resultado obtenido se aplica –**b**, poder componer estos dos operadores, es decir lograr entender que a **X** se aplica el operador cuyo resultado no es más que la composición aditiva de **+a** y **–b**) y la segunda de estas capacidades corresponde a empezar a modelar fenómenos mediante nuevos números los positivos y negativos. Indudablemente esta exploración no resuelve por completo el problema de entender qué es lo que se tiene que construir en el pensamiento numérico de los estudiantes para acceder a compresiones adecuadas de los enteros, pero si abre un camino en esta dirección.

Además de la restricción anterior, este trabajo aún está más delimitado, la exploración de las posibles relaciones entre las dos capacidades señaladas en el párrafo anterior, se estudiarán las circunscritas a un mismo tipo de situación, esta es la de desplazamientos lineales en dos sentidos opuestos y se tratará de ver en este hecho si las composiciones de desplazamientos permiten ver relaciones entre las dos capacidades. Un estudio más amplio y profundo exigirá hacer indagaciones semejantes en otros campos de hechos y con otro tipo de acciones.

De cara a lo expuesto arriba surgen las preguntas:

- ¿Cómo resuelven los estudiantes de sexto grado de la institución Educativa Distrital Antonio José Uribe tareas que implican composiciones de relaciones aditivas y operadores aditivos?
- ¿Existe alguna relación entre la capacidad de resolver situaciones que involucran composiciones aditivas de desplazamientos y la de resolver situaciones que implican composiciones de relaciones aditivas y operadores aditivos en los naturales en estudiantes

de sexto grado de la institución Educativa Distrital Antonio José Uribe? En caso de ser cierto, ¿cómo se dan estas relaciones?

3. JUSTIFICACIÓN

Al analizar la problemática que se ha mostrado en torno al desarrollo de los números negativos y sus operaciones de orden aditivo, vemos que aún es necesario generar situaciones estratégicas que promuevan la construcción del concepto de número entero, utilizando herramientas didácticas de diversa índole que permitan ayudar a corregir las dificultades descritas anteriormente. Pero como se ha dicho, no intentaremos diseñar una experiencia didáctica para enseñar los números enteros que después intentamos validar para mostrar los efectos que se producen en la comprensión de los enteros, más bien, intentaremos mostrar relaciones entre ciertos manejos en los números naturales y algunas situaciones que empiezan a exigir el manejo de números con signos (positivos y negativos).

Esta investigación pretende describir los procesos y dificultades que se presentan en la construcción del concepto de número relativo, visto desde la estructura aditiva; en el marco de situaciones consistentes en desplazamientos en sentidos opuestos. En otras palabras, la investigación en nuestro caso consiste en mostrar los procesos de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones que introducen los números relativos, números que hacen las veces de puente entre los números naturales y los números enteros" Vargas, et al. (1990).

4. OBJETIVOS

4.1 General

Describir y comparar la capacidad (el modo de operar) de resolver situaciones que involucran composiciones de relaciones aditivas y de operadores aditivos en los números naturales antes y después de aplicar una secuencia didáctica que involucra situaciones de composición aditiva de desplazamientos en sentidos opuestos, en estudiantes de sexto grado de la institución Educativa Distrital Antonio José Uribe.

4.2 Específicos

Describir los procedimientos que siguen los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Distrital Antonio José Uribe al resolver problemas que implican composiciones de relaciones aditivas y de operadores aditivos en los números naturales.

Diseñar y desarrollar una secuencia didáctica que involucre experiencias de desplazamientos.

Describir y comparar las respuestas que ofrecen los estudiantes en problemas que involucran la composición de relaciones aditivas y de operadores aditivos antes y después de aplicar una secuencia didáctica referente a la composición aditiva de desplazamientos (en el mismo sentido o en sentido opuestos).

5. MARCO TEÓRICO

Los elementos que conforman la fundamentación teórica de esta investigación se resumen en este capítulo, en primer lugar, se muestra el desarrollo histórico que ha tenido el concepto de número entero, haciendo énfasis en las dificultades que se presentaron desde su aparición hasta su legalización, así mismo, se exponen los obstáculos y concepciones de aprendizaje referentes al concepto de número entero. En tercer lugar, se exponen las dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de número entero, adicionalmente se dan algunas definiciones desde la parte disciplinar del concepto de número relativo y de la composición y relación aditiva de desplazamientos.

5.1 Recorrido histórico para la construcción de los números negativos

La construcción de los números enteros no es arbitraria; su aparición involucra actividades con objetos matemáticos ya existentes y tiene que ver con las necesidades de la ciencia y de la vida diaria, entre ellas encontramos los relacionados contextos concretos y la realidad física (medida, cantidad, espacio, etc.) y con los contextos geométricos sin relación aparente con dicha realidad (estructuras, geometrías no euclidianas).

Los números negativos tienen su origen en la práctica matemática; más concretamente en las manipulaciones algebraicas, desde su aparición histórica tuvo que transcurrir mucho tiempo (Un periodo que va desde el año 300 a.c. aproximadamente hasta el siglo pasado) para que fueran admitidos, legitimados, y se les dotara de un fundamento teórico.

A continuación, y basados en recorrido que hace Vargas, et al. (1990), en su libro de Enteros, presentaremos una breve descripción acerca la historia de los números enteros y la evolución de los números negativos; mostrando que esta idea se construyó lentamente y va desde esfuerzos

fallidos por entenderlos como una abstracción de las acciones sobre el mundo, hasta darles validez como un objeto abstracto del cuerpo teórico matemático.

5.1.1 Aparición de los números negativos.

Vargas, et al. (1990) Indica que la civilización griega los números negativos brillan por su ausencia, debido a su convencimiento de que a todas las cosas de la naturaleza se le podía asignar un número Natural; aunque Diofanto (250 al 350 a.c.), citado por Vargas, et al. (1990) en su obra cita una regla que hoy en día podría ser considerada como la regla de signos: "Sustracción por sustracción da adición".

En la civilización hindú aparecen por primera vez las reglas que rigen la aritmética de los números negativos. Brahma Gupta citado en (The story of mathematics.com, (2018)) explica en su obra los algoritmos para efectuar operaciones entre: "Los bienes, las deudas y la nada"; sin embargo, su logro cayó en el vacío y fue necesario que transcurrieran muchos siglos para que fuese recuperado mientras que los árabes se limitaron a ignorar estos "monstruos sin soporte" conocían su existencia, pero pudo más su fe en la medida. En la época medieval hay un rechazo activo hacia los negativos, interpretándolo solo en la parte comercial como una perdida. y con ello se da inicio a su periodo de clandestinidad.

En el renacimiento los números negativos ya no son ignorados "se les reconoce, aunque se les da el papel de cenicientos", utilizados por todos, pero igualmente rechazados; hay que esperar hasta los alrededores del siglo XVII, para que, con el nacimiento de la ciencia moderna, los métodos de cálculo matemático resultaron imprescindibles y como consecuencia los negativos empiezan a ser considerados como "artificios de cálculo", pero persiste el rechazo debido a la dificultad para encontrarle un sentido intuitivo y empírico negándoles la existencia como

número. Sin embargo, Girard no solo tuvo en cuenta su validez algebraica, sino que lo interpretó geométricamente “Lo negativo en geometría indica un retroceso, mientras que lo positivo un avance”. Anticipándose a las ideas que prevalecieron en el siglo XVIII. Newton empieza la recta numérica como soporte de estos números.

5.1.2 Proceso para su legitimación.

Durante el siglo XVIII y a comienzos del XIX continúa el rechazo hacia los negativos, pero a su vez se multiplican los esfuerzos por legitimarlos, dando interpretaciones concretas “*D’Alembert define las cantidades negativas como aquellas que son observadas como menores que nada y que van precedidas del signo menos*” Vargas, et al. (1990) trata de justificar lógicamente sus propiedades, aunque sus intentos fracasaran; así la legitimización de los números negativos se realizó treinta años después, gracias a Hankel, H. (1867) (citado en Giraldo, 2014), quien aborda el problema de manera formal indicando que los negativos tienen el estatus de número y realiza la distinción del signo del opuesto y del signo de la sustracción.

De acuerdo con Vargas, et al. (1990), Hankel no buscó considerar los números negativos asociados a la realidad física, sino que los justificó en las leyes formales, como entes matemáticos que cumplen ciertas relaciones entre ellos.

5.2 Dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje

En el proceso de enseñanza aprendizaje aparecen limitaciones que dificultan e impiden la obtención de los objetivos establecidos, para nuestro estudio, definiremos estas dificultades o limitaciones como obstáculos de aprendizaje.

5.2.1 Obstáculos y concepciones de aprendizaje.

Las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión y manipulación de números negativos tan solo reflejan su desarrollo histórico (González, 1995), de ahí que sea necesario conocer un poco más de su evolución y saber acerca de las razones que provocaron los cambios de un sistema y la aceptación de otros. Autores mencionados por Cid, (2003) afirman que el concepto de número negativo está vinculado a las nociones de cantidad y magnitud, desde los comienzos de la matemática deductiva en Grecia, hasta nuestros días. La historia muestra los obstáculos (verdaderos obstáculos epistemológicos) que los matemáticos debieron superar para desligarse del número como representación de magnitudes físicas. Es de esperarse que obstáculos semejantes tienen que ser superados por los estudiantes.

Además, la enseñanza de los números negativos supone la modificación de creencias de aprendizaje fuertemente arraigadas a la enseñanza primaria y a los números naturales (sin signo), ya que estos condicionan el aprendizaje de los números negativos; de ahí que el cambio al trabajar con números negativos implique un proceso de pensamiento en el cual el estudiante debe lograr comprender que la palabra sumar no siempre significa aumentar y la palabra restar no siempre es disminuir. De igual forma debe entender que los signos (+ y -) más y menos no siempre representan las operaciones (adición y sustracción) a las cuales están acostumbrados; por lo cual es necesario que el estudiante entienda los cambios que existen en diferentes contextos, entre ellos, deudas, temperaturas, el nivel del mar, ascensores, cronología, etc.

Ahora bien, (Cid, 2003, p. 6). en su trabajo La investigación didáctica sobre números negativos, plantea que las dificultades y posibles errores de los estudiantes en el aprendizaje de los números negativos se pueden clasificar así:

- De interpretación; donde el estudiante no relaciona la representación que lee o lo resuelve en la recta utilizando suma y resta.
- De escritura, donde el estudiante comete errores de procedimiento o hábitos erróneos concernientes al conteo, orientación, colocación de vectores, etc.
- Conceptuales: donde los más cometidos se refieren a errores de representación aislada, de reversibilidad, de traducción y de escala.

5.2.2 Obstáculos y concepciones de enseñanza.

Muchas de las alternativas que se ofrecen para la enseñanza de los números positivos y negativos, muestran las limitaciones que se advierten en las investigaciones que se han expuesto en los capítulos anteriores; (Maca, 2016) los clasifica como:

- Conceptos intuitivos circulando en el aula

El docente cumple un papel fundamental en el aula, la transformación conceptual del estudiante, pero si su trabajo se basa en los conocimientos intuitivos que posee sobre determinado concepto, el estudiante tendrá dificultades para avanzar en la construcción del concepto científico y de su aplicación en los diferentes contextos de interacción

- Ejemplos inadecuados o sin fundamento teórico.

Pozo (2006) citado por (Maca, 2016) Afirma que la mayoría de los docentes recurre a los ejemplos “típicos” que otros docentes de matemáticas han utilizado como estrategia de enseñanza, de forma que el estudiante, con esta información, no logra apropiarse del concepto, ya que “*Una persona obtiene un concepto en el momento que puede otorgarle un significado o un sentido a la información que se le presenta, es decir cuando la “comprende”.*

- No existen objetivos claros en la enseñanza

Maca (2016), como resultado a su estudio indica; que varios profesores crean los objetivos de enseñanza en el aula según sus necesidades particulares, pero ninguno utiliza un proceso o una ruta definida para enseñarlos, algunos emplean descripción de situaciones, otros utilizan ejemplos precisos, etc., pero enseñan los conceptos sin una estrategia definida, y por tanto este proceso difiere de un docente a otro.

Mientras que Pérez (2012), clasifica los errores que se presentan en el proceso de enseñanza en dos categorías:

- Uso exagerado de algoritmos y rutinas sin fundamento teórico
- Mecanización de procesos y desarrollos de tipo algebraico sin relación con la ejecución de problemas.

5.3 Los números relativos

Vargas, et al. (1990), precisan la dificultad que entraña la enseñanza de los números enteros en la educación elemental, "el *paso de la matemática práctica, de la que se hace usa en la vida cotidiana, a la matemática formal, cuyos objetos y teorías no siempre poseen referencia material*" (p. 150). La historia de la matemática como en la investigación en didáctica de la matemática parece llenarnos de razones para desconfiar de una enseñanza del número entero basada meramente en referencias concretas, de forma semejante, los abusos de una formalización prematura (con estudiantes que aún tienen formas de pensar concretas) muestran los errores de un aprendizaje sin sentido.

La historia nos ilustra en forma clara la existencia profundamente enrizada de identificar el número como cantidad, un verdadero obstáculo epistemológico para la aceptación y reconocimiento de los números negativos, idea reforzada por la creencia de que la matemática da

cuenta de verdades que se corresponden con el mundo real. La ruptura epistemológica con esta idea y pasar a una nueva concepción de la matemática, como construcción intelectual, favoreció la construcción formal de los enteros y la aceptación de entes abstractos separados totalmente de la cantidad, a los que, según Hankel (1839-1973) mencionado por Vargas et al. (1990), *"se le exige que cumplan las leyes fundamentales de la aritmética*" (p. 152).

Consideramos que el recurso didáctico propuesto por Vargas et al. (1990) ayuda a resolver el conflicto de una enseñanza que aplica la construcción de significados por parte de los estudiantes, a través de situaciones concretas de uso, ancladas en un comienzo a la cantidad, y a la necesaria formalización de los números enteros como objetos matemáticos, este recurso aplica el estudio de un nuevo tipo de números que él llama relativos y que surgen de la comparación entre números naturales.

La característica fundamental de los nuevos objetos conceptuales ya no es la de constituir una mera expresión de la cantidad o la representar una posición en un sistema ordenado con primer elemento [como ocurre con los naturales], sino la reflejar y servir de modelo discreto a una idea tan poderosa como la relatividad de cantidades o posiciones en una serie ordenada (Vargas et al. (1990) p. 69).

Vargas, et al. (1990) en la fase que distinguen como de número relativo como relación-útil en contexto concretos distingue dos clases de comparaciones entre objetos o colecciones, las de tipo estático. "aquellas en las que los objetos o colecciones a comparar son independientes unos de otros, no estando ligados por ningún tipo de transformación" (como cuando se afirma que **A** es más –o es menos— ___ que **B**, o mejor, que tal o cual cualidad de A es más —es menos— _____que **B**, y las de tipo dinámico son estados relacionados por medio de transformaciones

(cuantifica las diferencias: cuando se afirma que **A** es más –o es menos— ___ que B en tantas unidades). Podría decirse que la composición de dos relaciones de tipo dinámico da lugar a operaciones entre un nuevo tipo de números que suponen una dimensión que da cuenta del valor de una magnitud y de otra dimensión que da cuenta del sentido (un par de valores opuestos: mayor, menor, hacia la derecha-hacia la izquierda, hacia arriba- hacia abajo, etc.). Por ejemplo: relación número uno: **a** es mayor que **b** en **n** unidades y relación dos: **b** es mayor que **c** en **m** unidades. Al componer estas dos relaciones se obtienen una tercera que compara a **a** con **c**: **a** es mayor que **c** e **n + m** unidades.

Dados dos números naturales diferentes a y b, se tiene, o, que a > b y en ese caso existe un natural c tal que a = b + c, o, que a < b y b = a + c, la primera opción podría expresarse como “a es mayor que b en c unidades” y la segunda como “a es menor que b en c unidades”. Estas expresiones “c unidades mayor” o “c unidades menor”, de alguna manera, involucran dos dimensiones reconocidas en los naturales. la ordinalidad (definidas por las relaciones de orden mayor y menor) y la cardinalidad (definidas por la relación de equipolencia, c unidades). Estas comparaciones orientadas (c unidades mayor o c unidades menor) estarían en la base de comprensión de los positivos y negativos. Ya no son relaciones que hacen referencia a un orden absoluto (por tener un primer elemento y darse en un mismo sentido) y que no da cuenta de la magnitud de la diferencia entre los elementos que se comparan, son relaciones relativas –valga la redundancia- en tanto que para establecer una relación de orden se fija un elemento que se toma como referencia y que exigen el sentido de la relación (mayor o menor) y el magnitud de la diferencia (en c unidades).

Vargas et al. (1990) propone considerar el número relativo como compuesto por un número natural que da cuenta de la cantidad de la diferencia tomada según un punto de referencia y por el sentido de esta diferencia (es más, es menos).

Al estudiar la estructura de las diferentes situaciones a la que da lugar la composición de dos relaciones de tipo dinámico se encuentran unas de las que se puede prever que resulte más difíciles a los estudiantes que otras. A continuación, se presentan posibles situaciones:

- A es mayor que B en n unidades y B es mayor que C en m unidades, por lo tanto, se concluye que A es mayor que C en n + m unidades o la semejante con la relación menor A es menor que B en n unidades y B es menor que C en m unidades, por lo tanto se concluye que A es menor que C n + m unidades.
- A es mayor que B en n unidades y B es menor que C en m unidades, por lo tanto, se concluye que:

1) A es mayor que C siempre que n > m y lo será en n – m unidades

2) A es menor que C siempre que n < m y lo será en m - n unidades.

Se puede prever que las composiciones de primer grupo resultan más fáciles para los estudiantes que las del segundo tipo. Ambos tipos de composiciones suponen el manejo de la transitividad. La propiedad transitiva de las relaciones de orden: si a > b y b > c => a > c, puede ser interpretada en términos cognitivos como una acción mental que se ejecuta entre dos relaciones, la primera (a > b) y la segunda (b > c) que permite relacionar de manera indirecta dos elementos (a y c) a través de un tercero b. Bien podemos decir que esta acción mental consiste en componer dos relaciones para producir como resultado una tercera. Se puede esperar que un estudiante de sexto grado tenga un manejo de la transitividad. Pero no basta el manejo de la

transitividad para componer las relaciones del segundo tipo, exige coordinar la relación con su reciproca: a es **mayor** que b en …y b es **menor** que c en …. Es el cambio de sentido de la relación la que introduce una mayor complejidad, porque no basta construir la recíproca, sino invertir el sentido de la magnitud de la diferencia. Veamos:

- a es **mayor** que b en *n* unidades y b es **menor** que c en **m** unidades. Admitamos que n y m son naturales.

Se transforma alguna de las dos relaciones de tal forma que ambas establezcan la relación mayor que o menor que. Para ilustrar el siguiente paso se transforma la segunda, de manera que se pueda comprar a y c porque se toma la misma referencia b.

- a es **mayor** que b en *n* unidades y c es **menor** que b en **m** unidades. Si n > m se tendría que a > c en n – m unidades; si n < m se tendría que c > a en m – n unidades. Precisamente la coordinación de las dos transformaciones c <b en c > b y n - m en m – n, es la que genera la complejidad.

5.4 La composición de transformaciones

Estructuras aditivas: Las estructuras aditivas en números relativos modelan situaciones de la vida cotidiana, lo que implica la resolución de problemas aditivos, tomando como foco el concepto de dimensión contextual de Bruno (2000).

Una estructura aditiva es una situación que se describe con una adición del estilo a+ b = c donde, la letra a representa un estado o situación inicial o final que hace referencia a una la medida de una cantidad o magnitud en cierto instante, la letra b hace referencia o expresa los cambios o variaciones que se dan al estado inicial en función del tiempo a y la letra c expresa la diferencia o comparación entre los dos estados, el final y el inicial.

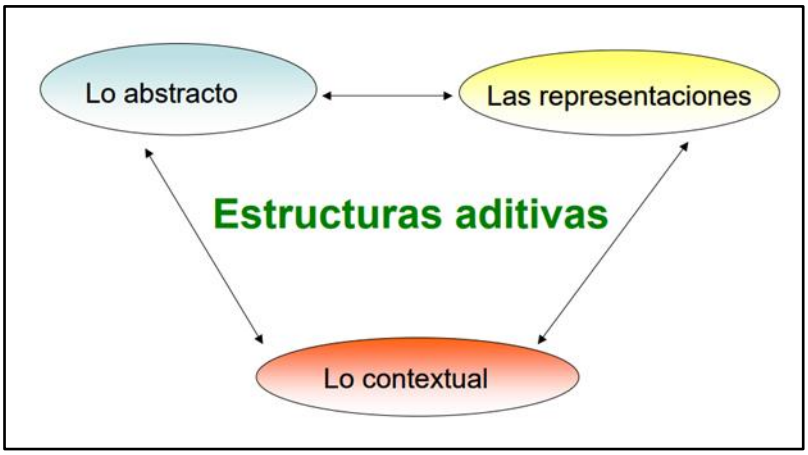


Figura 2, Estructuras aditivas (Tomado de: Estructuras aditivas (Bruno, 2000))

Composición aditiva: Se distinguen diversas situaciones numéricas o usos de este tipo de números; entre las cuales encontramos cuatro estructuras aditivas diferentes dependiendo de la posición de la incógnita:

Incógnita / Estructura	I1	I2	I3
Cambio	¿? + v = ef Cambio1	ei + ¿? = ef Cambio2	ei + v = ¿? Cambio 3
Combinación	¿? + e2 = et Combinación1	e1+ ¿? = et Combinación2	e1+ e2 = ¿? Combinación3
Comparación	¿? + c = e2 Comparación1	e1 + ¿? = e2 Comparación2	e1 + c = ¿? Comparación3
Dos cambios	¿? + v2 = vt Dos cambios1	v1 + ¿? = vt Dos cambios2	v1 + v2 = ¿? Dos cambios3

Figura 3, Composición de estructuras aditivas (Tomado de: Estructuras aditivas (Bruno, 2000))

Relación aditiva de desplazamiento: Luego de realizar una composición o desplazamiento es posible establecer una relación de orden, comparando el estado inicial con el final e indicando quien es mayor o quien es menor (el estado inicial o el final) y por cuánto.

Es de resaltar que los números enteros son primordiales para acceder a operaciones aritméticas y las dificultades que manifiestan los estudiantes al enfrentarse a ellas, pueden tener

su origen en los niveles de conceptualización, de lo anterior se derivan dos consecuencias para llevar a cabo el proceso de enseñanza- aprendizaje de los números enteros:

1. Este proceso (Enseñanza –aprendizaje de los números enteros) debería prolongarse durante varios grados; y su introducción empezar unos grados antes de sexto o séptimo, en los que es común enseñar los enteros. Su introducción se puede realizar en preescolar o primaria utilizando los números relativos o cantidades relativas como ayuda. El concepto de número entero necesita un más formalizado que debe darse más allá de estos grados.

2. Es conveniente que su proceso empiece con experiencias concretas que ayuden a construir cierta intuición de lo positivo y lo negativo (números relativos), sin pretender derivar la totalidad de compresiones de las ideas de los enteros de experiencias o acciones concretas.

De ahí que consideremos conveniente que los estudiantes a partir de variadas experiencias tengan la oportunidad de tomar conciencia de las cosas que cambian y que permanecen invariantes en un proceso u operación; es decir que pese a las diferencias que halla entre dos posiciones, hay algo que permanece invariante.

6. METODOLOGÍA

La metodología de esta investigación es mixta, cuantitativa y cualitativa. El componente cuantitativo es descriptivo, mediante éste se tipifican y comparan los procedimientos y respuestas que dan los estudiantes a las preguntas de las pruebas inicial y final, y, se comparan estos resultados con el fin de ver el posible cambio que se produce en el manejo de las relaciones y de los operadores en los estudiantes que componen la muestra. Bajo las premisas del enfoque cualitativo de Stake, (2007) se desarrolló el segundo componente, para ello se realizó estudio de casos, mediante los cuales se buscó describir, interpretar y analizar la información mediante el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso particular para llegar a comprender su forma de actuar en circunstancias importantes. Se estudiaron tres casos, cada uno de un nivel de desempeño distinto en matemática (alto, medio y bajo), para ello se recurre a las producciones de los tres estudiantes tanto en las entrevistas a profundidad que se realizaron después de cada aplicación (antes y después del desarrollo de las experiencias de desplazamiento), como, en las producciones a lo largo de una secuencia didáctica. Con este análisis cualitativo se busca encontrar información que permita, por una parte, ampliar y precisar un poco más las descripciones que se obtienen con las producciones escritas de los estudiantes y, por otra, intentar explicar estas respuestas.

6.1 Caracterización de la población

El estudio se realizó en la Institución Educativa Distrital Antonio José Uribe, la cual está ubicada en el barrio Santa Barbara de la localidad 3 de la cuidad de Bogotá, el 80% de la población estudiantil vive en la localidad, lo cual clasifica la población dentro de los estratos

socioeconómicos menos favorecidos (1 y 2). Los estudiantes asisten al colegio en jornada única de 6:30 am a 3:00 pm.

Muestra. El estudio se realizó con un grupo de22 estudiantes de grado sexto, cuya edad promedio varía entre los 11 y 14 años, de estos, cuatro estudiantes están repitiendo grado sexto, el curso se caracteriza por la presencia de estudiantes con diferentes habilidades e intereses en el área de matemáticas, Para seleccionar los tres jóvenes, con los que se realizó el estudio de casos, se examinó, el desempeño escolar en matemática a partir de los reportes del grado anterior.

6.2 Descripción global del procedimiento

Se diseñó y desarrolló una secuencia didáctica basada en una situación de juego (una ruta) en la que a partir de lanzamiento de dados de colores diferentes (azul y rojo) que indicaban la magnitud y el sentido del desplazamiento que el jugador debía aplicar a su ficha a lo largo de una ruta. Con este juego se buscaba que los estudiantes ejecutaran acciones de desplazamientos en diferentes sentidos, lo que les ayudaría a hacerse a un esquema, primero de aplicación sucesiva de desplazamientos, para después hacer composiciones aditivas de desplazamientos, tanto, cuando estos son en el mismo sentido como cuando son en sentido contrario.

Los estudiantes realizaban experiencias de desplazamiento en sentidos diferentes y en la que tenían la oportunidad de manejar estructuras aditivas mediante estos desplazamientos (un desplazamiento de a unidades en un sentido, seguido de un desplazamiento de b unidades en sentido opuesto, puede componer como un desplazamiento de a—b o b – a unidades en un mismo sentido), ver descripción del juego de la ruta en el anexo 1: secuencia didáctica.

La primera sesión de esta secuencia consistió en la aplicación de una prueba inicial en la que se buscaba evaluar la capacidad inicial de los estudiantes para realizar dos tipos de tareas: a) que

involucran relaciones del tipo <mayor (o menor) que en n unidades> , exactamente las tareas se componían de dos relaciones de este tipo que se tenían que satisfacer simultáneamente: A es más que B en n unidades y B es menos que C en m unidades, se pedía establecer la relación entre A y C y b) que involucran dos operadores aditivos (o transformaciones) , p. ej. aumentar (o disminuir) un estado inicial en n unidades, más adelante se presenta.

Las sesiones dos, tres y cuatro, consistieron en el desarrollo del juego de la ruta en tres variantes distintas y la resolución de guías de trabajo referidas al juego en la que en algunas de las situaciones se presentaban problemas de composición de desplazamientos. En la quinta sesión se aplicó la prueba final que incluyó las mismas cuatro tareas de la prueba inicial con el propósito de identificar y describir los posibles cambios que los estudiantes mostraban en su capacidad de realizar composición de relaciones y de operadores como efecto de las vivencias del juego de la ruta. A la prueba final se le agregaron tres tareas que permitían registrar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas de desplazamiento cuya estructura busca un estado inicial (Ei) desconocido.

De forma complementaria para obtener una información más precisa se realizaron entrevistas clínico-críticas a los tres casos de estudio en dos momentos diferentes al inicio, sobre la prueba inicial y al final, acerca de la prueba final. En estas entrevistas no solo se buscaba obtener información sobre la respuesta dada sino, además, sobre el porqué de estas. Esta es la información que nutre el componente cualitativo de este estudio.

6.3 Instrumentos de recolección de la información

El proceso de recolección de información estuvo definido por la implementación de una prueba inicial y una final, una secuencia didáctica (juego de la ruta), información que se

encuentra registrada, en las producciones escritas de los estudiantes y los audios y grabaciones de entrevistas Semiestructuradas, aplicadas a los mismos.

6.3.1 Prueba inicial.

La prueba consta de 4 tareas, la T1 y T2 corresponden al manejo0 de relación de orden con diferencia relativa y la T3 y T4 a operadores aditivos.

Las tareas T1 y T2 son tareas que contienen enunciados compuestos de dos relaciones de orden con diferencia relativa que se tienen que satisfacer simultáneamente. A es más que B en n unidades y B menos que C en m unidades. Se pregunta por la relación entre A y C. Se busca indagar cómo entiende y resuelve estas tareas.

Análisis formal de la Tarea 1. Esta tarea consiste en la composición de dos relaciones con explicitación de la diferencia relativa. El primer enunciado indica que: En un cesto A hay 7 naranjas más que en uno B y el segundo enunciado dice: en este B hay 6 naranjas menos que en un cesto C. La tarea exige que el estudiante componga estas dos relaciones y reconozca que si A supera a B en 7 unidades y C supera a B en 6 unidades (siendo esta la reciproca de “B 6 unidades menos que C”), lo que le permite tomar a B como referencia para establecer la comparación entre A y C y afirmar “A es mayor que C en 1”.

Habría un procedimiento algebraico que permitiría resolver la tarea y evadir la complejidad de la composición. Tal procedimiento consiste en traducir estos enunciados verbales a representaciones analíticas (en este caso igualdades para cada uno de los dos enunciados:

De las dos igualdades y mediante sustitución (de b en primera igualdad) se llega a $a= c – 6 + 7$. Esto supone la composición de estos dos operadores $(-6 + 7)$ para obtener $+ 1$. De manera que $a = c +1$.

Tabla 2:

Traducción de enunciados verbales a representaciones analíticas de la tarea 1.

Enunciado verbal	Representación analítica (algebraica)
En un cesto A hay 7 naranjas más que en uno B	a = b + 7 a y b representan la cantidad de naranjas que hay en las cestas A y B respectivamente
y en este B hay 6 naranjas menos que en un cesto C	b = c -6. c representa la cantidad de naranjas del cesto C

Origen: Fuente propia

De donde se deriva el enunciado: A tiene un naranja más que C o su equivalente reciproco C tiene una naranja menos que A.

Es claro que este procedimiento algebraico no será seguido por estudiantes de grado sexto. Sin embargo, es posible que se encuentren soluciones cercanas, tales como tomar valores determinados que satisfagan las dos condiciones y valorar las diferencias en los valores que se asumen para las cantidades de naranjas que hay en los tres cestos y después valorar la diferencia. Una vez encontrada la diferencia para esos dos valores particulares es posible que se asuma que esta diferencia será la misma para cualquier valor.

Análisis formal de la tarea 2. Esta tarea es semejante a la anterior, tiene la misma estructura, El primer enunciado indica que: en un cesto M hay 5 naranjas menos que en un cesto N y el segundo enunciado dice: en este N hay 6 naranjas más que en un cesto P. La tarea exige que el estudiante componga estas dos relaciones y reconozca que si N supera a M en 5 unidades (siendo esta la reciproca de “M cinco unidades menos que N”), lo que le permite tomar a N como referencia para establecer la comparación entre M y P y afirmar “M es mayor que P en 1”.

Habría un procedimiento algebraico que permitiría resolver la tarea que permitiría evadir la complejidad de la composición. Tal procedimiento consiste en traducir a representaciones analítica en este caso igualdades para cada uno de los dos enunciados:

De las dos igualdades y por sustitución (de n en la primera igualdad) se llega a m= p + 6 – 5. Esto supone la composición de estos dos operadores (+6 - 5) para obtener + 1. De manera que m = p +1.

De donde se deriva el enunciado. M tiene un naranja masque P o su equivalente reciproco P tiene una naranja menos que P.

Tabla 3:

Traducción de enunciados verbales a representaciones analíticas de la tarea 2

Enunciado verbal	Representación analítica (algebraica)
En un cesto M hay 5 naranjas menos que en un cesto N	m = n - 5 Siendo m y n la cantidad de naranjas que hay en las cestas M y N respectivamente
y en este N hay 6 naranjas más que en un cesto P	n = p + 6 Siendo p la cantidad de naranjas que hay en el cesto P

Origen: Fuente propia

Como se dijo en la tarea No 1 este procedimiento algebraico no será seguido por estudiantes de grado sexto, pero es posible que se encuentren soluciones como la de utilizar una terna de valores particulares que satisfagan las condiciones del problema para comparar los valores correspondientes a la cantidad de naranjas que hay en los cestos M y P.

Las tareas T3 y T3 son tareas que contienen enunciados que consisten en la aplicación sucesiva a un estado de dos operadores aditivos y se pide establecer la relación con explicitación de la diferencia relativa entre el estado inicial y el final.

Análisis formal de la Tarea 3. Esta tarea consiste en la aplicación sucesiva de dos operadores aditivos. El primer enunciado indica que: … a “16 se le suma 8 y el segundo enunciado dice: al resultado obtenido se le resta 11. La tarea puede ser resuelta mediante la composición de las dos transformaciones, seguir este camino exige reconocer que la expresión

“se le suma ocho y luego se le resta once” equivale a una transformación única: que se está restando 3 unidades. Lo que permite afirmar que “El resultado final es menor que el inicial en 3”.

Este procedimiento es posible para aquel estudiante que esté en capacidad de realizar la composición de las transformaciones (operadores), sin embargo, el estudiante puede recurrir a un procedimiento cognitivamente más elemental y consiste en limitarse a ejecutar las transformaciones y después comparar los dos estados el inicial y el final (16 + 8 = 24 y 24 – 11 = 13, Al comparar 16 y 13 se afirmar que el número inicial es mayor al resultado final en 3 unidades). Este procedimiento permite evitar la composición de operadores, precisamente, la información que se recoja habrá de ayudarnos a entender si un estudiante recurre a este procedimiento sucesivo porque no logra resolverlo por el primero o simplemente lo hace por comodidad.

Análisis formal de la Tarea 4: Esta tarea consiste en la composición de dos transformaciones u operadores, a diferencia de la tarea anterior, esta exige de la composición ya que no se da el estado inicial, aunque el estudiante, tendría la posibilidad de evadir realizar esta composición y reducirla a un problema como el de la tarea 3, limitándose a resolver el problema para un valor dado del estado inicial.

6.3.2 Prueba final.

Esta prueba consta de 7 tareas, las cuatro primeras son las mismas de la prueba inicial. Las tres tareas adicionales corresponden a problemas referidos al juego de la ruta, exactamente se trata de problema inversos de estado inicial desconocido (no se conoce el punto de partida) y se realizan cuatro desplazamientos y se da el punto de llegada. Se pide que se diga el punto de partida.

Análisis formal de estas tareas. Se ilustrará el análisis tomando como ejemplo la tarea 5. Juan estaba en ____ y el resultado al lanzar los dados es 6 A, 2 A, 3 R y 2 R, finalmente llega al puesto 9 a la derecha del punto inicial (el punto cero de la ruta).

Como se ha dicho es un problema inverso de estado inicial desconocido, ya que no se da el punto en el que estaba la ficha antes de realizar los desplazamientos. Un estudiante que pueda manejar el carácter inverso de este problema y las composiciones aditivas de los desplazamientos podría transformarlo en uno simple equivalente: ¿cuál es el punto de partida si se hace un desplazamiento de 3 unidades en el sentido Azul (a la derecha de acuerdo con el juego de la ruta) y llega a 9 cuadro a la derecha de cero de la ruta? Para tal transformación hará algo equivalente a un desplazamiento de 6A seguido de 2A da como resultado un desplazamiento de 8A y, algo semejante con los desplazamientos en el sentido opuesto (3R y 2R da 5R). Ya obtenido los dos desplazamientos 8A y 5R podría componer estos dos desplazamientos en sentidos opuestos y obtener como resultado 3A (un desplazamiento de 3 unidades en el sentido azul). Una vez hecha la transformación arriba señalada si maneja la reversibilidad de estas transformaciones podrá obtener el valor inicial invirtiendo el desplazamiento 3A a partir del punto final 9 cuadros a la derecha del cero, podría decir: 3 en el sentido opuesto al azul (es decir, 3 rojo) a partir del lugar 9 a la derecha del cero, será 6 a la derecha del cero. Pero si el estudiante no maneja la reversibilidad podrá arreglársela tratando de transformar este problema en un directo, el camino será suponer un punto de partida y ensayar si al realizar los cuatro desplazamientos llega al punto final indicado. Si no lo logra hará ensayos hasta alcanzar el resultado final. Este procedimiento puede tener variaciones pequeñas, puede ser que componga desplazamientos o no, pero estructuralmente será el mismo (suponer un punto de partida para verificar). Puede ser que se

pueda observar que el estudiante ensaya con cierto plan, de forma que la búsqueda sea intencionada o puede ser que algún estudiante se limite a hacer búsquedas azarosas. Habría un tercer procedimiento que trabajaría con una lógica un poco distinta: a partir del lugar 9 cuadros a la derecha, reconstruye los movimientos hacia atrás hasta llegar al punto de partida buscado, podría llamarse a este procedimiento de inversión. Sobre esta estructura de resolución podrían encontrarse variaciones porque componga o no componga desplazamientos.

6.3.3 Juego de la ruta.

El juego de "la ruta" es una secuencia didáctica en la cual se ofrece a los estudiantes de grado sexto una experiencia de juego con dados de dos colores (rojo y azul) donde a partir del resultado obtenido con estos se realizan dos o más desplazamientos en sentidos opuestos (izquierda o derecha) según el color de los dados (Azul: derecha, rojo: izquierda) a partir de un punto de referencia (inicio) Ver anexo 1, página 4.

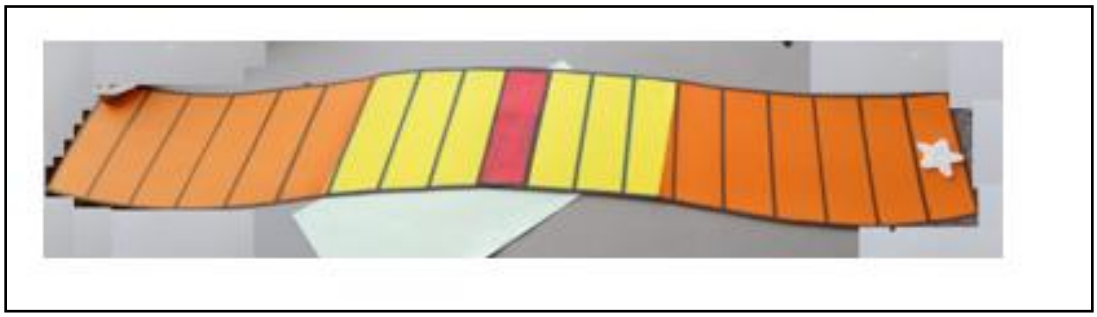


Figura 4, Juego de la ruta.

Este juego está orientado a que los estudiantes ejecuten acciones de desplazamientos, que identifiquen que cada desplazamiento se distingue por su magnitud y por su sentido. Que ejecuten acciones que le ayuden a: a) componer desplazamientos en un mismo sentido y en sentidos opuestos y b) a construir la inversión, en lugar de conocer el punto de partida y llegar a un punto después de realizar unos desplazamientos, se trata de identificar el punto de partida

desconocido a partir de los desplazamientos que se realizaron y el punto de llegada que se da por conocido.

Esta secuencia está diseñada para llevarse a cabo en tres sesiones, las cuales incluyen diferentes tipos de tarea, las cuales está clasificadas en tres estructuras aditivas diferentes:

Estructura 1: Donde se le da al sujeto un estado inicial (punto de partida) y una composición de desplazamientos (dos, tres o cuatro) en sentidos opuestos (izquierda o derecha) y se le pide que encuentre la posición final (punto de llegada) Ver anexo 1, paginas 5-9.

Estructura 2: En este tipo de tarea, se le indica al estudiante los desplazamientos que ha realizado la ficha y estado final (posición a la cual llegó) y se le pide que encuentre la posición o estado inicial (de donde partió la ficha). Para esta estructura hay dos posibles variantes:

a) El estado inicial se encuentra a la izquierda del estado final

b) El estado inicial se encuentra a la derecha del estado final.

Estructura 3: Se le da al estudiante el estado inicial y el estado final (De donde parte la ficha y a donde llega) y se le pide al estudiante que indique los posibles desplazamientos que realizo (resultados de los dados) Ver anexo 1, paginas 5-9.

6.3.4 Entrevistas Semiestructuradas.

Como parte de un proceso investigativo, es un instrumento que permite ampliar las producciones escritas generadas por los estudiantes, y ayuda a visualizar de forma más clara aquellas ideas que no se transmitieron por escrito.

Las entrevistas que se realizan en la investigación, tiende a ser personales, evidenciando interacciones flexibles y dinámicas; donde el entrevistador tiene las funciones de: a) animador, para ello motiva, mantiene la atención, invita a intentar soluciones y a no desfallecer ante los

obstáculos que el niño pueda encontrar al procurar resolver la tarea; b) de analista, para ello observa e interpreta las actuaciones (lo que dice y hace el niño) y de acuerdo a estas interpretaciones hace hipótesis sobre la forma como el niño está entendiendo y resolviendo la tarea. Sobre estas hipótesis formula preguntas y contrapreguntas que le permitan corroborarlas o rechazarlas. Así, la entrevista semiestructurada permite:

- Describir con mayor claridad y profundidad la comprensión de los estudiantes.
- Evaluar mejor los argumentos expuestos por el entrevistado.
- Profundizar en los temas que se consideraban importantes.

6.4 Secuencia didáctica

En esta secuencia didáctica se aborda el concepto de número relativo, con el objetivo de poder representar adecuadamente las magnitudes cuyas cantidades son susceptibles a ser agrupadas en dos categorías, o de ser consideradas en sentidos opuestos. Son muchas las magnitudes de este tipo, para el desarrollo de la secuencia tendremos en cuenta el desplazamiento de fichas en sentidos opuestos (izquierda- derecha) a partir de “El juego de la ruta”.

Tabla 4:

Objetivos de la secuencia didáctica

PRETENSIONES DE LA SECUENCIA DIDACTICA	
TITULO	El mundo de los números relativos… Introducción al concepto de número entero
PROPOSITOS DE INVESTIGACION	Identificar cómo entienden y cómo resuelven situaciones que involucran desplazamientos, en particular, interesa tener información sobre si componen o no componen desplazamientos y como lo hacen y si como empiezan a construir la inversión de las acciones.
PROPOSITOS DE ENSEÑANZA	Brindar una experiencia a los estudiantes que les conlleve a la realización de desplazamientos en sentidos opuestos y luego enfrentarlos a preguntas que involucren relaciones de orden y de composición.

Origen: Creación propia

Tabla 5:

Descripción de la secuencia didáctica

SESIONES QUE COMPONEN LA SECUENCIA DIDACTICA		
SESION	NOMBRE DE LA SESION	DESCRIPCION GLOBAL DE LA SESION
1	JUEGO DE LA RUTA PRIMERA PARTE GUÍA No 1 Ver anexo 1, páginas 4 y 5	Esta sesión se trabaja en dos momentos 1. Se ofrece a los estudiantes un juego con dados de dos colores (rojo y azul) donde a partir del resultado de estos se realizan desplazamientos en sentidos opuestos (izquierda o derecha) a partir de un punto de referencia (inicio) 2. Se presenta una guía de tres preguntas donde se trabajan estructuras de tipo 1 y 2a.
2	JUEGO DE LA RUTA CON 3 DADOS GUÍA No 2 Ver anexo 1, páginas 6 y 7	Con Esta Experiencia se ofrece a los estudiantes una experiencia con tres dados de dos colores (rojo y azul) donde a partir del resultado de estos se realizan más de dos desplazamientos en sentidos opuestos (izquierda o derecha) a partir de un punto de referencia (inicio). A continuación, se presenta una guía con preguntas que conllevan al estudiante al trabajo de estructuras de tipo 2a, 2b y 3.
3	JUEGO DE LA RUTA SEGUNDA PARTE GUÍA No 3 Ver anexo 1, páginas 8 y 9.	En esta sesión se presenta a los estudiantes una guía que muestra los movimientos realizados por un jugador y el punto de llegada, el estudiante debe averiguar de donde partió el jugador (estructuras de tipo 2)

Origen: Creación propia

6.5 Plan de Análisis

En este análisis se describirán de forma detallada las respuestas dadas por los estudiantes tanto a nivel general, como a nivel particular de las dos pruebas y las guías. Esta información se complementa con las entrevistas que se realizaron en diferentes momentos del proceso a los cinco sujetos escogidos para realizar el estudio de casos.

Inicialmente se compara estudiante por estudiante la forma como resuelve tareas de composición de relaciones y operadores. Para ello tipificamos las respuestas de desplazamiento y las respuestas de composición y hacemos una tabla de correspondencia. con base en esto se analizan las tendencias que muestra la totalidad de estudiantes en los dos momentos, (prueba

inicial y final). De forma complementaria se comparan un a una las producciones de cada estudiante en esos dos momentos para registrar los cambios en sus respuestas.

Adicionalmente, en el estudio de casos intentaremos describir las respuestas y las justificaciones que ofrece cada estudiante en las tareas iniciales (información que se recogió en las entrevistas), las respuestas y forma de resolver las tareas que se pusieron durante las experiencias de desplazamiento y finalmente, en la entrevista de la prueba final (entrevista).

El análisis de la información recolectada se dividió en momentos y para cada uno se ellos de diseñaron tablas de Word como instrumentos de agrupación y comparación.

6.5.1 Momento uno: Organización de la información recolectada y tipificación de procedimientos y respuestas.

En este momento se tomaron las diferentes pruebas aplicadas a los estudiantes y se organizó la información encontrada teniendo en cuenta el procedimiento que siguió cada estudiante al resolver cada una de las tareas y la respuesta asociada a este procedimiento.

Tabla 6:

Instrumento 1, Tipicacion de resultados

PROCEDIMIENTO		
COD	Descripción	Respuestas asociadas
R1		
R2		

Origen: Creación propia

En esta tabla se clasifica el procedimiento seguido por cada estudiante y se codifica el procedimiento con R1, R2, etc. Se hace una descripción de este procedimiento y de la respuesta

asociada a este procedimiento. Este instrumento se aplicó a cada una de las tareas de las pruebas. Ver en anexo 2 y 3: tabulación de resultados.

Tabla 7:

Instrumento 2, tabulación de resultados

Guía ____ Tarea ___			
(Descripción de la tarea)			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	***COD RESP***	***PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN***	***RESPUESTA DESCRIPCIÓN***
E1	***R1***		
E2	***R2***		

Origen: Creación propia

En este instrumento, inicialmente (dos primeras filas) se describe la pregunta tal y como aparece en la guía aplicada; a partir de la tercera fila, aparecen 4 columnas donde, en la primera se codifica a los estudiantes como E1, E2, etc., en las siguientes columnas se describe el describe el procedimiento y respuesta dada por cada uno de los estudiantes y se clasifica según la codificación del instrumento 1.

6.5.2 Momento dos: se comparan los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes en la prueba inicial y final.

Tabla 8:

Instrumento 3, comparación de los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes en la prueba inicial y final.

PROCEDIMIENTO			**PRUEBA INICIAL**			**PRUEBA FINAL**		
COD	Descripción	Respuestas asociadas	Núm. estud	%	Evidencias Ver anexo 2, prueba inicial, Tarea 1	Núm. estud	%	Evidencias Ver anexo 2, prueba final, Tarea 1
R1								

Origen: Creación propia

En este instrumento se agrupan los procedimientos y respuestas de los estudiantes que participaron en cada prueba, según la Tipicacion realizada en el instrumento 1. Además, se compara la prueba inicial y final para ver la posible evolución de los estudiantes.

Tabla 9:

Instrumento 4, Comparación de las producciones de cada estudiante en las pruebas inicial y final

TAREA 1			
Cod	Código Procedimiento		Mejora
est	Prueba inicial	Prueba final	
E1	R2	R1	+

Origen: creación propia

En este instrumento se compara estudiante por estudiante las respuestas de cada tarea en las pruebas inicial y final. En la última columna de la derecha de la tabla se hace una valoración del cambio que se produjo en la respuesta de cada estudiante, se indican tres casos así + si el estudiante mejora, - si el estudiante no presenta mejoría y = si el estudiante continua en un nivel igual al inicial.

6.5.3 Momento 3: Análisis de resultados

En este momento se realiza un análisis detallado acerca de las respuestas y procedimientos que realizaron los estudiantes en cada una de las tareas propuestas en el estudio; para ello se tuvieron en cuenta: las producciones escritas, las entrevistas y las tabulaciones realizadas en los momentos anteriores.

El análisis es de carácter mixto, en la primera parte se realiza un análisis de tipo cuantitativo, de corte descriptivo, primero se tipifican y comparan los procedimientos y respuestas que dan los estudiantes a las preguntas de las pruebas inicial y final, y, enseguida se comparan estos resultados con el fin de ver el posible avance que tuvieron los participantes.

En este instrumento se muestra el avance que tuvieron los estudiantes que participaron en la experiencia, teniendo en cuenta que en la prueba inicial y final se aplicaron las mismas tareas.

Tabla 10:

Instrumento 5: Comparación de las respuestas de cada estudiante en la tarea __ de las pruebas inicial y final

TAREA ___			
Cod est	Código Procedimiento		Mejora
	Prueba inicial	Prueba final	
E1	R2	R1	+
E2	R2	R1	+
E3	R2	R2	=
E4	R2	R1	+

Origen: Creación propia

El instrumento se divide en cuatro columnas; inicialmente se codifica al estudiante, a continuación, se presentan las respuestas (los códigos) de cada estudiante en las pruebas inicial y final de la tarea analizada; En la última columna se califica el desempeño del sujeto teniendo en cuenta si su nivel mejoró (+) o continua igual (=).

La segunda parte del análisis es de tipo cualitativo, donde se amplía y profundiza el análisis cuantitativo realizado en el apartado anterior, para ello se realizó estudio de casos, mediante los cuales se buscó describir, interpretar y analizar la información a nivel particular para llegar a comprender la forma de actuar de cada sujeto en circunstancias importantes, para ello, tomaron tres casos particulares, cada uno de un nivel de desempeño distinto en matemática (alto, medio y bajo) y se recurre a las producciones de los tres estudiantes tanto en las entrevistas a profundidad que se realizaron después de cada aplicación (antes y después del desarrollo de las experiencias de desplazamiento), como, en las producciones a lo largo de una secuencia didáctica.

Inicialmente, se analiza la información de los estudiantes que se tomaron como estudio de caso. realizando un análisis intrasujeto de las respuestas de cada caso en el que se focalizó la

observación, tanto en las tareas que componen las pruebas inicial y final (ver anexos 4, 5, y 6, correspondientes a los tres niveles alto, medio y bajo, respectivamente), como de la información obtenida en las entrevistas a profundidad. A continuación, se comparan las producciones de los casos estudiados (análisis intersujetos), buscando obtener información útil que permita explorar más a profundidad las producciones de estos estudiantes, con el fin de precisar las descripciones sobre los procedimientos que se identificaron en el análisis de tipo cuantitativo y ofrecer explicaciones de éstas.

En el siguiente instrumento se tienen en cuenta tres categorías de comparación: Semejanza de los procedimientos, Comprensión de los enunciados e interpretación de los valores dados en el problema. En las columnas se muestran las producciones de cada estudiante según la categoría seleccionada. Este instrumento se aplicó para cada una de las tareas aplicada en la prueba inicial (antes de la secuencia didáctica) y en la prueba final (después de la secuencia didáctica).

Tabla 11:

Instrumento 6: Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes en las tareas de composición. ----- de la secuencia didáctica

Momento	***Categoría de comparación***	***Sujeto E1 Nivel alto***	***Sujeto E22 Nivel medio***	***Sujeto E20 Nivel bajo***
Inicial. (antes de la secuencia didáctica)	Respuestas en la prueba			
	Semejanza de los procedimientos en las dos tareas			
	Comprensión de los enunciados relacionales simples.			
	Interpretación de los valores que determinan las diferencias de cantidades de naranjas en los cestos.			

Origen: Creación propia

7. ANÁLISIS DE DATOS

El capítulo se divide en dos partes que corresponden a los dos tipos de análisis realizados. En la primera parte se presenta un análisis de tipo cuantitativo, que, como se ha dicho, es de corte descriptivo, en el que, primero se tipifican y comparan los procedimientos y respuestas que dan los estudiantes a las preguntas de las pruebas inicial y final, y, enseguida se comparan estos resultados con el fin de ver el posible avance que tuvieron. En la segunda parte se realiza el análisis cualitativo de los casos de estudio, para ello se recurre a las producciones de los estudiantes tanto en las entrevistas a profundidad que se realizaron después de cada aplicación (antes y después del desarrollo de las experiencias de desplazamiento), como, a las producciones a lo largo de las experiencias de desplazamiento. Con este análisis cualitativo se busca encontrar información que permita, por una parte, ampliar y precisar un poco más las descripciones que se obtienen con las producciones escritas que dejan los estudiantes y, por otra, quizá más importantes, intentar explicar estas respuestas.

7.1 Análisis Cuantitativo. Comparación de las respuestas a las tareas de composición de relaciones y de operadores

En este apartado se tipifican y comparan las respuestas que dan los estudiantes a las tareas de la prueba de composición de relaciones y de operadores. El uso de la expresión <respuesta> aquí es amplio, hace referencia a lo que produce el estudiante cuando intenta resolver una tarea, realmente se compone del resultado que obtiene (la respuesta en términos restrictivos), del procedimiento que sigue y, si es el caso, también incluyen las justificaciones que ofrece.

Para este análisis, primero se estudiaron las respuestas que se ofrecen en los dos momentos (inicial y final) y se identificaron los procedimientos que se tomaron como tipos. Como se

encontró que para un mismo procedimiento aparecen respuestas distintas en la tabla en el que se tipifican los procedimientos se abre una columna para describirlas.

7.1.1 Tarea 1

En un cesto A hay 7 naranjas más que en uno B, y en este B hay 6 naranjas menos que en un cesto C. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos A y C. ¿cuál tiene más?, ¿cuántas más? Explique cómo hace las cuentas.

7.1.1.1 Descripción y Tipificación de procedimientos y respuestas asociadas.

En las páginas siguientes se muestra la tabla No 12, en la que se comparan los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes a en la tarea 1 de las pruebas inicial y final.

Los resultados obtenidos en esta tarea muestran que mientras en la prueba inicial únicamente un estudiante se aproxima a la respuesta correcta mediante un procedimiento razonable (R1): toma valores para cierta cantidad de naranjas que hay en los tres recipientes que satisfagan las relaciones del enunciado y después compara las cantidades que hay en A y en C; en la prueba final son 10 los estudiantes que se aproximan a la respuesta mediante este tipo de procedimiento.

Los demás estudiantes, pese a que algunos dan como respuesta el enunciado: el cesto A tiene una naranja más que el cesto C, que es verdadero, no cuantifican la diferencia (es decir que en A hay una naranja más que en C).

Queda pendiente indagar si el procedimiento que siguen los estudiantes para contestar R1, supone tener conciencia de que lo que ocurre con el caso particular que toman como ejemplo para hacer la comparación puede generalizarse (es decir, ocurre para cualquier terna de valores de las cantidades de naranjas que hay en los cestos de A, B y C siempre que satisfagan las condiciones del problema), o, por el contrario, se trata de una respuesta local y consideran que la

Tabla 12:

Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes a la tarea 1 en la prueba inicial y final.

PROCEDIMIENTO			PRUEBA INICIAL			PRUEBA FINAL		
COD	Descripción	Respuestas asociadas	Núm. estud	%	Evidencias Ver anexo 2, prueba inicial, Tarea 1	Núm. estud	%	Evidencias Ver anexo 2, prueba final, Tarea 1
R1	Inventa un ejemplo de solución, asigna valores a la cantidad de naranjas de cada cesto y tiene en cuenta las diferencias indicadas en el enunciado.	"En el cesto A hay más que en el C por 1" "El cesto A hay más naranjas que en la C" "Yo me baso en la lectura y doy un ejemplo"	1	4.54	Estudiante E5	10	45.45	Estudiante E1
R2	Suma las cantidades indicadas en el enunciado y luego al resultado le resta la diferencia indicada entre el cesto B y C 7 + 6 = 13 13 – 6 = 7	"El cesto A tiene más que C por 1" "Tiene más el cesto A que el C" "El cesto A tiene más que el C por 2" "A es mayor que C por 6 naranjas" "El resultado da 7"	5	22.72	Estudiante E1	3	13.64	Estudiante E12
R3	Suma y resta las cantidades indicadas en los dos enunciados correspondientes a las relaciones (7 y 6), luego suma los resultados de las operaciones. 7 + 6 = 13 7 - 6 = 1 13 + 1 = 14	"A tiene más que B y en C no hay un número exacto" "La C tiene más 14" "Tienen la misma cantidad" "Solo presenta las operaciones"	5	22.73	Estudiante E6	3	13.64	Estudiante E8
R4	Suma las cantidades que aparecen en el enunciado (7 y 6), (parece que asume que esta es la cantidad de naranjas que hay en los cestos A y B) 7 + 6 = 13	"En el cesto A hay más que en el C" "En el A y en el C hay 13 en cada uno" "Presenta solo operaciones"	5	22.73	Estudiante E7	2	9.09	Estudiante E9
R5	Suma tres números (7, 5 y 6)	"Me dio 18"	5	18.18		1	4.54	

	7 + 5 + 6 = 18	“En la canasta A hay más 5” “Presenta solo operaciones”			Estudiante E15			Estudiante E15
R6	Suma dos números (5 y 2) 5 + 2 = 7	“Presenta solo operaciones”	1	4.54	Estudiante E22			
R7	Da una respuesta equivocada, indicando con palabras la relación entre la cantidad de naranjas de los tres cestos, pero no realiza operaciones ni justifica su respuesta.	“Tienen la misma cantidad”	1	4.54	Estudiante E8	1	4.54	Estudiante E8
R8	Da una respuesta correcta, pero no realiza operaciones ni justifica su respuesta.	“En el cesto A hay más que en el C”				1	4.54	Estudiante E17
R9	El estudiante resta las dos cantidades (7 y 6) que aparecen en el enunciado del problema y con base en este resultado indica la diferencia entre los cestos	“En A hay más 1 que en la C”				1	4.54	Estudiante E19

Origen: Fuente Propia

diferencia entre A y C cambia para otros valores diferentes a los dados a pesar de que estos nuevos valores satisfagan las condiciones establecidas por los enunciados. Más adelante, se tratará de aportar información al respecto con los datos de las entrevistas.

7.1.1.2 Comparación de las producciones de cada estudiante en las pruebas inicial y final

A continuación, se comparan estudiante por estudiante las respuestas de cada tarea en las pruebas inicial y final. En la última columna de la derecha de la tabla se hace una valoración del cambio que se produjo en la respuesta de cada estudiante; se consideran dos casos así:

a) Estudiantes que muestran un cambio mejorante (+)

Es decir, estudiantes que en la prueba final se desempeñan mejor en las tareas de composición de relaciones de orden y composición de operadores aditivos que en la prueba inicial. Estos casos corresponden a los estudiantes que muestran un tipo de respuestas tipo R2, R3, R4, R5, R6 o R7 en la prueba inicial y pasan a R1, R8 y R9 en la prueba final.

b) Estudiantes que muestran un cambio No mejorantes (=)

Con estos estudiantes, pese a que realizaron la secuencia didáctica no hay progresos en la composición de relaciones y transformaciones de desplazamientos, puede ser que partiendo de respuesta de tipo R2, R3, R4, R5, R6 o R7 en la prueba inicial, mantienen en el mismo tipo de respuesta u otro diferente en la final que no sea R1, o, un caso especial, en que en ambos momentos ofrece respuestas tipo R1.

NOTA. Se evita incluir una clase de casos desmejorantes, dado que con la información hasta ahora analizada no se tienen criterios para establecer una jerarquía entre procedimientos y respuestas que se podrían considerar incorrectos.

De los 22 estudiantes que participaron en la experiencia, únicamente uno (E5), ofrece la respuesta de tipo R1 en ambos momentos (la iniciar y al finalizar) y 11 que dieron respuestas

Tabla 13:

Comparación de las respuestas de cada estudiante en la tarea 1 de las pruebas inicial y final

TAREA 1			
Cod est	Código Procedimiento		Mejora
	Prueba inicial	Prueba final	
E1	R2	R1	+
E2	R2	R1	+
E3	R2	R2	=
E4	R2	R1	+
E5	R1	R1	+
E6	R3	R3	=
E7	R4	R1	+
E8	R7	R7	=
E9	R4	R4	=
E10	R3	R1	+
E11	R3	R3	=
E12	R2	R2	=
E13	R3	R3	=
E14	R3	R1	+
E15	R5	R5	=
E16	R5	R2	=
E17	R5	R8	+
E18	R5	R1	+
E19	R4	R9	+
E20	R4	R4	=
E21	R4	R1	+
E22	R6	R1	+

Origen: Fuente propia

tipo R2, R3, R4, R5, R6 o R7 en la prueba inicial pasan a ofrecer una respuesta correcta (R1, R8 o R9). Claramente estos casos los calificamos de desempeño mejorante. De estos 11 casos, 9 ofrecen la respuesta R1. El número de estos estudiantes representan el 54.54% de los participantes. Los otros 10 estudiantes que dieron una respuesta incorrecta en prueba inicial mantienen una respuesta incorrecta en la final (bien porque dan una respuesta del mismo tipo o de otro tipo diferente). El 45.46% continúan en el nivel inicial pese a que participaron en el juego de la ruta.

7.1.2 Tarea 2

En un cesto M hay 5 naranjas menos que en un cesto N, y en este N hay 6 naranjas más que en un cesto P. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos M y P. ¿cuál tiene más?, ¿cuántas más? Explique cómo hace las cuentas.

7.1.2.1 Descripción y tipificación de procedimientos y respuestas asociadas.

En las páginas siguientes se muestra la tabla No 14, en la que se comparan los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes a la tarea 2 en las pruebas inicial y final.

Los resultados que se muestran en la tabla 3 indican que en esta tarea, al igual que en la tarea No 1 en la prueba inicial, únicamente el estudiante E5 da una respuesta correcta (R1) a la tarea en las dos pruebas (inicial y final) y las resuelve asignando valores a cada uno de los cestos (M, N y P) de tal forma que se cumplan las condiciones del enunciado y luego compara la cantidad de naranjas que hay en los cestos M y P para dar su respuesta; en la prueba final 13 estudiantes se aproximan a la respuesta (R1, R8, R9) utilizando un procedimiento adecuado, mientras que los demás estudiantes (8), no logran establecer las condiciones que exige el enunciado del problema. Sin embargo, en esta tarea como en la anterior, es necesario revisar si el procedimiento que utilizan los estudiantes que responden (R1, R8 o R9) en esta tarea es claro para ellos y logran entender que las relaciones que se dan en el enunciado (en M hay menos 5 naranjas que en N y en N hay 6 naranjas más que en P) se cumplen para cualquier terna de valores; o si por el contrario, consideran que este valor (la diferencia entre M y P) cambia, pese a que los ejemplos cumplan con las condiciones del enunciado.

Tabla 14:

Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes a la tarea 2 en la prueba inicial y final.

PROCEDIMIENTO			PRUEBA INICIAL			PRUEBA FINAL		
COD	Descripción	Respuestas asociadas	Núm. estud	Evidencias Ver anexo 2, prueba inicial, tarea 2	%	Núm. estud	Evidencias Ver anexo 2, prueba final. Tarea 2	%
R1	Inventa un ejemplo de solución, asigna valores a la cantidad de naranjas de cada cesto y tiene en cuenta las diferencias indicadas en el enunciado.	"En el cesto M hay más que en el P. Hay 1 naranja más" "Yo me baso en la lectura y doy un ejemplo: M16, N21, P15" "Tienen la misma cantidad" "P es mayor que M"	1	Estudiante E5	4.54	10	Estudiante E1	45.45
R2	Suma las cantidades indicadas en el enunciado y luego al resultado le resta la diferencia indicada entre el cesto N y P 5 + 6 = 11 6 – 5 = 1	"En el cesto M hay más naranjas que en el P, hay una naranja más" "El cesto P tiene más que M" "P es mayor que M por 6 naranjas" "Tiene más el cesto N"	3	Estudiante E1	13.64	2	Estudiante E3	9.09
R3	Suma y resta las cantidades indicadas en los dos enunciados correspondientes a las relaciones (5 y 6), luego suma los resultados de las operaciones. 5 + 6 = 11 6 – 5 = 1 11 + 1 = 12	"En el cesto M hay más naranjas que en el P, hay 1 naranja más" "La P tiene más 12" "Solo presenta las operaciones"	6	Estudiante E2	27.27	3	Estudiante E6	13.64
R4	Suma las cantidades que aparecen en el enunciado (5 y 6), (parece que asume que esta es la cantidad de naranjas que hay en los cestos M y N) 5 + 6 = 11	"Tiene más naranjas el cesto N" "El resultado da 11" "El P tiene más" "Presenta solo operaciones"	5	Estudiante E7	22.73	2	Estudiante E9	9.09
R5	Suma tres números (5, 9, 6 y 17) 5 + 9 + 6 + 17 =37	"P es mayor que M" "Presenta solo operaciones"	4	Estudiante E18	18.18	1	Estudiante E15	4.54

R7	Da una respuesta equivocada, indicando con palabras la relación entre la cantidad de naranjas de los tres cestos, pero no realiza operaciones ni justifica su respuesta.	“Tienen la misma cantidad”	3	Estudiante E8	13.64			
		“Creo que es la 6 porque tiene 1 más”						
R8	Da una respuesta correcta, pero no realiza operaciones ni justifica su respuesta.	“Tiene más el cesto M”				2	Estudiante E17	9.09
		“P es mayor que M”						

Origen: Creación propia

7.1.2.2 Comparación de las producciones de cada estudiante en las pruebas inicial y final

A continuación, se compara, estudiante por estudiante, las respuestas de la tarea 2 en las pruebas inicial y final. En forma semejante a como se hizo en la tarea anterior en la última columna de la derecha de la tabla se hace una valoración del cambio que se ´produjo en la respuesta de cada estudiante.

Tabla 15:

Comparación de las respuestas de cada estudiante en la tarea 2 de las pruebas inicial y final.

TAREA 2			
Cod est	Código Procedimiento		Mejora
	Prueba inicial	Prueba final	
E1	R2	R1	+
E2	R3	R1	+
E3	R2	R2	=
E4	R2	R1	+
E5	R1	R1	=
E6	R3	R3	=
E7	R4	R1	+
E8	R7	R8	+
E9	R4	R4	=
E10	R3	R1	+
E11	R3	R3	=
E12	R4	R9	+
E13	R3	R3	=
E14	R3	R1	+
E15	R5	R5	=
E16	R5	R2	=
E17	R5	R8	+
E18	R5	R1	+
E19	R7	R9	+
E20	R4	R4	=
E21	R4	R1	+
E22	R7	R1	+

Origen: Creación propia

De los 22 estudiantes que participaron en la experiencia, únicamente uno (E5), ofrece la respuesta de tipo R1 en ambos momentos (la iniciar y al finalizar) y 12 que dieron respuestas tipo R2, R3, R4, R5, R6 o R7 en la prueba inicial pasan a ofrecer una respuesta correcta (R1, R8 o R9). Claramente estos casos los calificamos de desempeño mejorante. Los otros 8 estudiantes

que dieron una respuesta incorrecta en prueba inicial mantienen una respuesta incorrecta en la final (bien porque dan una respuesta del mismo tipo o de otro tipo diferente pero igualmente incorrecta).

7.1.3 Tarea 3

Si a “16” se le suma 8, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial “16” o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta.

7.1.3.1 Descripción y tipificación de procedimientos y respuestas asociadas

En la tabla No 16, se comparan los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes a la tarea 3 en la prueba inicial y final.

Los resultados obtenidos en esta tarea muestran que mientras en la prueba inicial 86.36% de los estudiantes se aproximan a la respuesta correcta mediante un procedimiento razonable (R1), siguiendo las operaciones dadas en el enunciado; luego comparando las cantidades inicial y final, en la prueba final aumentó el porcentaje de estudiantes (90.91%) que responden correctamente; de este porcentaje de estudiantes que se aproximan a la respuesta mediante este tipo de procedimiento, 15 dan la respuesta correcta “El número inicial es mayor que el resultado final, es mayor por 3”. Los demás estudiantes, pese a que algunos dan la respuesta correcta, no expresan con claridad las relaciones que exige el problema. Claramente es una tarea que hace una exigencia cognitiva elemental a los estudiantes de este grado, debido a que es un problema que para ser resuelto no basta con ejecutar las transformaciones en el orden en que se dan en el enunciado del problema.

Tabla 16:

Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes en la tarea 3 de las pruebas inicial y final.

PROCEDIMIENTO			PRUEBA INICIAL			PRUEBA FINAL		
COD	Descripción	Respuestas asociadas	Núm. estud	Evidencias Ver anexo 2, prueba inicial, tarea 3	%	Núm. estud	Evidencias Ver anexo 2, prueba final. Tarea 3	%
R1	Al número inicial (16), le suma la cantidad indicada (8) y al resultado le resta la cantidad indicada (11) en el enunciado; Luego compara el número inicial con el resultado final. 16 + 8 = 24 24 – 11 = 13	"El número inicial es mayor que el resultado final, es mayor por 3" "El número inicial es mayor que el final" "El mayor es el 24, sigue el 16, luego el 11 y el menor es el 8" Solo presenta operaciones	19	Estudiante E1	86.36	20	Estudiante E1	90.91
R2	El estudiante suma las cantidades indicadas en el enunciado (16, 8 y 11) 16 + 8 + 11 = 35	"El mayor es el 35 y el menor es el 8" "Pues es mayor 16 que 8"	1	Estudiante E7	4.54	1	Estudiante E15	4.54
R3	Suma 4 números (16, 11, 8, y 16) 16 + 8 + 11 + 16 = 51	"Solo presenta operaciones"	1	Estudiante E21	4.54			
R4	Solo da una respuesta, pero no hace operaciones ni justifica	"Pues que en la P hay menos que en la M"				1	Estudiante E12	4.54
R5	No responde	No responde	1	Estudiante E9	4.54			

Origen: Creación propia

7.1.3.2 Comparación de las producciones de cada estudiante en las pruebas inicial y final

A continuación, en la tabla 17, se compara estudiante por estudiante las respuestas que dieron en la tarea 3 de las pruebas inicial y final. Aquí también en la última columna de la derecha se hace una valoración del cambio que se produjo en la respuesta de cada estudiante; las dos categorías que se contemplan tienen pequeñas modificaciones con relación a las utilizadas en las tareas 1 y 2 así:

a) Estudiantes que muestran un cambio mejorante (+)

Estos casos corresponden a los estudiantes que muestran un tipo de respuestas tipo R2, R3 , R5, en la prueba inicial y R1 o R4, en la prueba final.

b) No mejorantes (=)

Con estos estudiantes, no hay progresos en la composición de operadores, pueden ser que siendo su respuesta de tipo R2, R3, o R5 en la prueba inicial mantienen en el mismo tipo de respuesta o producen otra de los tipos R2, R3, o R5.

De los 22 estudiantes que participaron en la experiencia y de los que se tiene registro de ambas pruebas, se tiene que, en 16 estudiantes, su respuesta es de tipo R1 en ambos momentos (la iniciar y al finalizar) y 5 estudiantes que habiendo ofrecido respuestas tipo R2, R3, R5 o R6 en la prueba inicial pasan a ofrecer una respuesta correcta (R1) claramente los calificamos con un desempeño mejorante.

El otro caso dio una respuesta de tipo (R1) en la prueba inicial, muestra una respuesta de tipo (R4) en la prueba final (pero continúa siendo verdadera) Se observa que el 72.72 % de los estudiantes que presentaron la prueba inicial y final y resolvieron la tarea 3 mantuvieron su nivel

logrando resolver la tarea de forma correcta, mientras que el 27.28 % mejoraron su nivel de procedimiento.

Tabla 17:

Comparación de las respuestas de cada estudiante en la tarea 3 de las pruebas inicial y final

TAREA 3			
Cod est	Código Procedimiento		Mejora
	Prueba inicial	Prueba final	
E1	R1	R1	=
E2	R1	R1	=
E3	R1	R1	=
E4	R1	R1	=
E5	R1	R1	=
E6	R1	R1	=
E7	R2	R1	+
E8	R1	R1	=
E9	R5	R1	+
E10	R1	R1	=
E11	R1	R1	=
E12	R1	R4	=
E13	R1	R1	=
E14	R1	R1	=
E15	R1	R1	=
E16	R1	R1	=
E17	R1	R1	=
E18	R1	R1	=
E19	R1	R1	=
E20	R6	R1	=
E21	R3	R1	+
E22	R1	R1	=

Origen: Creación Propia

7.1.4 Tarea 4

A un número desconocido primero se le suma 8, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial desconocido o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta.

7.1.4.1 Descripción y tipificación de procedimientos y respuestas asociadas

En la página siguiente se muestra la tabla No 18, en la que se comparan los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes a la tarea 4 en las pruebas inicial y final.

Tabla 18:

*Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes en la tarea 4 de **las** pruebas inicial y final.*

PROCEDIMIENTO			PRUEBA INICIAL			PRUEBA FINAL		
COD	Descripción	Respuestas asociadas	Núm. estud	Evidencias Ver anexo 2, prueba inicial, tarea 4	%	Núm. estud	Evidencias Ver anexo 2, prueba final. Tarea 4	%
R1	Inventa un número inicial ___, a este le suma la cantidad indicada (8) y al resultado le resta la cantidad indicada (11) en el enunciado; luego compara el número inicial con el resultado final.	"El número inicial es mayor que el resultado final, es mayor por 3" "El número inicial es mayor que el final" Solo presenta operaciones	18	Estudiante E1	81.82	21	Estudiante E1	95.45
R2	El estudiante suma las cantidades indicadas en el enunciado (8 y 11) 8 + 11 = 19	Solo presenta operaciones "El número mayor es el 11 y el menor es el 8"	2	Estudiante E21	9.09			
R4	Solo da una respuesta, pero no hace operaciones ni justifica	"ocho es menor que once"				1	Estudiante E9	4.54
R6	Intenta hacer la operación (+ 8 – 11 = ¿?), Pero no encuentra solución	"No hay un número desconocido"	1	Estudiante E14	4.54			
R7	Da un valor al número desconocido y solo suma 8, compara los dos sumandos 2 + 8 = 17	"El 8 es mayor que el 2"	1	Estudiante E20	4.54			

Origen: Creación propia

Los resultados muestran que en la prueba inicial el 81.82% de los estudiantes se aproxima a la respuesta correcta mediante un procedimiento razonable (R1), siguiendo las operaciones dadas en el enunciado; luego comparando las cantidades inicial y final, en la prueba final aumentó ese porcentaje a 95.45%; De este porcentaje 17 estudiantes dan la respuesta correcta “El número inicial es mayor que el resultado final, es mayor por 3”, pese a que no logran establecer las relaciones que exige el problema.

7.1.4.2 Comparación de las producciones de cada estudiante en las pruebas inicial y final

En la tabla 19 se comparan las respuestas de la tarea 4 en las pruebas inicial y final. La valoración del cambio sigue los mismos criterios aplicados en la tarea 3.

Tabla *19:*

Comparación de las respuestas de cada estudiante en la tarea 4 de las pruebas inicial y final

TAREA 4			
Cod est	Código Procedimiento		Mejora
	Prueba inicial	Prueba final	
E1	R1	R1	=
E2	R1	R1	=
E3	R1	R1	=
E4	R1	R1	=
E5	R1	R1	=
E6	R1	R1	=
E7	R2	R4	=
E8	R1	R1	+
E9	R1	R1	+
E10	R1	R1	=
E11	R1	R1	=
E12	R1	R4	=
E13	R1	R1	=
E14	R6	R1	+
E15	R1	R1	=
E16	R1	R1	=
E17	R1	R1	=
E18	R1	R1	=
E19	R1	R1	=
E20	R7	R1	=
E21	R2	R1	+
E22	R1	R1	=

Origen: Creación propia

De los 22 estudiantes 18 ofrecen una respuesta de tipo R1 en ambas pruebas (la iniciar y al finalizar) y 3 estudiantes que habiendo ofrecido respuestas tipo R2, R4, R6 o R7 en la prueba inicial pasan a ofrecer una respuesta correcta (R1). El otro caso dio una respuesta de tipo (R2) en la prueba inicial y muestra una respuesta de tipo (R4) en la prueba final, por lo cual su desempeño se califica como no mejorante.

Se observa que el 81.82% de los que contestaron inicialmente de forma correcta mantiene su nivel de respuesta entre una prueba u otra, mientras que el 13.63% mejoraron su proceder, y solo el 4,54 % (1 estudiante) continúa en el nivel inicial pese a que participo en el juego de la ruta.

Ninguno de los estudiantes muestra que comprende este problema como composición de operadores, razón por la que tienen que resolverlo mediante un caso particular que utilizan como ejemplo. La información que arrojan las pruebas no es suficiente para saber si estos estudiantes tienen conciencia de que lo que ocurre para un valor particular que se dé del número inicial desconocido, ocurre para cualquier valor, o, más bien, consideran que la diferencia entre el número inicial y el resultado final cambia según el valor que se tome como partida, se espera que la información de las entrevistas arroje alguna luz al respecto.

7.2 Análisis Cualitativo. Análisis intersujetos

En esta sesión se amplía y profundiza el análisis cuantitativo realizado en el apartado anterior, se analiza la información de los estudiantes que se tomaron como estudio de caso. Primero se realizó un análisis intrasujeto de las respuestas de cada caso en el que se focalizó la observación, tanto en las tareas que componen las pruebas inicial y final (ver anexos 4, 5, y 6, correspondientes a los tres niveles alto, medio y bajo, respectivamente), como de la información obtenida en las entrevistas a profundidad. En segundo lugar, se compararon las producciones de

los casos estudiados (análisis intersujetos), que es el que se muestra en este apartado. Con este análisis cualitativo se busca obtener información útil que permita explorar más a profundidad las producciones de estos estudiantes, con el fin de precisar las descripciones sobre los procedimientos que se identificaron en el análisis de tipo cuantitativo y ofrecer explicaciones de éstas. En particular, se busca indagar si empíricamente se da alguna relación entre las capacidades de manejar composiciones de relaciones y operadores y las tareas de desplazamientos.

El lector encontrará, en primer lugar, un análisis comparativo sobre las tareas de composición de relaciones, en segundo lugar, lo similar con tareas de composición de operadores. Por último, un apartado que analiza lo relativo a tareas de desplazamientos puesto en relación con las producciones en tareas de relación y los operadores

7.2.1 Análisis comparativo sobre las tareas de composición de relaciones antes de la secuencia didáctica.

En la tabla 20 (página siguiente) se presenta la descripción de los análisis de las producciones de los estudiantes antes de la secuencia didáctica. Como se ha dicho se toman como referencia la información de los análisis cualitativos que aparecen en los anexos, así: anexo 4 corresponde al estudiante E1, nivel alto, anexo 5 estudiante E22 nivel medio y anexo 6 estudiante E20, nivel bajo. Se tomaron algunos criterios para realizar las comparaciones, a continuación, se describe los resultados encontrados en cada categoría.

a) Reconocimiento de la semejanza de las dos tareas. Aunque los sujetos de nivel alto y bajo coinciden en que en la tarea 2 siguen el mismo procedimiento que realizaron en la tarea 1, el

Tabla 20:

Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes en las tareas de composición de relaciones antes de la secuencia didáctica

Momento	***Categoría de comparación***	***Sujeto E1 Nivel alto***	***Sujeto E22 Nivel medio***	***Sujeto E20 Nivel bajo***
Inicial. (antes de la secuencia didáctica)	*Respuestas en la prueba*	En ambas tareas R2. Suma las cantidades indicadas en los enunciados relacionales y luego al resultado le resta la diferencia indicada entre el segundo y tercer cesto. En la T1 contesta correctamente (en A hay uno más que en C), en la dos incorrectamente (en M tiene menos que P por 1)	En T1, R6. Suma 5 + 2 = 7. En la entrevista dice que en A hay 7 y que en B 5. Y como C tiene menos toma el valor de 5. En T2, "En la P y M dan lo mismo porque 6 se le quita ese número y todos quedan con 5 = 6 - 1 = 5 = 5 4 = 5	En ambas tareas R4. Suma las cantidades que aparecen los enunciados (en la tarea 1 ejecuta 7 + 6 y en la tarea 2 suma 5 + 6).
	Semejanza en los procedimientos de las dos tareas	Sigue el mismo procedimiento en las dos tareas. Reconoce explícitamente la semejanza de las dos tareas.	Sigue procedimientos diferentes en las dos tareas.	Sigue el mismo procedimiento en las dos tareas
	Comprensión en los enunciados relacionales simples.	Interpreta correctamente los enunciados simples. Puede obtener parejas de valores que satisfacen los enunciados relacionales	*A partir del enunciado. <en un cesto A hay 7 naranjas más que en uno B>, identifica quien tiene más y cuántas más, pero no puede obtener pares de valores que satisfagan las condiciones del enunciado*	A partir del enunciado <en A hay 7 más que en B> reconoce que en A hay más y en B hay menos, pero las enunciaciones que hace para establecer comparaciones son incompletas
	Interpretación de los valores que determinan las diferencias de cantidades de naranjas en los cestos.	Aunque termina tomándolos como valores absolutos (como la cantidad de naranjas en los cestos y no la diferencia relativa) manifiesta que sabe que no es así.	Los toma como absolutos	Los toma como absolutos

Origen: Creación propia

sujeto de nivel alto manifiesta explícitamente que en dos hace lo mismo que en uno: *Yo lo intenté hacer igual que este [que la primera tarea*] (anexo 4, p. 3). EL sujeto de nivel medio parece no reconocer la semejanza de las dos tareas, sigue procedimientos diferentes.

b) Comprensión de los enunciados relacionales simples de la forma, en el cesto 1 hay ___ más (o menos) que en el 2"

El sujeto de nivel alto interpreta correctamente los enunciados relacionales simples

E1*: Que en el cesto A hay 7 naranjas más que en el cesto B. Es decir, que en el A hay más que en el B*
P1*: ¿Cuántas más hay en el A que en el B?*
E1*: 7*

Además, obtiene parejas de valores que satisfacen el enunciado relacional

P1*: Póngame un ejemplo, por ejemplo, ¿Cuántas podría haber en A y cuántas en B para que se cumpla la condición?*
E1*: 1 [en el cesto B] y acá 7 [en el cesto A]*
P1*: ¿Cuantas naranjas más tiene A que B?*
E1: *6*
P1*: ¿Entonces qué arregla?*
E1*: que acá no tiene nada, y acá 7*
P1*: Bueno, puede ser, listo. ¿Póngame otro ejemplo?*
E1*: que acá hay 14, y acá 7.*
P1*: ...Listo, muy bien, otro ejemplo.*
E1*: ... 27 [en B] y acá 34 [en A].*

El sujeto de nivel medio, aunque a partir del enunciado. <en un cesto A hay 7 naranjas más que en uno B>, logra identificar quien tiene más y cuántas más, tiene dificultad para obtener pares de valores que satisfagan las condiciones del enunciado.

P: Este es el cesto A y aquí tenemos al cesto B, y aquí tenemos otro cesto C. Leamos ¨[ver imagen 2]. En un cesto A hay 7 naranjas más que en uno B. ¿Quién tiene más?
E22: A
P: ¿Cuántas más?
E22: 7
P: Es decir, aquí [cesto A] hay 7 más que acá [cesto B]. ¿Podrías dar un ejemplo para que se cumpla esto?
E22: Pues aquí tuviera que haber 6 y aquí 7
P: ¿Y se cumple que aquí [cesto A] hay 7 más que acá [cesto B]?
E22: No.
P: ¿Entonces?

E22: Está muy difícil. No entiendo.

El sujeto de nivel bajo, aunque parece reconocer que en A hay más que en B Las enunciaciones que hace para establecer la comparación son incompletas

E20: En la B hay menos, y en la A hay más.
P1: en la B hay menos y en la A hay más. ¿Por qué sabe que en la B hay menos?
E20: porque hay 6.
P1: ¿Porque hay 6 qué? ¡Ayúdanos leyendo si puedes por favor!
E20: hay 6 naranjas menos.

No dice, por ejemplo, <en A 13 naranjas más que en C>, en unos casos elimina su carácter relacional y lo expresa en términos absolutos: "13 naranjas" o no expresa los términos (los argumentos de la relación) simplemente enuncia "7 naranjas más".

E20: 7+6 son 13
P1: ¿Y ese 13 que quiere decir?
E20: 13 naranjas
P1: ¿Sí, son 13 naranjas, de dónde?, ¿qué había en dónde?
E20: Silencio
P1…Bueno… ¿este 7 que es?
E20: 7 naranjas más

c) Interpretación de los valores que determinan las diferencias de cantidades de naranjas en los cestos.

El sujeto de nivel alto termina tomando los valores que determina la diferencia de cantidad como valores absolutos. Para la tarea 1 dice:

E1*: El cesto A tiene más que el C por 1.*
P1*: Explíquenos eso. ¿Cómo supo que era por 1?*
E1: *Porque este 7 [cesto A] y este 6, [cesto B] o sea comparé los dos números y me dio 1.*

Algo similar ocurre en la tarea 2

P1*: ¿Por qué cogió 5?*
E1*: Porque había 5 naranjas. Yo sabía que no.*
P1*: ¿En dónde había 5 naranjas?*
E1*: En el cesto N. Yo sabía que no, pero pues no sabía cómo.*
P1*: ¿Y este 6 qué hizo con él?*
E1*: Por el N*

Especialmente en el último diálogo, E1 deja entrever que toma estos valores como la cantidad de naranjas en los cestos, aunque indica “yo sabía que no”. El sujeto de nivel medio toma esos valores como absolutos:

E22: Este tiene 7 [refiriéndose a A], y este tiene 6 [refiriéndose a B], y el C tiene menos, entonces tiene 5

Algo semejante ocurre con el sujeto de nivel bajo

P1: ¿Este 7 que es?, dígamelo más completo. ¡¿Siete naranjas más que qué, de quien con quién!... de acuerdo con lo que está aquí
E20: 7 naranjas del cesto A
P1: ¿O sea, esas eran las que había en el cesto A? ¿7 naranjas?
E20: Sí
P1: ¿Y éste 6 que es?
E20: Del cesto de las 6 naranjas menos
P1: ¿cuántas hay en el B? ¿Sabe?
E20: 6
P1: ¿sabe cuántas hay en C?
E20: ¡no hay ninguna!
[...]
P1: Hummm, ¿y por qué llego a la conclusión que no había naranjas en C?
E20: Porque no dice cuántas hay

7.2.2 Análisis comparativo sobre las tareas de composición de relaciones después de la secuencia didáctica.

En la tabla 21 (página siguiente) se presenta la descripción de los análisis de las producciones de los estudiantes después de la secuencia didáctica. En esta tabla se agregan algunas categorías nuevas que juzgamos pertinentes para el nuevo análisis.

a) Reconocimiento de la semejanza de las dos tareas

Se puede afirmar que los dos sujetos de nivel alto y medio reconocen (al menos de manera implícita) la semejanza de las dos tareas, no solo porque siguen el mismo procedimiento sino por las relaciones que establecen al describir lo que hacen.

Tabla 21:

Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionados por los estudiantes en las tareas de composición de relaciones después de la secuencia didáctica

Categoría de comparación	Sujeto E1 Nivel alto	Sujeto E22 Nivel medio	Sujeto E20 Nivel bajo
Respuestas en la prueba	En ambas tareas el procedimiento seguido es R1. Inventa un ejemplo de solución, asigna valores a la cantidad de naranjas de cada cesto y tiene en cuenta las diferencias indicadas en el enunciado.	En ambas tareas el procedimiento seguido es R1. Inventa un ejemplo de solución, asigna valores a la cantidad de naranjas de cada cesto y tiene en cuenta las diferencias indicadas en el enunciado.	En ambas tareas el procedimiento seguido es R4. En la tarea 1 dice: En el cesto A hay más que en el cesto B porque en el cesto A hay 7 y en cesto B hay 6 y 7 es mayor que 6. En la tarea 2 dice: En el cesto M hay más que en el cesto N ...
Semejanza de los procedimientos en las dos tareas	Sigue el mismo procedimiento en las dos tareas.	Sigue el mismo procedimiento en las dos tareas.	Sigue el mismo procedimiento en las dos tareas.
Comprensión de los enunciados relacionales simples.	Desde la entrevista inicial dio muestra de interpretar correctamente los enunciados simples. Puede obtener parejas de valores que satisfacen los enunciados relacionales	Puede obtener parejas de valores que satisfacen los enunciados relacionales. Se infiera esta capacidad de su habilidad para obtener ternas de valores que satisfacen simultáneamente los dos enunciados relacionales.	No comprende los enunciados relacionales
Interpretación de los valores que determinan las diferencias de cantidades de naranjas en los cestos.	Toma esos valores como la diferencia relativa entre la cantidad de naranjas	Toma esos valores como la diferencia relativa entre la cantidad de naranjas	Los toma como absolutos
Obtención de ternas de valores que satisfacen los dos enunciados relacionales, en el cesto 1 ___hay más (o menos) que en el 2 y en cesto 2 hay menos (o más) que en el 3.	Obtiene ternas	Obtiene ternas	No
Reconocimiento de la constancia de la diferencia entre los cestos 1 y 3 a partir de varios casos particulares	Reconoce la constancia de la diferencia	Reconoce la constancia de la diferencia	No
Explicación de la necesidad de la constancia de la diferencia entre los cestos 1 y 3 si los mantienen las diferencias entre los cestos 1 y 2 y entre 2 y 3	No	No	No

Origen: Creación propia

El sujeto de nivel alto dice en la primera tarea

P1: ... *¿Por qué hiciste esto?* ¨[se hace referencia al 14 que asigna a la cantidad de naranjas al de cesto A]
E1*: Es un número que le di*
P1*: ¿Quién dijo que escribieras 14?*
E1*: Yo lo di teniendo en cuenta las cantidades que pedían.*
P1: *¿Y por qué 7?*
E1*: Contabilicé que el A tuviera 7 más que el B, y así hice con C.*
P1*: Bien. ¿Y quién tiene más A o C?*
E1: *A, por un número.*

Y en la segunda tarea

E1: Que la M era mayor que la P por uno también.
P1: Hummm, ok. ¿Y eso lo hiciste con más números?
E1: No, porque ya más o menos tenía la idea.
P1: Hummm, pero mira que aquí cambiamos las condiciones.

El sujeto de nivel medio en la tarea 2

E: Acá se haría lo mismo [que en la tarea anterior] 5 menos, entonces ponemos 10 y acá 5. No. Y al otro lado 4.
P: Muy bien. Ahora comparemos a M y P.
E: Este, es más, [Refiriéndose a M] por uno, como el otro.

b) Comprensión de los enunciados relacionales simples: de la forma, en el cesto 1 hay ___ más (o menos) que en 2"

En la entrevista inicial el sujeto de nivel alto muestra que interpreta correctamente los enunciados relacionales, incluso obtiene con facilidad parejas de valores que los satisfacen. El sujeto de nivel medio en la entrevista final muestra que obtiene con facilidad pares de valores que satisfacen los enunciados relacionales, como lo ilustra este segmento de entrevista, que, aunque no se trata directamente de obtener pares sino ternas, deja en claro la relativa facilidad con la que puede obtener valores particulares que satisfagan las condiciones de los enunciados.

E22: El A tiene 22, el B 15, y el C 21. A tiene una más que C.
P: Entonces A tiene una más que C. Bien. ¿Y si hacemos que A tenga otro número?
E22: A tiene 20, B 13, y C tiene 19.

A partir de la información de la prueba se infiere que el sujeto de nivel bajo no logra comprender estos enunciados, toma los valores no como diferencias entre las cantidades de naranjas sino como valores absolutos, como la cantidad de naranjas de los cestos 1 y 2.

c) Interpretación de los valores que determinan las diferencias de cantidades de naranjas en los cestos.

A partir de los segmentos descritos arriba es claro que tanto el sujeto de nivel alto como el de nivel medio toman como valores los enunciados que determinan las diferencias relativas de la cantidad de naranjas de los cestos, en cambio el sujeto de nivel bajo sigue tomándolos como valores absolutos, es decir, como la cantidad de naranjas que hay en los cestos.

d) Obtención de ternas de valores que satisfacen los dos enunciados relacionales, en el cesto 1 ___hay más (o menos) que en el 2 y en cesto 2 hay menos (o más) que en el 3.

El sujeto de nivel alto en la entrevista inicial muestra que, aunque puede dar parejas de valores que satisfagan el enunciado de una relación simple con apoyo del entrevistador, no puede utilizar este hecho para obtener ternas que satisfagan simultáneamente las dos condiciones de los enunciados relaciones.

E1: Entonces aquí podría ir 10 [cesto N] y aquí 5 [en el cesto M
P1: ¿Por qué?
E1: Porque dice que en un cesto M hay 5 naranjas menos que en un cesto N
P1: Bueno, ya sabemos que usted puede poner ejemplos, trate de hacer todo el problema, es decir, comparar M con P, y decir ¿Quién tiene más? ¿Quién tiene menos?
E. Silencio
E1: Porque había 5 naranjas. Yo sabía que no.

En la entrevista final obtiene ternas con facilidad. Una vez que ha explicado al entrevistador que decidió que el cesto A tuviera 14 para obtener solucionar la tarea muestra que puede dar ejemplos de otras ternas

P: *¿Y por qué hiciste esto otro? (dar otros valores para las cantidades del contenido de los cestos A, B y C: 13, 6 y 12)*
E1*: Quise dar hartos ejemplos.*

De forma semejante ocurre con el sujeto de nivel medio

E22: El A tiene 22, el B 15, y el C 21. A tiene una más que C.
P: Entonces A tiene una más que C. Bien. ¿Y si hacemos que A tenga otro número?
E22: A tiene 20, B 13, y C tiene 19.

e) Explicación de la necesidad de la constancia de la diferencia entre los cestos 1 y 3 si se mantienen las diferencias entre los cestos 1 y 2 y entre 2 y 3

Los sujetos de nivel alto y medio, aunque ambos logran obtener ternas de valores y dada la evidencia de los casos particulares parecen aceptar que la diferencia entre el primer cesto y el tercero permanece, no encuentran una explicación sobre el hecho. Sin embargo, del diálogo con el sujeto de nivel alto parece que éste gana un poco de certeza de que lo que ocurre con los pasos particulares se mantiene, mientras que para el sujeto de nivel medio no aparece con tanta claridad tal certeza, más bien este estudiante, acepta que el resultado permanece porque así ha ocurrido con varios ejemplos.

En la entrevista final tarea 1 el sujeto de nivel alto dice:

P1: ¿Y por qué crees que pasa eso? ¿Y si pones otro número?
E1: También me da mayor la A por uno.
P1: ¿Estás segura?
E1: sí porque yo hice 3.
P1: ¿No importa el número que pongas siempre va a ser mayor el A por uno?
E1: Si, pero teniendo en cuenta las condiciones que dice, este procedimiento, en esta característica, porque en otras quién sabe.
P1: ¿Qué condiciones?
E1: Que el A tiene 7 naranjas más que el B, y que el C tenga 6 naranjas menos que C. Aunque en el segundo me dio lo mismo.
P1: ¿Qué es lo mismo?
E1: Que era mayor por uno.

En la entrevista final tarea 2

P1*: Hummm, ok. ¿Y eso lo hiciste con más números?*

E1*: No, porque ya más o menos tenía la idea.*
P1*: Hummm, pero mira que aquí cambiamos las condiciones, ya que este punto es distinto al primero.*
E1*: Pero no sé porque me da siempre que uno es mayor que el otro por uno.*
P1: *¿Y si ponemos 8?*
E1: *Creo que también va a dar por uno.*
P1*: ¿Está segura?*
E1*: Me da también uno. M8, N13 y P7. M tiene uno más que P.*
P1*: ¿Y si ponemos otro número? ¿Por qué siempre da uno?*
E1*: Creo que también me va a dar uno. El problema está para que dé así. Como que se balancea, no sé.*

Obsérvese la certeza que parece ganar en la tarea 2

P: Hummm, ok. ¿Y eso lo hiciste con más números?
E1*: No, porque ya más o menos tenía la idea*

El sujeto de nivel medio a propósito de la tarea 1dice:

E22: El A tiene 22, el B 15, y el C 21. A tiene una más que C.
P: Entonces A tiene una más que C. Bien. ¿Y si hacemos que A tenga otro número?
E22: A tiene 20, B 13, y C tiene 19.
P: Ahora, ¿quién es mayor y por cuánto?
E22: A por 1.
P: Bien, y si digo que A es 15.
E22: B tiene 8 y C 14. Otra vez es mayor A por 1.
P: ¿Sabes a qué se debe que el canasto A tenga una más que B?
E22: Porque A tiene 15 y C tiene 14.
P: Claro. Si retomamos el enunciado principal no dice que el canasto A tenga un valor en particular, pero usted le asignó valores.
E22: si
P: ¿Por qué sin importar el valor que le pongamos a A y siguiendo las condiciones, siempre es mayor que C por uno?
E22: No sé.

y en la tarea 2 la dificultad se mantiene.

E1: Yo había dicho eso [refiriéndose a la respuesta dada en la prueba]. Pero si lo hago como el anterior.
P: Claro.
E22: M tiene 14, N tiene 19, y P 13. M tiene una más que P.
P: ¿Y si le pones otros valores siguiendo la instrucción?
E22: M tiene 16, N tiene 21, y P 15. M tiene una más que P.
P: ¿Y por qué sigue pasando lo mismo? ¿Por qué así le cambie los valores sigue siendo mayor por uno?
E22: Hummm, no sé.

A manera de síntesis, el análisis de estos casos no enseña que algunos estudiantes de sexto grado de esta institución en la que se realiza este estudio empiezan por no comprender los enunciados relacionales de tipo <<en X hay m más que Y>>. Es posible que ante un enunciado como éste los estudiantes puedan entender que X es mayor que Y, pero se les escapa, como ocurre con el caso de nivel bajo, el significado de “hay m más” y terminen asimilando el valor de m como la cantidad que tiene X. Aunque algunos estudiantes logren comprender correctamente un enunciado relacional simple esto no significa que puedan entender en toda su complejidad un enunciado relacional compuesto << en X hay m más que en Y y en Y hay n menos que en Z>>, por eso algunos estudiantes, como sucede con los casos alto y medio, recurren a dar valores particulares para evadir la composición y hacer la comparación directa entre X y Z.

Obviamente el hecho de ser capaz de obtener ternas que satisfagan las condiciones de los dos enunciados relacionales no es una capacidad sencilla de adquirir, por el contrario, es una conquista que debe ser alcanzada por los estudiantes. Pero no basta esto para considerar que ya todo está agotado por parte de los estudiantes, una vez que se pueden obtener ternas de valores adecuadas, se necesita caer en la cuenta de que la diferencia relativa entre la cantidad de X y Z permanece siempre que se mantenga los valores de m y n y el sentido de las dos relaciones. Esta constatación también supone un proceso de conquista por parte del pensamiento de los estudiantes, primero se acepta la constancia de la diferencia como un hecho empírico (se acepta porque ya se ha probado con varios casos particulares) y, como sucede con los casos de nivel medio y alto, no se logra explicar por qué. Poco a poco se ganará certeza de la necesidad lógica del hecho.

7.2.3 Análisis comparativo sobre las tareas de composición de operadores

En las tablas 22 y 23 (ver páginas siguientes) se presenta las descripciones de los análisis de las producciones de los estudiantes antes y después de la secuencia didáctica. Como en los numerales anteriores se toma como referencia los análisis cualitativos que se hicieron de los tres casos. En esta ocasión, a diferencia de los dos apartados anteriores, se ha preferido agrupar algunas categorías y realizar de forma conjunta la descripción de evidencias de los dos momentos antes y después.

a) y b) Comparación de respuestas y de características de la relación entre los números inicial y final

Antes y después de la secuencia didácticas los dos sujetos de nivel alto y medio resuelven la tarea 3 mediante el procedimiento R1. En la T4 estos sujetos siguen el procedimiento R1 en los dos momentos, esto significa que la reducen a una tarea del mismo tipo de la tarea 3; en otras palabras, evaden la composición de relaciones que demanda ésta y hacen la comparación directa entre las cantidades 1 y 3. El sujeto de nivel bajo no resuelve la tarea en el momento inicial y en el momento posterior a la secuencia didáctica lo hace mediante el procedimiento R1.

Aunque los tres sujetos siguen el mismo procedimiento R1, se presentan diferencias respecto a la segunda categoría de comparación (característica de la relación establecida entre los números inicial y final); únicamente el sujeto de nivel alto en sus respuestas en las dos pruebas, además de establecer la relación entre el número inicial y el final, dice la diferencia relativa entre los números; mientras que el del nivel medio no establece la relación en ninguna de dos tareas en ambas pruebas. El sujeto de nivel bajo, aunque establece la relación en la tarea T3 de la prueba inicial no establece la diferencia relativa.

Tabla 22:

Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionadas por los estudiantes en las tareas de composición de operadores Antes de la secuencia didáctica

Categoría de comparación	***Sujeto E1 Nivel alto***	***Sujeto E22 Nivel medio***	***Sujeto E20 Nivel bajo***
Respuestas en la prueba	En T3 sigue R1: al número inicial se suma y se resta, sucesivamente, las cantidades indicadas. Luego se compara el número inicial con el resultado final. En su respuesta dice la diferencia relativa En T4 sigue R1 se da un valor al número desconocido y se sigue el procedimiento indicado en T3. En su respuesta dice la diferencia relativa	En T3 sigue R1: al número inicial se suma y se resta, sucesivamente, las cantidades indicadas, pero no compara el número inicial con el resultado final., dice: "*El número mayor es 14 [6+8] porque el único es ese"* En T4 sigue R1 se da un valor al número desconocido y se sigue el procedimiento indicado en T3, pero no compara el número inicial con el resultado final., dice: "*El número mayor al inicio es 16 [8+8]…*"	En T3 sigue R1 al número inicial le suma la cantidad indicada y al resultado le resta la cantidad indicada. Compara el número inicial con el resultado final pero no dice la diferencia relativa, dice: "*el número inicial es mayor que el final".* En T4 sigue R7 Da un valor al número desconocido y solo suma 8 [2+8], compara los dos sumandos.
Característica de la relación establecida entre los números inicial y final)	En T3 y T4 establece la relación y dice la diferencia relativa	En T3 y T4 no establece la relación	En T3 establece la relación, pero no establece la diferencia relativa En T4 no aplica
Composición de operadores	No compone	No compone	No compone
Reconocimiento de la constancia de la diferencia entre el número inicial y el final	Si, como consecuencia de las evidencias de varios casos particulares	Sí, como consecuencia de las evidencias de varios casos particulares	No. A pesar de probar con varios casos
Explicación de la constancia de la diferencia entre el número inicial y el final	No	No	No

Origen: Creación propia

Tabla 23:

Comparación de los procedimientos y respuestas proporcionadas por los estudiantes en las tareas de composición de operadores. Después de la secuencia didáctica

Categoría de comparación	***Sujeto E1 Nivel alto***	***Sujeto E22 Nivel medio***	***Sujeto E20 Nivel bajo***
Respuestas en la prueba	En T3 sigue R1: al número inicial se suma y se resta, sucesivamente, las cantidades indicadas. Luego se compara el número inicial con el resultado final. En su respuesta dice la diferencia relativa En T4 sigue R1 se da un valor al número desconocido y se sigue el procedimiento indicado en T3. En su respuesta dice la diferencia relativa	En T3 sigue R1: al número inicial se suma y se resta, sucesivamente, las cantidades indicadas, pero no compara el número inicial con el resultado final. En T4 sigue R1 se da un valor al número desconocido y se sigue el procedimiento indicado en T3, pero no realiza ninguna comparación.	En T3 sigue R1: al número inicial se suma y se resta, sucesivamente, las cantidades indicadas. Compara el número inicial con el resultado final y dice la diferencia relativa: El número inicial es mayor que el resultado final …..16 es mayor que 13 por 3. En T4 sigue R1 se da un valor al número desconocido y se sigue el procedimiento indicado en T3, hace la comparación, pero no indica la diferencia relativa: El número desconocido es mayor que el final.
Característica de la relación establecida entre los números inicial y final	En T3 y T4 establece la relación y dice la diferencia relativa	En T3 y T4 no establece la relación	Establece la relación, pero no indica la diferencia relativa
Composición de operadores	No compone	No compone	No compone
Reconocimiento de la constancia de la diferencia entre el número inicial y el final	Si, muestra mayor seguridad basándose en la experiencia anterior	Si, muestra mayor seguridad basándose en la experiencia anterior	No. A pesar de probar con varios casos
Explicación de la constancia de la diferencia entre el número inicial y el final	No	No	Sin información

Origen: Creación propia

Las entrevistas muestran que, aunque los sujetos de nivel medio y nivel bajo no establecen la diferencia relativa de primera intención, sí lo pueden hacer con apoyo del entrevistador. Los siguientes fragmentos de las entrevistas iniciales hecha a los sujetos de nivel medio y bajo sobre T3 son ilustrativas al respecto. El estudiante E22 de nivel medio dice:

E22: Si a 16 se le suma 8 da 24, y luego se le resta 11 da 13, se tiene el resultado final.
P: Ojo. ¿Quién es mayor, el inicial o el final?
E22: Este, el inicial.
P: ¿Por cuánto?
E22: por 3
E20 de nivel bajo dice
E20: Una suma que da 24 y se le resta 11
P1: ¿de dónde salió el 24?
E20: Del 16 se le suma 8 y luego se le resta 11, entonces acá es 3 y acá es 1; el resultado es 13
P1: pero ¿qué era lo que preguntaba el problema?
E20: Que cuál era el número mayor, el número inicial o el resultado final
P1: ¿Entonces qué contesta usted?
E20: Que el número inicial es mayor que el número final
P1: ¿Cuál es inicial aquí?
E20: El 16
P1: ¿Y cuál es el final?
E20: el 13
P1: y le preguntaban cuánto mayor, cuánto menor. ¿Sí?... ¿cuánto mayor?
E20: 16
P1: No, el 16 es mayor que el 13… pero en cuántas unidades, ¿cuántos números mayor es 16 que 13?
E20: 3

c) y d) Reconocimiento de la constancia de la diferencia entre el número inicial y el final y explicación de la constancia de la diferencia entre el número inicial y el final

El siguiente segmento de la entrevista de la prueba inicial sobre la tarea 4 ilustra con claridad el conflicto que tiene el sujeto de nivel alto para determinar que lo que sucede con un valor particular necesariamente tiene que suceder con cualquier valor que se tome para el número inicial, ya que la diferencia relativa entre los números inicial y final depende únicamente de la relación entre los operadores.

P1: *Eso es cuando es 10 [E1 había escrito en la prueba "yo me inventé el número 10], pero si se inventa otro número, ¿la diferencia entre el primero y el último va a ser 3?*
E1: *No.*

P1: *¿Por qué no inventa otro número?*
E1: [*toma 19 suma 8 y resta 11] 19 y 16, da 3.*
P1: *Dio lo mismo. ¿Fue de casualidad?*
E1: *¿De pronto será por qué son los mismos el 8 y el 11?*
P1: *¿Cree que si lo hacemos con otros números da igual?*
E1: *No sé.*
P1: *Invéntese otros números para ver qué pasa*.
E1: [*lo hace con 20] 20 y 17*
P1: *¡Le volvió a dar igual! ¿Entonces qué piensa?*
E1: *No sé. Que de pronto es por el 8 y el 11.*
P1: *Por eso, ¿pero siempre nos va a dar igual? Inventamos con otro número más grande, con 50 para ver qué pasa.*
E1: *Me da lo mismo. 50 y 47 da 3.*
P1: *Entonces ¿qué piensa?*
E1: *que sí, es por el 8 y el 11.*
P1: *pero ¿por qué? Todos le dieron la misma diferencia, estos. ¿Usted cree que siempre va a dar lo mismo*? *¿Por qué?*
E1: *Por el 8 y el 11 dan lo mismo. Como que hacen que un número de 3... Pero no sé por qué sigue dando 3…….*

En la prueba final E1 sigue sin poder explicar la constancia de la diferencia relativa, aunque muestra un avance en tanto que acepta que no va a cambiar porque se cambie el número inicial

E1: Es como el anterior [es decir la tarea 3]. Si se da la operación que da 3 [hacer referencia a los enunciados que indican las transformaciones] o sea que el número desconocido es mayor por 3.
P1: ¿Y si en lugar del 14 que pusiste pongo otro número? ¿Cuál sería la diferencia?
E1: Da lo mismo.
P1. Hummm, ¿y por qué?
E1: ay profe, no sé…Porque las operaciones están creadas para que den un resultado así se cambie el número inicial.

El estudiante E1 muestra en esta entrevista final un importante avance hacia la composición de operadores, "*Si se da la operación que da* 3 [hacer referencia a los enunciados que indican las transformaciones] *o sea que el número desconocido es mayor por 3*", aunque todavía no accede a un por qué basado en una necesidad lógica: *"ay profe, no sé… Porque las operaciones están creadas para que den un resultado así se cambie el número inicial"*.

En ambas tareas el sujeto de nivel medio muestra que acepta la constancia de la diferencia relativa porque comprueba con varios casos, pero que no logra explicarse por qué. En la prueba inicial a propósito de la tarea 3 E22 dice:

E22: Si a 16 se le suma 8 da 24, y luego se le resta 11 da 13, se tiene el resultado final.
P: Ojo. ¿Quién es mayor, el inicial o el final?
E22: Este, el inicial.
P: ¿Por cuánto?
E22: por 3
P: ¿Si cambiamos el 16 por otro número cualquiera daría la misma diferencia? Con la misma condición.
E22: Vamos a ver. Pongamos un 17. 17 más 8 daría 25 menos 11 daría 14, noo, tampoco.
P: Miremos el primero y el resultado. ¿Quién es mayor? ¿Y por cuánto?
E22: El inicial por 3.
P: Y en el otro, ¿Cuánto le dio?
E22: Mayor el inicial, por 3.
P: ¿Será que se cumple si ponemos otro número diferente?
E22: No.
P: Dale, cualquiera.
E22: 20. 8 igual a 28, se le resta 11 igual 17. Y por 3. ¿Da lo mismo y siempre queda por 3?
P: ¿Y por qué?
E22: Si cambiamos esto. [Sugirió cambiar el 8 de la condición] ¿Puedo cambiarlo?
P: No te olvides de la condición: le sumas 8 y le restas 11.
E22: Si, siempre va a quedar 3
P: ¿Por qué siempre 3?
E22: Como este [refiriéndose al 16] comienza mayor que los demás…

En la prueba final dice:

P1: Así resolviste el tercer punto que dice: "Si a "16" se le suma 8, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial "16" o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta".
E22: 16 es mayor por 3.
P1: ¿Y si cambio el 16 por un 10?
E22: Da 7.
P1: Ahora, ¿cuál es mayor y por cuánto?
E22: 10 es mayor que 7 por 3.
P1: Y si lo cambio ahora por 20, ¿quién es mayor?
E22: El 20
P1: ¿Por qué?
E22. Porque el inicial es mayor que el final.
P1: ¿Por qué crees que pasa eso?
E22: no sé tampoco.

En la Tarea 4 de la entrevista inicial E22 muestra con mayor claridad la dificultad inicial que tiene para aceptar la constancia de la diferencia relativa hasta que no comprueba con casos particulares y, sobre todo, la dificultad de explicar la constancia de la diferencia

E22: Puedo poner cualquier número,11 + 8 da, 19, menos 11 da 8. Nooo, por 3, sí, pero ¿por qué? Muy raro. No sé.
P: Te atreverías a concluir algo.
E22: No. No sé.

El sujeto de nivel bajo en la entrevista inicial no reconoce la constancia de la diferencia, a pesar de comprobar con varios casos diferentes

P1: dígame completa la frase… el número inicial….
E20: El número inicial es mayor que 12, porque a 12 le faltan 3
P1: ¿Para ser?
E20: para ser 15
P1: Si cambiara este número, y yo le dijera por ejemplo 25 y comparáramos el inicial con el final, ¿nos va a quedar la misma diferencia de 3? ¿Qué piensa?
E20: No.
[…]
P1: Entonces ¿qué pasó? [después de realizar los cálculos]
E20: 25 es mayor que 22
P1: ¿Cuánto?
E20: 3
P1: ¿Y aquí?
E20: 3
P1: ¿Y qué piensa?... ¿si cambiamos el número nos va a resultar lo mismo? Si cambio el número con el que empiezo, ¿nos va a resultar lo mismo?

A manera de síntesis. El análisis de estos casos nos permite decir que los estudiantes logran resolver las dos tareas. Sin importar que el estudiante sea de nivel alto, medio o bajo entienden con relativa facilidad el problema de la tarea tres, que es un problema directo de dos operadores aditivos por lo que se puede resolver de manera sucesiva; efectivamente el procedimiento seguido consiste en tomar el número inicial y aplicarle sucesivamente los operadores. Cuanto se trata de la tarea cuatro, que trata de un problema inverso de estado inicial desconocido, el estudiante de nivel alto lo convierte en uno directo como el de la tarea 3 dando un valor al

número inicial desconocido., este procedimiento lo hace desde antes de la secuencia didáctica. El sujeto de nivel bajo se comporta un poco diferente en la tarea 4, no la resuelve en el momento inicial, pero después de la secuencia didáctica la resuelve, haciendo lo mismo que los otros sujetos.

Las entrevistas muestran que, aunque los sujetos de nivel medio y nivel bajo no establecen la diferencia relativa en la prueba, si lo pueden hacer cuando se los sugiere el entrevistador.

También se puede establecer que los estudiantes no logran hacer la composición de operadores (obtener un operador c que produzca la misma transformación que produce la aplicación sucesiva de los dos operadores a y b). Aunque algunos estudiantes pueden reconocer la constancia de la diferencia relativa entre el número inicial y final como consecuencia de la imposición que juega la verificación de casos particulares se les escapa poder explicar este hecho. También, es posible encontrar estudiantes, así como ocurre con el caso del nivel bajo, que no logran reconocer la constancia de la diferencia relativa así comprueben con varios casos particulares, a ellos les parece que si se cambia el número inicial la diferencia relativa cambia.

7.2.4 Análisis de las tareas de desplazamiento durante la secuencia didáctica

Como se ha dicho, las tres versiones de la ruta que fueron trabajadas durante las tres sesiones de la secuencia didáctica no tienen ninguna pretensión distinta a que los estudiantes tuvieran experiencias en las que ejecutaran acciones que suponían desplazamientos. La primera variante del juego enfrentaba a los estudiantes a desplazamiento a la ejecución sucesiva de dos desplazamientos en direcciones opuestas, las otras dos formas del juego los enfrentaba a situaciones en las que podían componer desplazamientos tanto en el mismo sentido como en sentidos opuestos. En este aparatado intentaremos describir los procedimientos que siguieron los

estudiantes, esta descripción no tiene la pretensión de ser exhaustiva dado que la información se recogió solo a través de pruebas escritas y las explicaciones que ofrecen los estudiantes resultan reducidas o, a veces, solo dan la respuesta, razón por la que en muchos casos no dejan ver claramente el procedimiento. Sin embargo, a pesar de las limitaciones de la información se logra cierta aproximación a lo que hacen.

Con relación a situaciones de estructura 1. Problemas directos: Estas tareas consisten en que a los estudiantes se les da un punto de partida (estado inicial), se aplican dos o tres desplazamientos en diferentes sentidos y se le pide que indique el punto de llegada (estado final). Se dice directo en tanto que la situación que se plantea se da en el mismo sentido en que se realiza la acción en juego (el jugador conoce el punto de partida se realizan unos desplazamientos y finaliza en un lugar de la ruta).

Los tres casos empiezan por resolver estas situaciones haciendo representaciones muy ligadas a la acción, como lo ilustran las imágenes siguientes:

Guía 1 Tarea 1: Si una ficha se encuentra a 4 espacios a la derecha del punto de partida, y los dados muestran: azul 2 y rojo 6, ¿a qué posición debería llegar la ficha?

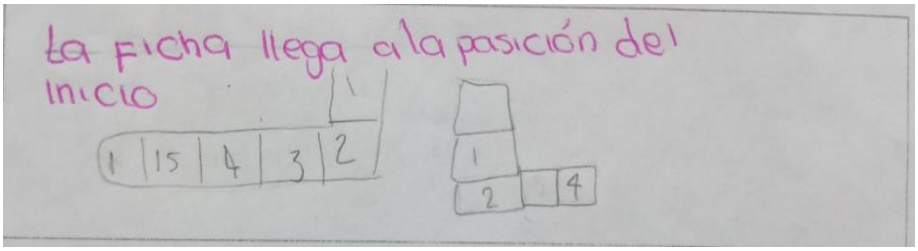


Figura 5, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 1 de la guía 1

El estudiante de nivel medio (E22) avanza más lento, en la tarea 1 de la guía 2 todavía representa el problema muy ligado a la situación del juego

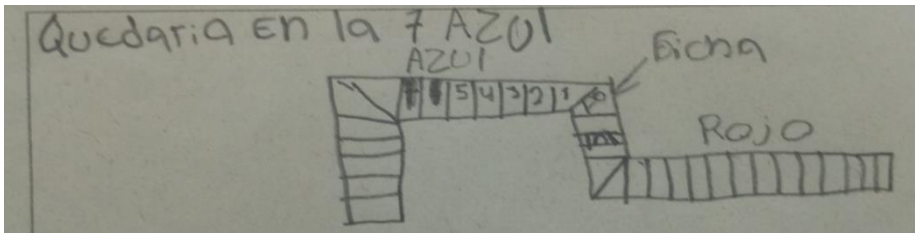


Figura 6, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 1 de la guía 1

El estudiante de nivel bajo (E 20) también empieza haciendo representaciones muy ligadas al juego

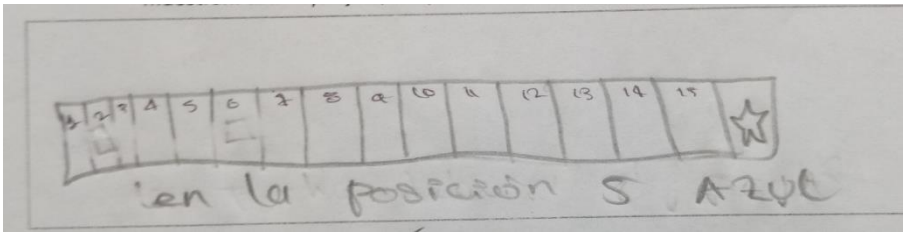


Figura 7, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 1 de la guía 1

Cada uno de los tres casos avanzan en el método de resolución, el progreso consiste en prescindir de representaciones icónicas ligadas a la acción a representaciones más abstractas (más numéricas) como lo ilustran las imágenes siguientes:

Guía 2 Tarea1 Juan lanza los dados y obtiene los siguientes resultados: 3 azul, 4 azul y 2 rojo. Si antes de lanzar los dados la ficha se encontraba 2 puestos a la derecha del punto inicial, ¿a qué puesto llegará después de lanzar los dados?

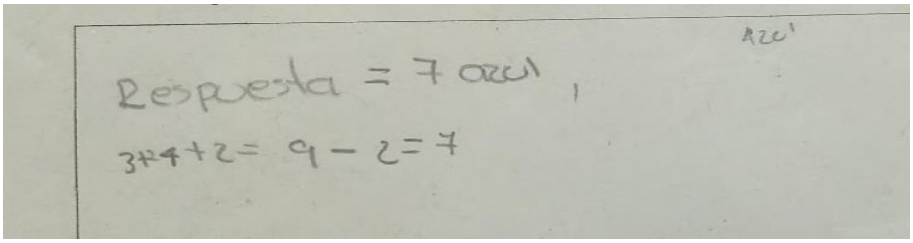


Figura 8, Respuesta del estudiante E1 la pregunta 1 de la guía a 2

La imagen ilustra como el estudiante de nivel alto abandona la representación de la pista y pasa a representar con operaciones entre números. Suma los dos desplazamientos indicados por los dados azules y el valor de la casilla en la que está la ficha, a ese resultado les resta el desplazamiento que indica el dado de color rojo.

Y parece que en el segundo momento en la guía 2 tarea 1 realiza la tarea mediante un procedimiento a medio camino, es decir, apoyándose todavía en el tablero, pero componiendo desplazamientos.

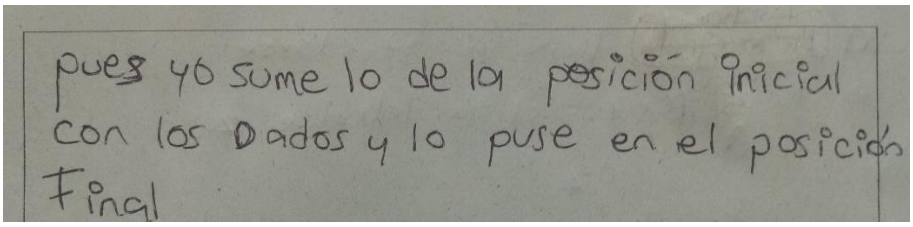


Figura 9, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 1 de la guía 2

El estudiante E20 de nivel bajo, en la misma tarea1 de la guía 2, intenta representaciones numéricas pero la representación es incompleta, “porque se devuelve 2” parece que ha considerado que a partir de la posición inicial 2 a de la derecha, cuenta el desplazamiento de 7 a la derecha, llegando a 9 y se regresa 2.

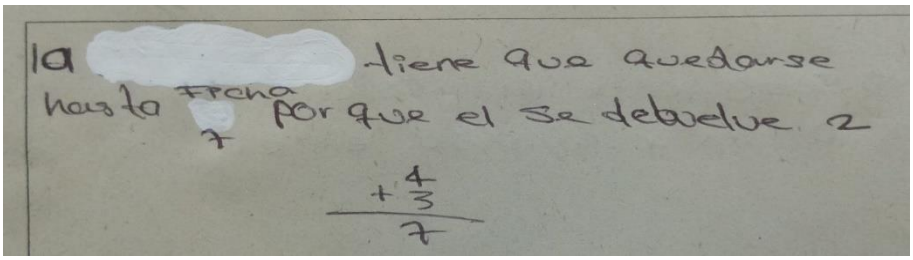


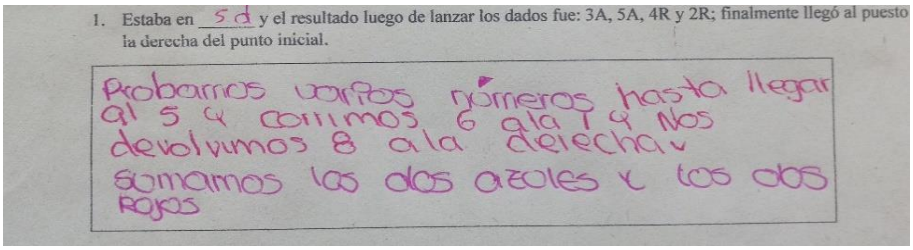
Figura 10, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 1 de la guía 2

Con relación a situaciones de estructura 2. Problemas inversos de estado inicial desconocido. Estas tareas consisten en que se dan varios desplazamientos y el punto de llegada (estado final) y se pide indicar el punto de partida (estado inicial). Se dice inverso en tanto que

no se da en el mismo sentido de la acción, aquí se desconoce el punto de partida que debe reconstruirse.

El sujeto de nivel alto muestra que su procedimiento no está basado en la en la inversión y menos en reversibilidad, él da un valor inicial que juzga posible y a partir de ahí verifica si se llega a la posición final, en otras palabras, reduce el problema a uno de forma directa.

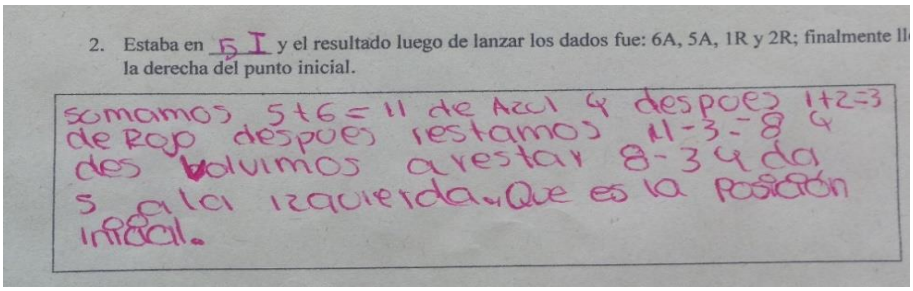
Guía 3 Tarea1: Estaba en ___ y el resultado luego de lanzar los dados fue: 3A, 5A, 4R, y 2R; finalmente llegó al puesto 7 a la derecha del punto inicial.


1. Estaba en 5 d y el resultado luego de lanzar los dados fue: 3A, 5A, 4R y 2R; finalmente llegó al puesto
la derecha del punto inicial.

Probamos varios números hasta llegar al 5 y contamos 6 ala I y Nos devolvimos 8 ala derecha y sumamos los dos azules y los dos Rojos

Figura 11, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 1 de la guía 3

Guía 3 Tarea 2: Estaba en ___ y el resultado luego de lanzar los dados fue: 6A, 5A, 1R, y 2R; finalmente llegó al puesto 3 a la derecha del punto inicial.


2. Estaba en 5 I y el resultado luego de lanzar los dados fue: 6A, 5A, 1R y 2R; finalmente ll
la derecha del punto inicial.

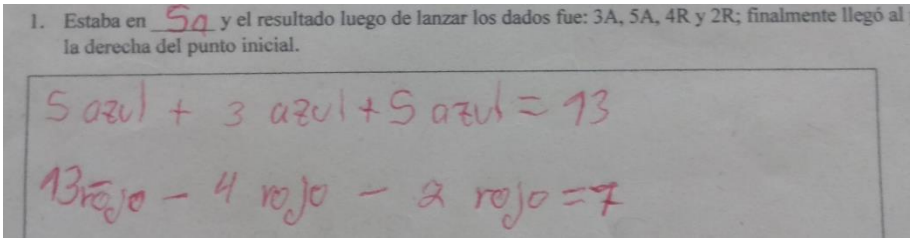
sumamos 5+6=11 de Azul y despues 1+2=3 de Rojo despues restamos 11-3=8 y des volvimos a restar 8-3 y da 5 ala izquierda. Que es la Posición inicial.

Figura 12, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 2 de la guía 3

Hace las composiciones de desplazamientos en el mismo sentido, luego resta las magnitudes de desplazamientos opuestos. Toma el desplazamiento resultante a la izquierda 88 en el sentido de rojo) y le resta el lugar 3 (posiblemente porque asume 3 a la derecha como un desplazamiento de 3 en el sentido azul).

El estudiante de nivel medio (E22) sistemáticamente asimila los problemas inversos a directos, toma un valor para Ei y comprueba como lo indican las tareas siguientes.

Guía 3 Tarea1: Estaba en ___ y el resultado luego de lanzar los dados fue: 3A, 5A, 4R, y 2R; finalmente llegó al puesto 7 a la derecha del punto inicial.

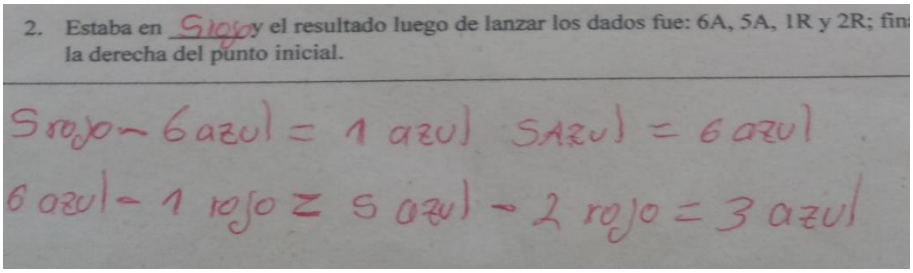

1. Estaba en 5a y el resultado luego de lanzar los dados fue: 3A, 5A, 4R y 2R; finalmente llegó al
la derecha del punto inicial.

5 azul + 3 azul + 5 azul = 13

13 rojo − 4 rojo − 2 rojo = 7

Figura 13, Respuesta del estudiante 22 a la pregunta 1 de la guía 3

Guía 3 Tarea 2: Estaba en ___ y el resultado luego de lanzar los dados fue:6A, 5A, 1R, y 2R; finalmente llegó al puesto 3 a la derecha del punto inicial.

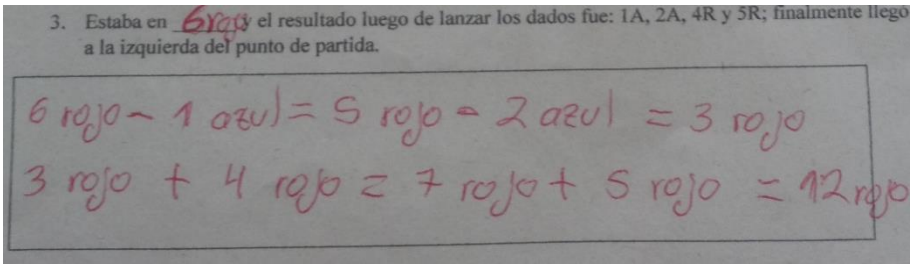

2. Estaba en 5 rojo y el resultado luego de lanzar los dados fue: 6A, 5A, 1R y 2R; fin
la derecha del punto inicial.

5 rojo − 6 azul = 1 azul 5 azul = 6 azul

6 azul − 1 rojo = 5 azul − 2 rojo = 3 azul

Figura 14, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 2 de la guía 3

Guía 3 Tarea 3: Estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue: 1A, 2A, 4R y 5R; finalmente llegó al puesto 12 a la izquierda del punto de partida.


3. Estaba en 6 rojo y el resultado luego de lanzar los dados fue: 1A, 2A, 4R y 5R; finalmente llegó
a la izquierda del punto de partida.

6 rojo − 1 azul = 5 rojo − 2 azul = 3 rojo

3 rojo + 4 rojo = 7 rojo + 5 rojo = 12 rojo

Figura 15, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 3 de la guía 3

El caso de nivel bajo en algunos casos omite la posición relativa, es decir, no le importa afirmar si la posición es a derecha o a la izquierda simplemente toma el valor absoluto. Además como ilustra la tercera imagen transforma el problema y se limita a poner un valor inicial y después decir en donde queda. Con relación a los otros estudiantes de nivel alto y medio pone un valor inicial pero no se pone como los otros dos en verificar si con este punto de partida si satisface la condición de la posición de llegada.

Guía 1 Tarea 2: Se lanzan los dados y se obtiene 2 azul, rojo 6, y la ficha finaliza en 3 azul. ¿En dónde se encontraba la ficha antes de lanzar los dados?

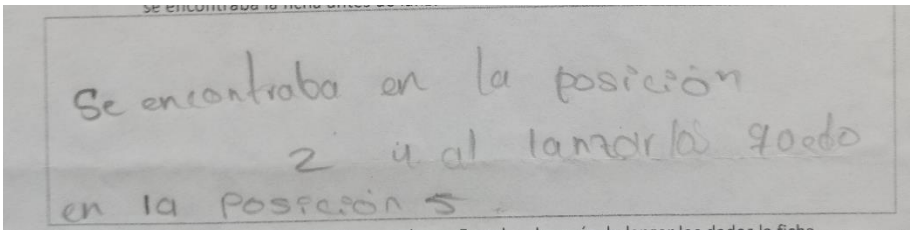


Figura 16, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 2 de la guía 1

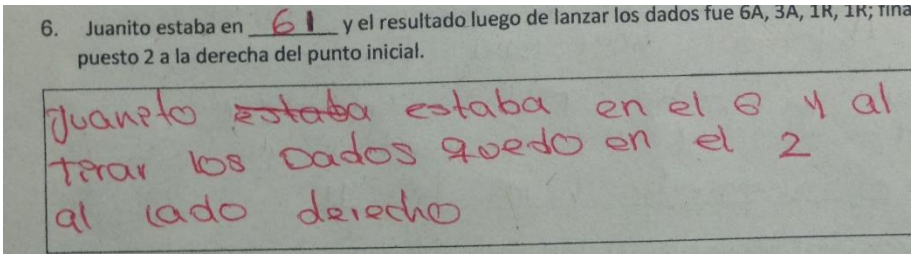


Figura 17, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 6 de la prueba final

A manera de síntesis podría que los tres casos, resuelven los problemas directos. Inician con representaciones icónicas muy ligadas a las situaciones del juego y, especialmente, los estudiantes de nivel alto y nivel medio logran representaciones más abstractas basadas en expresiones numéricas. Los estudiantes logran hacer composiciones de desplazamientos tanto del mismo sentido como de sentido opuesto.

Para los problemas inversos se observa que ninguno de ellos lo hace mediante procedimientos basados en inversión y, menos, dan muestra de reversibilidad. Los tres casos lo reducen a un problema directo dando valores posibles a la posición inicial desconocida. Se aprecia una diferencia entre el caso del nivel alto y el de nivel bajo, este último, en algunos casos, no da un valor inicial que después verifica para ver si obtiene la posición final dada, sino simplemente se limita a decir en donde termina sin importarle que ésta posición corresponda o no con la dada en el problema.

Se aprecia una dificultad con la coordinación de dos valores: uno el de la posición y el otro el del desplazamiento, pero debido a que no se tuvo presente en las entrevistas, no se tiene información suficiente para dilucidarlo.

8. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Este estudio explora dos capacidades de los estudiantes de un grupo de sexto grado de una institución educativa distrital, que a partir de los planteamientos hechos por investigadores en la enseñanza y aprendizaje de los números negativos resultan importantes para comprender la complejidad que representa para los jóvenes el hacerse a un nuevo tipo de números, los negativos.

Una de estas capacidades exploradas tiene que ver con el acceso a un nuevo tipo de orden numérico, pasar de orden con un punto inicial fijo (cero) como ocurre con el conjunto de los números naturales, que queda totalmente determinado por las relaciones “mayor o igual que” o “menor o igual que”, a un orden en el que no existe un punto inicial fijo, por lo que hay que establecerlo cada vez que se busca hacer la comparación, lo que exige pasar de nuevas relaciones “X mayor (o menor) que Y en **n** unidades”, es decir establecer la diferencia relativa entre X y Y (además de decir si es mayor a menor , hay que precisar qué tanto mayor o qué tanto menor).

La segunda de estas capacidades tiene que ver con el paso de aplicar de forma sucesiva sobre un número dos o más operadores aditivos (sumar o restar un número) a poder componerlos, de tal manera que se pueda anticipar la transformación resultante que tiene un número inicial después de aplicar los operadores, para estar en condiciones de decir si el número resultante ha de ser mayor o menor que el inicial y cuántas unidades mayor o menor.

Los resultados que arroja este estudio muestran hechos que al parecer de los autores del estudio merecen destacarse. Si bien estos datos corresponden a una muestra de un grupo sexto particular y de una institución educativa específica, no hay razón para pensar que esto puede suceder en otros casos.

En el grupo de sexto grado en el que se toma la muestra se encuentran algunos estudiantes que tiene dificultad para interpretar enunciados que involucran relaciones de mayor y menor con explicitación de la diferencia relativa. Sin embargo, se aprecia que con una pequeña ayuda de parte del profesor los estudiantes superan la dificultad inicial, pueden inventar con relativa facilidad pares de valores que satisfacen enunciados del tipo: "A es mayor-o menor- que B en **n** unidades". Si bien hay estudiantes que desde un comienzo dan muestra de manejar este tipo de relaciones, es importante que los maestros tengan presenten que algunos otros no, ya que a estos últimos les irá a resultar difícil comprender el manejo de lo que Vargas et al., (1990) llaman números relativos.

Existe una gran dificultad en los estudiantes para manejar la composición de relaciones con diferencia relativa (p. ej. A es mayor que B en **n** unidades –enunciado E1-y B es menor que C en **m** unidades --enunciado E2-). En este estudio la totalidad de los estudiantes de la muestra no logran la composición. Algunos estudiantes logran resolver situaciones que involucran la conjunción de los dos enunciados E1 y E2, pero lo hacen no mediante composición sino estableciendo un caso particular: encuentran una terna de valores para A, B y C y comparan de forma directa A y C. El estudiante de caso de nivel alto de estudio generaliza el resultado a partir de los casos particulares, para él la relación entre A y C permanece invariante el hecho de haberse cumplido en varios casos particulares, sin embargo, no logra hacerse una razón de la necesidad del resultado. Mientras que en otro extremo están comportamientos como el del estudiante del nivel bajo, que presenta dificultad para construir ternas que satisfagan simultáneamente los dos enunciados (E1 y E2) y parece no converse de la generalización a pesar de verificarlo con varios casos particulares.

En cuanto a la composición de operadores el estudio permite evidenciar algo semejante a lo descrito con las relaciones, mientras la situación solo requiera la aplicación directa y sucesiva de

dos operadores sobre un número inicial casi la totalidad de los estudiantes de la muestra logran comprender la tarea y, en general, la ejecutan correctamente. Pero cuando la tarea involucra la composición de operadores, como en las situaciones inversas de estado inicial desconocido que fueron estudiadas en este trabajo, las resuelven mediante un ejemplo particular para hacer la comparación directa entre el número inicial y el número final. Es decir, los estudiantes reducen el problema inverso a uno directo. El estudiante de nivel alto muestra, como en las situaciones de relaciones, que logra la generalización a partir de los casos particulares, pero sin poderse explicar el porqué de la permanencia del hecho, en el estudiante de nivel de bajo tiene dificultad para hacer la generalización.

En las experiencias de la ruta resuelven los problemas directos. Ya habían dado muestra de esta capacidad con las tareas de operadores. La experiencia didáctica permitió ver que los estudiantes empiezan con representaciones icónicas muy ligadas a las situaciones del juego y, especialmente, los estudiantes de nivel alto y nivel medio logran representaciones más abstractas basadas en expresiones numéricas. Los estudiantes logran hacer composiciones de desplazamientos tanto del mismo sentido como de sentido opuesto.

En los problemas inversos, en los que desconoce el punto de partida y se pide que lo encuentre a partir conocer los desplazamientos y el punto de llegada, se observa que ninguno de ellos lo hace mediante procedimientos basados en inversión (empezar desde el punto de partida y aplicar hacia atrás los desplazamientos para llegar al punto de partida) y, menos, dan muestra de reversibilidad (encontrar el punto de partida a partir de los desplazamientos opuestos). Los tres casos lo reducen a un problema directo dando valores posibles a la posición inicial desconocida. Se aprecia una diferencia entre el caso del nivel alto y el de nivel bajo, este último, en algunos casos, no da un

valor inicial que después verifica para ver si obtiene la posición final dada, sino simplemente se limita a decir en donde termina sin importarle que éste corresponda o no con lo dado en el problema.

Experiencias como la ruta, en la que los estudiantes tienen la posibilidad de ejecutar acciones con desplazamientos pueden aportar al manejo de situaciones compuestas de relaciones con explicitación de la diferencia relativa y de operadores aditivos, sin embargo, no basta enfrentar a los estudiantes a situaciones inversas en las que se pregunta por el punto de partida, porque ellos procederán por ensayo para reducir el complejidad cognitiva de este tipo de tareas a uno de tipo directo; por eso se necesita ir más allá para ayudarles a los estudiantes a ver la permanencia de la diferencia relativa y a construir representaciones numéricas, que pasen de las representaciones icónicas a representaciones abstractas desligada de las situaciones particulares del juego.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Acosta, M. G. (2015). Acercamiento al fantastico mundo de las cantidades negativas. Una propuesta metodológica para conceptualizar la nocion de número entero negativo y sus operaciones con estudiantes de grado septimo (tesis de maestria).Consultado el 27 de enero de 2017, de http://ridum.umanizales.edu.co: http://ridum.umanizales.edu.co

Bell, A. (2003). Enseñanza por diagnostico, algunos problemas sobre números enteros. En E. Cid, La investigación didactica sobre números negativos: estado de la cuestión. Madrid, España.

Borjas, N. (2009). Aprendizaje de los números enteros" una experiencia significativa en estudiantes de séptimo grado en la escuela nacional de música". Consultado el 22 de julio de2018, en file:///C:/Users/ruthm/Downloads/aprendizaje-de-los-numeros-enteros-una-experiencia-significativa-en-estudiantes-de-septimo-grado-de-la-escuela-nacional-de-

Bruno, A. (2003b). Procedimientos de Resolucion de problemas aditivos con números negativos. Enseñanza de las ciencias, 249-258.

Bruno, A. (2000a). Contextos y estructuras en el aprendizaje de los números negativos. En E. Cid, La investigación didactica sobre los números negativos: estado de la cuestión. Madrid, España.

Cano, C. E. (2015). Diseño e implementación de un sitio web interactivo como estrategia didáctica para la enseñanza de las operaciones con números enteros en los estudiantes de ciclo III de la institución educativa instituto Manizales (tesis de maestria). Consultado el 12 de junio de 2017, de http://www.bdigital.unal.edu.co/view/types/thesis.html: http://www.bdigital.unal.edu.co/view/types/thesis.html.

Castillo, A. C. (2014). Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos (tesis de maestria). Consultado el 10 de mayo de 2017,de http://www.bdigital.unal.edu.co: http://www.bdigital.unal.edu.co/47573/ 1/94442425%20Cesar.pdf

Castrillon, T. G. (2013). Estrategía didactica de enseñanza utilizando las TIC para aritmetica de números enteros en grado octavo: estudio de caso (Tesis de maestría). Consultado el 25 de julio de 2017, de http://www.bdigital.unal.edu.co: http://www.bdigital.unal.edu.co/11013/1/71336729.2013.pdf

Chaparro, O. (2014). Jugando con los números enteros. Colsultado el 18 de julio de 2017, de http://www.colombiaaprende.edu.co: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-110453_archivo.pdf

Chica, A. N. (2011). Propuesta de intervención pedagógica para comprender el significado de número entero (Tesis de maestria). Consultado el 10 de agosto de 2017, de http://www.bdigital.unal.edu.co: http://www.bdigital.unal.edu.co/5878/1/32257985.2012.pdf

Cid, E. (2003a). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. Publicacionesde la universidad deZaragoza, 575- 593.

Cid, E. (2003b). Lainvestigacion didactica de los números negativos: estado de la cuestión. Obtenido de http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2003/preprint25.pdf: http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2003/preprint25.pdf

Cid, E. (2001 c). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. Prepublicaciones del semnario matemático No 31. Universidad de Zaragoza. España.

Gallardo, A. (1994). Emergencia de los números enteros. Concultado el 10 de abril de 2018, de www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). Metodología de la investigación. cuarta. México, .F.: McGraw-Hill Interamericana.

Medina, S. D. (2013). Procesos de enseñanza y de aprendizaje del número relativo en contextos de la vida cotidiana (ascensos- descensos, perdidas - ganancias) teniendo en cuenta las diferentes operaciones basicas y su respectiva representacion en la recta numérica,. Educación cientifica y tecnológica, 559 - 563.

Maca, D. A. (2016). La enseñanza de los números enteros, un asunto sin resolver en el aula (tesis de maestria). Consultado el 10 de agosto de 2017, de http://ridum.umanizales.edu.co: http://ridum.umanizales.edu.co:8080/xmlui/bitstream/handle/6789/2640/TRABAJO%20FINAL%20MAESTR%C3%8DA%20LA%20ENSE%C3%91ANZA%20DE%20LOS%20NUMEROS%20ENTEROS%20UN%20ASUNTO%20SIN%20RESOLVER%20EN%20LAS%20AULAS.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2015). Derechos básicos de aprendizaje en Matemáticas. Bogotá, Colombia: MEN.

Otero, M. C. (2015). Estrategia didactica para el manejo signigicativo de operaciones de suma y resta en el conjunto de los números enteros con los estudiantes de grado 7° de la institucion educativa Ana de Castrillon (tesis de maestría). Consultado el 10 de abrilde 2018, de http://www.bdigital.unal.edu.co: http://www.bdigital.unal.edu.co/51739/1/43527937.2016.pdf.

Ostra, A. (2005), Relaciones de equivalencia y relaciones rectangulares [versión electrónica] Sophia de investigaciones U.G.C. 1(21-24). Consultada el 12 de agosto de 2018 en http://www.redalyc.org/pdf/4137/413740777003.pdf

Perez, J. E. (2012). Concepciones de los docentes de matemáticas sobre la enseñanza de los numeros enteros y la coherencia que guardan con los lineamientos y estandares de competencia. Sincelejo, Sucre: Sistema de universidades estatales.

Stake, R. (2007). Investigación con estudio de casos. cuarta. Madrid: Morata.

The story of mathematics.com, (2018). Brahma Gupta. Consultado el 22 de octubre de 2018 en https://www.storyofmathematics.com/indian_brahmagupta.html

Vargas, I., Jimeno, M., D.Iriarte, M., Gonzalez, J. L., Ortiz, A., Ortiz, A., et al., (1990). Números Enteros. Madrid, España: Sintesis.

ANEXOS

ANEXO 1: SECUENCIA DIDÁCTICA- GUÍAS DE TRABAJO

A continuación, se presentan las guías de trabajo que se utilizaron cuando se llevó a cabo la secuencia didáctica, estas incluyen:

- Prueba inicial
- Juego de la ruta (Explicación)
- Guía # 1 Juego de la ruta primera parte, taller individual
- Guía # 2 juego de la ruta con tres dados, taller individual
- Guía # 3 Juego de la ruta segunda parte, taller individual
- Prueba final

1.1 Prueba inicial

PRUEBA INICIAL

Desarrolle los ejercicios y explique cada respuesta.

1. En un cesto A hay 7 naranjas más que en uno B, y en este B hay 6 naranjas menos que en un cesto C. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos A y C. ¿cuál tiene más? ¿cuántas más? Explique cómo hace las cuentas.

2. En un cesto M hay 5 naranjas menos que en un cesto N, y en este N hay 6 naranjas más que en un cesto P. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos M y P. ¿cuál tiene más? ¿cuántas más? Explique cómo hace las cuentas.

Figura 1, Prueba inicial, página 1

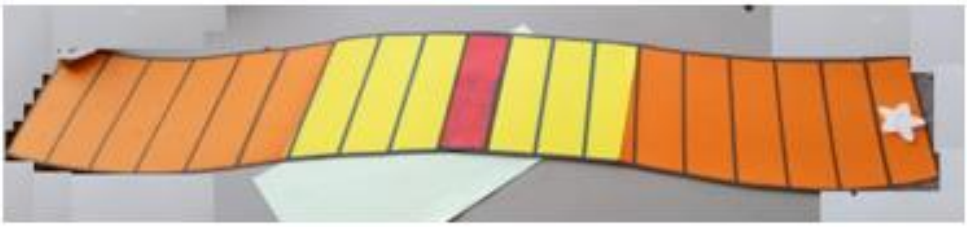
3. Si a "16" se le suma 8, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial "16" o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta.

4. A un número desconocido primero se le suma 8, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial desconocido o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta.

Figura 2, Prueba inicial, página 2

1.2 Juego de la ruta (Explicación)

JUEGO DE LA RUTA



INSTRUCCIONES:

1. Pueden participar 2 o más jugadores.
2. La idea principal del juego, para ganar, consiste en llegar a la meta del recorrido simbolizado por la estrella

3. Después de que un jugador llegue a la meta, pierde el que esté más alejado de ella.
4. El punto de partida de los jugadores se simboliza en el juego por la casilla de color rojo.

5. Los movimientos de cada jugador en el recorrido serán definidos por los dados: El dado de color azul indica movimientos a la derecha, y el de color rojo indica movimientos a la izquierda.
6. Cada jugador debe lanzar en cada turno ambos dados, y realizar los movimientos según dicten los colores y números.
7. Se llega a la meta con una diferencia numérica exacta. En caso de no lograrse, debe esperar el turno siguiente hasta que lo logre.

Figura 3, Juego de la ruta, explicación

1.3 Guía # 1 Juego de la ruta primera parte, taller individual

Taller individual

JUEGO DE LA RUTA

NOMBRE_____**CURSO**_____

A continuación, encontrarás afirmaciones y preguntas relacionadas con el juego de "LA RUTA" Resuélvelas realizando las operaciones y justificando tu proceso en el espacio asignado.

a. Si una ficha se encuentra a 4 espacios a la derecha del punto de partida, y los dados muestran: azul 2 y rojo 6, ¿a qué posición debería llegar la ficha?

b. Se lanzan los dados y se obtiene 2 azul, rojo 6, y la ficha finaliza en 3 azul. ¿En dónde se encontraba la ficha antes de lanzar los dados?

c. Inicialmente la ficha se encontraba en 5 azul, y después de lanzar los dados la ficha queda un espacio a la derecha de su posición inicial, ¿Cuál pudieron ser los resultados de los dados? En caso de considerar que se pueden dar varias respuestas, intente encontrar el mayor número de respuestas posible.

Figura 4, Guía # 1 Juego de la ruta primera parte

1.4 Guía # 2 juego de la ruta con tres dados, taller individual

Taller individual

JUEGO DE LA RUTA

NOMBRE_____CURSO_____

A continuación, encontraras afirmaciones y preguntas relacionadas con el juego de "LA RUTA" Resuélvelas realizando las operaciones y justificando tu proceso en el espacio asignado.

1. Juan lanza los dados y obtiene los siguientes resultados: 3 azul, 4 azul y 2 rojo. Si antes de lanzar los dados la ficha se encontraba 2 puestos a la derecha del punto inicial, ¿a qué puesto llegaría después de lanzar los dados?

2. La ficha se encuentra en el número 4 a la derecha del punto de salida. Se lanzan los dados y llega al número 6 a la derecha del punto de salida. ¿Qué números pudieron haber salido en los dados?

Figura 5, Guía # 2 juego de la ruta con tres dados, página 1

3. Completa la siguiente tabla del juego de la ruta donde se juega con tres dados y utilice el rectángulo de abajo para hacer las operaciones.

PREGUNTA	POSICION INICIAL	DADOS	POSICION FINAL
A	1 D	4 A 3 A 5 R	
B		3 A 6 A 3 R	2 D
C		5 R 3 R 4 A	7 D
D	2 I	2 A 6 R	3 I

Figura 6, Guía # 2 juego de la ruta con tres dados, página 2

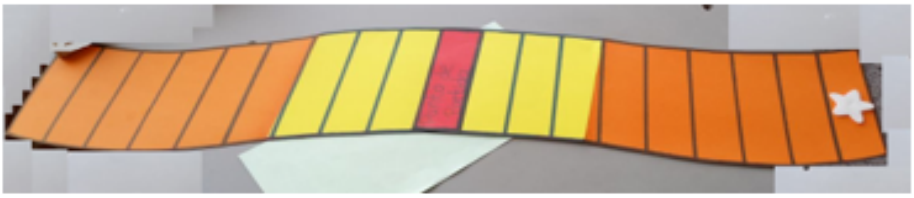
1.5 Guía # 3 Juego de la ruta segunda parte, taller individual

Taller individual

JUEGO DE LA RUTA SEGUNDA PARTE

NOMBRE_____CURSO_____

A continuación, encontraras afirmaciones y preguntas relacionadas con el juego de "LA RUTA" Resuélvelas realizando las operaciones y justificando tu proceso en el espacio asignado.



Necesitamos que nos ayudes averiguar el estado inicial de Juanito

"DONDE SE ENCONTRABA ANTES DE REALIZAR LOS MOVIMIENTOS INDICADOS"

Si sabemos el resultado de los dados y el lugar al que llegó luego de realizar los movimientos.

1. Estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue: 3A, 5A, 4R y 2R; finalmente llegó al puesto 7 a la derecha del punto inicial.

2. Estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue: 6A, 5A, 1R y 2R; finalmente llegó al puesto 3 a la derecha del punto inicial.

Figura 7, Guía # 3 Juego de la ruta segunda parte, pagina 1.

3. Estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue: 1A, 2A, 4R y 5R; finalmente llegó al puesto 12 a la izquierda del punto de partida.

Figura 8, Guía # 3 Juego de la ruta segunda parte, página 2

1.6 Prueba final

Prueba final

NOMBRE_____CURSO_____

Desarrolle los ejercicios, realizando las operaciones y justificando su respuesta.

1. En un cesto A hay 5 naranjas más que en uno B, y en este B hay 6 naranjas menos que en un cesto C. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos A y C. ¿cuál tiene más? ¿cuántas más? Explique cómo hace las cuentas.

2. En un cesto M hay 3 naranjas menos que en un cesto N, y en este N hay 5 naranjas más que en un cesto P. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos M y P. ¿cuál tiene más? ¿cuántas más? Explique cómo hace las cuentas.

3. Si a "14" se le suma 7, luego se le resta 12 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial "14" o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta.

Figura 9, Prueba final, página 1

4. A un número desconocido primero se le suma 9, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial desconocido o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta.

Ahora ayúdanos averiguar el lugar donde se encontraba la ficha de Juanito antes de realizar el movimiento indicado.

5. Juanito estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue 5A, 3A, 3R, 2R; finalmente llegó al puesto 9 a la derecha del punto inicial.

6. Juanito estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue 5A, 6A, 3R, 1R; finalmente llegó al puesto 2 a la derecha del punto inicial.

7. Juanito estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue 2A, 2A, 5R, 4R; finalmente llegó al puesto 7 a la izquierda del punto inicial.

Figura 10, Prueba final, página 2

ANEXO 2: TABULACION DE RESULTADOS DE LAS PRUEBAS INICIAL Y FINAL

A continuación, se encuentra un resumen de las respuestas que dieron los estudiantes a las diferentes tareas presentadas en las pruebas inicial y final.

Para la tabulación de resultados se aplicaron códigos como:

E1, E2, …etc.; los cuales representan a los estudiantes que presentaron la prueba

R1, R2, …etc.; Representan la clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes

2.1 Tipificación de procedimientos y respuestas asociadas a ellos.

En las tareas uno y dos de las pruebas inicial y final, se maneja una estructura semejante, por lo cual se realizó una tipificación única para las dos tareas y las dos pruebas.

2.1.1 Tareas 1 y 2 de las pruebas inicial y final

Tabla 1:

Tipificación de procedimientos y respuestas asociadas a las tareas 1 y 2 de las pruebas inicial y final

PROCEDIMIENTO		
COD	Descripción	Respuestas asociadas
R1	Inventa un ejemplo de solución, asigna valores a la cantidad de naranjas de cada cesto y tiene en cuenta las diferencias indicadas en el enunciado.	"En el cesto A hay más que en el C por 1"
		"El cesto A hay más naranjas que en la C"
		"Yo me baso en la lectura y doy un ejemplo"
R2	Suma las cantidades indicadas en el enunciado y luego al resultado le resta la diferencia indicada entre el cesto B y C 7 + 6 = 13 13 – 6 = 7	"El cesto A tiene más que C por 1"
		"Tiene más el cesto A que el C"
		"El cesto A tiene más que el C por 2"
		"A es mayor que C por 6 naranjas"
		"El resultado da 7"
R3	Suma y resta las cantidades indicadas en los dos enunciados correspondientes a las relaciones (7 y 6),), luego suma los resultados de las operaciones. 7 + 6 = 13 7 - 6 = 1 13 + 1 = 14	"A tiene más que B y en C no hay un número exacto"
		"La C tiene más 14"
		"Tienen la misma cantidad"
		"Solo presenta las operaciones"
R4	Suma las cantidades que aparecen en el enunciado (7 y 6), (parece que asume que esta es la cantidad de naranjas que hay en los cestos A y B) 7 + 6 = 13	"En el cesto A hay más que en el C"
		"En el A y en el C hay 13 en cada uno"
		"Presenta solo operaciones"
R5	Suma tres números (7, 5 y 6) 7 + 5 + 6 = 18	"Me dio 18"
		"En la canasta A hay más 5"
		"Presenta solo operaciones"
R6	Suma dos números (5 y 2) 5 + 2 = 7	"Presenta solo operaciones"
R7	Da una respuesta equivocada, indicando con palabras la relación entre la cantidad de naranjas de los tres cestos, pero no realiza operaciones ni justifica su respuesta.	"Tienen la misma cantidad"
R8	Da una respuesta correcta, pero no realiza operaciones ni justifica su respuesta.	"En el cesto A hay más que en el C"
R9	El estudiante resta las dos cantidades (7 y6) que aparecen en el enunciado del problema y con base en este resultado indica la diferencia entre los cestos	"En A hay más 1 que en la C"

Origen: Creación propia

Al igual que en las tareas 1 y 2, las tareas 3 y 4 manejan una estructura semejante, por lo cual se hace una Tipicacion única para las dos tareas en las pruebas inicial y final.

2.1.2 Tareas 3 y 4 de las pruebas inicial y final.

Tabla 2:

Tipificación de procedimientos y respuestas asociadas a las tareas 3 y 4 de las pruebas inicial y final

PROCEDIMIENTO		
COD	**Descripción**	**Respuestas asociadas**
R1	Al número inicial (16), le suma la cantidad indicada (8) y al resultado le resta la cantidad indicada (11) en el enunciado; Luego compara el número inicial con el resultado final. 16 + 8 = 24 24 – 11 = 13	"El número inicial es mayor que el resultado final, es mayor por 3"
		"El número inicial es mayor que el final"
		"El mayor es el 24, sigue el 16, luego el 11 y el menor es el 8"
		Solo presenta operaciones
R2	El estudiante suma las cantidades indicadas en el enunciado (16,8 y 11) 16 + 8 + 11 = 35	"El mayor es el 35 y el menor es el 8"
		"Pues es mayor 16 que 8"
		"Solo presenta operaciones"
R3	Suma 4 números (16,11,8, y 16) 16 + 8 + 11 + 16 = 51	"Solo presenta operaciones"
R4	Solo da una respuesta, pero no hace operaciones ni justifica	"Pues que en la C hay menos que en la A"
R5	No responde	No responde

Origen: Creación propia

2.2 Tabulación de resultados

La prueba inicial y final la presentaron 22 estudiantes

2.2.1 Prueba inicial.

2.2.1.1 Tarea 1

Tabla 3:

Tabulación de resultados de la prueba inicial tarea 1

Prueba inicial Tarea 1			
En un cesto A hay 7 naranjas más que en uno B, y en este B hay 6 naranjas menos que en un cesto C. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos A y C. ¿cuál tiene más? ¿cuántas más? Explique cómo hace las cuentas.			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	**COD RESP**	**PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN**	**RESPUESTA DESCRIPCIÓN**
E1	R2	El estudiante suma (7 + 6 = 13) Y resta 13 – 6 = 7	"El cesto A tiene más que C por 1"
E2	R2	El estudiante suma (7 + 6 = 13) Y resta 13 – 6 = 7	"En la A tiene más que en el C tiene 2 más"
E3	R2	El estudiante suma (7 + 6 = 13) Y resta 13 – 6 = 7	"A es mayor que C por 6 naranjas"
E4	R2	El estudiante suma (7 + 6 = 13) Y resta 13 – 6 = 7	"El mayor es el cesto A"
E5	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema, pero no realiza operaciones. En A hay 22, en B hay 14 (en lugar de una diferencia de 7 toma una de 8) y en C hay 8	"…me invente un ejemplo: 22A 14B 8C"
E6	R3	El estudiante suma (7 + 6 = 13) y (13 + 7 = 20) Y luego resta 13 – 6 = 7, pero indica que "En el C no hay un número exacto para poder hacer la operación"	"A tiene más naranjas que B y en el C no hay un número exacto"
E7	R4	El estudiante realiza una suma (7 + 6 = 13)	"El cesto que tiene más es el A"
E8	R7	El estudiante no realiza operaciones; da su explicación indicando que le puede agregar o quitar elementos a cada cesto.	"Tienen la misma cantidad en el cesto A y en el C"
E9	R4	El estudiante suma (7 + 6 = 13)	"En el A y en el C hay 13 en cada uno"
E10	R3	El estudiante suma (7 + 6 = 13) y resta (7 – 6 = 1) y luego suma (13 + 1 = 14)	"La C tiene más, 14"
E11	R3	El estudiante suma (7 + 6 = 13) y resta (7 – 6 = 1) y luego suma (13 + 1 = 14)	"7 + 6 = 13" "7 – 6 = 1" "13 + 1 = 14"
E12	R2	El estudiante suma (7 + 6 = 13) Y resta 13 – 6 = 7	"El resultado da 7"
E13	R3	El estudiante suma (7 + 6 = 13) y resta (7 – 6 = 1) y luego suma (13 + 1 = 14)	"7 + 6 = 13" "7 – 6 = 1" "13 + 1 = 14"
E14	R3	El estudiante suma (7 + 6 = 13) y resta (7 – 6 = 1) y luego suma (13 + 1 = 14)	"7 + 6 = 13" "7 – 6 = 1" "13 + 1 = 14"

E15	R5	El estudiante suma las cantidades (7 + 6 + 5 = 18)	“7 + 6 + 5 = 18”
E16	R5	El estudiante suma las cantidades (7 + 6 + 5 = 18)	“7 + 6 + 5 = 18”
E17	R5	El estudiante suma las cantidades (7 + 6 + 5 = 18)	“7 + 6 + 5 = 18”
E18	R5	El estudiante suma las cantidades (7 + 6 + 5 = 18)	“7 + 6 + 5 = 18”
E19	R4	El estudiante suma (7 + 6 = 13)	“7 + 6 = 13”
E20	R4	El estudiante suma (7 + 6 = 13)	“En el cesto A hay más naranjas”
E21	R4	El estudiante suma (7 + 6 = 13)	“7 + 6 = 13”
E22	R6	El estudiante suma (5+2 =7)	“5 + 2 = 7”

Origen: Creación propia

2.2.1.2 Tarea 2

Tabla 4:

Tabulación de resultados de la prueba inicial tarea 2

Prueba inicial Tarea 2			
En un cesto M hay 5 naranjas menos que en un cesto N, y en este N hay 6 naranjas más que en un cesto P. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos M y P. ¿cuál tiene más? ¿cuántas más? Explique cómo hace las cuentas.			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	**COD RESP**	**PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN**	**RESPUESTA DESCRIPCIÓN**
E1	R2	El estudiante suma (5 + 6 = 11) y resta (10 – 6 = 4)	"El cesto M tiene menos que el cesto P por 1"
E2	R3	El Estudiante suma (5 + 6 = 11) y suma (11 + 1 = 12)	"P tiene 1 más que M"
E3	R2	El estudiante resta (6 – 5 = 1) y suma (6 + 1 = 7)	"P es mayor que M por 6 naranjas"
E4	R2	El Estudiante suma (5 + 6 = 11) y suma (11 + 1 = 12)	"El P tiene más"
E5	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema, En M hay 11, en N hay 16 y en P hay 10	M = 11, N = 6, P = 10
E6	R3	El estudiante resta (6 – 5 = 1) y suma (6 + 1 = 7) luego suma (1 + 7 = 14) e indica que el resultado es 14	"El resultado de P es 14"
E7	R4	El estudiante suma (5 + 6 = 11)	"El cesto que tiene más naranjas es la letra N"
E8	R7	El estudiante no realiza operaciones; da su explicación indicando que le puede agregar o quitar elementos a cada cesto.	"también tienen la misma cantidad"
E9	R4	El estudiante suma (5 + 6 = 11)	"5 + 6 = 11"
E10	R3	El estudiante resta (6 – 5 = 1) y suma (6 + 5 = 11) luego suma (11 + 1 = 12) e indica que el resultado es 14	"La P tiene más, 14"
E11	R3	El estudiante resta (6 – 5 = 1) y suma (6 + 5 = 11) luego suma (11 + 1 = 12)	"6 – 5 = 1"
E12	R4	El estudiante no realiza operaciones; da su explicación indicando que "el resultado da 11 porque se suma la cantidad"	"5 + 6 = 11"
E13	R3	El estudiante resta (6 – 5 = 1) y suma (6 + 5 = 11) luego suma (11 + 1 = 12)	"11 + 1 =12"

E14	R3	El estudiante resta (6 – 5 = 1) y suma (6 + 5 = 11) luego suma (11 + 1 = 12)	“El resultado da 11”
E15	R5	El estudiante resta (14 – 5 = 9) y suma (9 + 5 = 15) luego suma (15 + 17 = 32)	“6 – 5 = 1”
E16	R5	El estudiante resta (14 – 5 = 9) y suma (9 + 5 = 15) luego suma (15 + 17 = 32)	“5 + 6 = 11”
E17	R5	El estudiante resta (14 – 5 = 9) y suma (9 + 5 = 15) luego suma (15 + 17 = 32	“11 + 1 =12”
E18	R5	El estudiante resta (14 – 5 = 9) y suma (9 + 5 = 15) luego suma (15 + 17 = 32	“6 – 5 = 1”
E19	R7	El estudiante no realiza operaciones; da su explicación indicando que “Creo que es la 6 porque tiene 1 más”	“5 + 6 = 11”
E20	R4	El estudiante suma (5 + 6 = 11)	“11 + 1 =12”
E21	R4	El estudiante suma (5 + 6 = 11)	“En el cesto P Son 32 ”
E22	R7	El estudiante suma (5 + 6 = 11)	“En el cesto P hay 32”

Origen: Creación propia

2.2.1.3 Tarea 3

Tabla 5:

Tabulación de resultados de la prueba inicial tarea 3

Prueba inicial Tarea 3			
Si a "16" se le suma 8, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial "16" o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta.			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	**COD RESP**	**PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN**	**RESPUESTA DESCRIPCIÓN**
E1	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	"El 16 es mayor que 13 por 3 y el 13 es menor que 16 por 3"
E2	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	"El 16 es mayor que el resultado final. Es mayor por 3 porque el resultado final es13"
E3	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	"El número inicial es mayor que el resultado por 3"
E4	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	"El 16 es mayor por 3 números"
E5	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	"El resultado inicial es mayor que el resultado final es tres números menor"
E6	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	"El número mayor es el 16 por en el número final da 13, el menor en 3 y el mayor en 4"
E7	R2	El estudiante suma (16 + 8 + 11 = 35)	"El número mayor es el 16 por el 8 y el 11 es menor que 16"
E8	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	Es mayor el número inicial, y cuanto mayor 3 y cuanto menor 3"
E9	R5	No realiza operaciones ni justificación	A B C 7 13 6
E10	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	"16 es más grande que el número final. Mayor 3, menor 3"
E11	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	16 + 8 = 24 – 11 = 13

E12	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	16 + 8 = 24 – 11 = 13
E13	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	“El mayor es el 16. Y el 13 es menor por 3”
E14	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	“El 16 es el resultado inicial”
E15	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	“El número mayor es el inicial el 16 y el menor es el resultado de la operación 16 + 8 que es por el tres”
E16	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	“El número mayor es el 16 y el menor es 13 por 3”
E17	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	“El número mayor es el inicial el 16 y el menor es el 13 por el 3”
E18	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	“Me dio 3”
E19	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	“Para mi es el 24”
E20	R1	Indica con palabras las operaciones que realiza y su conclusión se centra en decir que el primero es mayor que el menor.	“El número inicial es mayor que el final”
E21	R3	Suma (16 + 8 + 11 +16 = 51).	16 + 8 + 11+ 16 = 51
E22	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13),	“El mayor es el 24”

Origen: Creación propia

2.2.1.4 Tarea 4

Tabla 6:

Tabulación de resultados de la prueba inicial tarea 4

Prueba inicial Tarea 4			
A un número desconocido primero se le suma 8, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial desconocido o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta.			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	**COD RESP**	**PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN**	**RESPUESTA DESCRIPCIÓN**
E1	R1	El estudiante toma el número 10 y le suma (10 +8 = 18) y al resultado le resta (18 – 11 = 7)	"el 10 era mayor que el 7 por 3"
E2	R1	El estudiante toma el número 18 y le suma (18 +8 = 26) y al resultado le resta 26 – 11 = 15)	"Es mayor el número inicial, es mayor por 3 porque el resultado final es 15"
E3	R1	El estudiante toma el número 12 y le suma (12 +8 = 20) y al resultado le resta (20 – 11 = 9)	12 + 8 = 20 20 – 11 = 9
E4	R1	El estudiante toma el número 10 y le suma (10 +8 = 18) y al resultado le resta (18 – 11 = 7)	"El 10 que es el inicial es mayor por 3 cifras"
E5	R1	El estudiante toma el número 20 y le suma (20 + 8 =28) y al resultado le resta (28 – 11 = 17)	"Es mayor el número inicial que el final por 3 números"
E6	R1	El estudiante toma el número 14 y le suma (14 + 8 = 22) y al resultado le resta (22 – 11 = 11)	"El número desconocido es 14 y el número final es 11, es mayor por 3 y menor por 3"
E7	R2	El estudiante toma las cantidades 8 y 11 y las suma 8 + 11 = 19	"El número mayor es el 11 porque el 8 es menor"
E8	R1	El estudiante toma el número 13 y le suma (13 + 8 = 21) y al resultado le resta (21 – 11 = 10)	"Es mayor el número inicial desconocido por 3" "Dice es mayor por 3 y menor por 3.
E9	R1	El estudiante toma el número 12 y le suma (12 + 8 - 11 = 10)	"20 mayor y 10 menor"
E10	R1	El estudiante toma el número 10 y le suma (10 +8 = 18) y al resultado le resta (18 – 11 = 7)	"El número desconocido es mayor que el resultado, es mayor por 3 y menor por 3"
E11	R1	El estudiante toma el número 20 y le suma (20 + 8 =28) y al resultado le resta (28 – 11 = 17)	20 + 8 = 28 – 11 = 17

E12	R1	El estudiante toma el número 10 y le suma (10 +8 = 18) y al resultado le resta (18 – 11 = 7)	10 + 8 = 18 – 11 = 7
E13	R1	El estudiante toma el número 25 y le suma (25 +8 = 33) y al resultado le resta (33 – 11 = 22)	"El número desconocido es el 25 es el mayor y el menor es 8"
E14	R6	El estudiante muestra los números 8 y 11. e indica que no es posible ya que no existe un número desconocido	"No hay número desconocido"
E15	R1	El estudiante suma las cantidades (14 + 8 = 22 + 11 = 33)	14 +8 = 22 – 11 =33
E16	R1	El estudiante toma el número 13 y le suma (13 +8 = 21) y al resultado le resta (21 – 11 = 10)	"El número mayor es el desconocido, es el 13 y el menor es el 8"
E17	R1	El estudiante toma el número 12 y le suma (12 +8 = 20) y al resultado le resta (20 – 11 = 9)	"El número mayor es el desconocido 12 y el menor es el 8"
E18	R1	El estudiante suma las cantidades (14 + 8 = 22 + 11 = 33)	"El resultado que me dio al final fue 33"
E19	R1	El estudiante toma el número 20 y le suma (20 + 8 =28) y al resultado le resta (28 – 11 = 17)	20 + 8 = 28 – 11 = 17
E20	R1	El estudiante no realiza operaciones, intenta explicar con palabras como llegar al resultado.	"El 8 es mayor que el 2"
E21	R2	El estudiante suma (8 + 11 = 19)	8 + 11 = 19
E22	R1	El estudiante toma el número 20 y le suma (20 + 8 =28) y al resultado le resta (28 – 11 = 17)	"El número mayor al inicio es 16"

Origen: Creación propia

2.2.2 Prueba Final.

2.2.2.1 Tarea 1

Tabla 7:

Tabulación de resultados de la prueba final tarea 1

Prueba final Tarea 1			
En un cesto A hay 7 naranjas más que en uno B, y en este B hay 6 naranjas menos que en un cesto C. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos A y C. ¿cuál tiene más? ¿cuántas más? Explique cómo hace las cuentas.			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	**COD RESP**	**PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN**	**RESPUESTA DESCRIPCIÓN**
E1	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema A = 14 B = 7 C = 13	"En el cesto A hay más que en el cesto C por 1"
E2	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema A = 38 B = 31 C = 37	"El cesto A tiene más naranjas Hay una más que en el C"
E3	R2	El estudiante solo indica que "Tiene más el cesto A"	"Tiene más el cesto A"
E4	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema A = 14 B = 7 C = 13	"El cesto A tiene más"
E5	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema A = 17 B = 10 C = 16	"A = 17 B = 10 C = 16"
E6	R3	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema A = 7 B = 6 C = 13	"Sexto C el tiene 6 más que el sexto A"
E7	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema M = 2 N = 7 P = 1	"M es mayor porque tiene una más"
E8	R7	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando "Tienen la misma cantidad porque dice que en el B tiene uno menos que en el cesto C"	"Tienen la misma cantidad"
E9	R4	El estudiante suma (7 + 6 = 13)	"En el cesto C hay 13 naranjas"
E10	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema M = 2 N = 7 P = 1	"En el N hay más naranjas"
E11	R3	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando "En el cesto A y en el cesto B hay la misma cantidad de naranjas "	"En el cesto A y en el cesto B hay la misma cantidad de naranjas "

E12	R2	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando “Pues hay menos en la C que en la A, porque la A tiene 7 y la b tiene 6 la C tiene 5”	“Pues hay menos en la C que en la A”
E13	R3	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: “El cesto A tiene igual que el cesto C porque el c tiene 7 y el cesto A tiene 7”	“El cesto A tiene igual que el cesto C”
E14	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema M = 5 N = 1 P = 7 “porque se le suma”	“El cesto P tiene más por 2”
E15	R5	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: “El canasto A tiene más naranjas,… tiene 5 más, pues yo sume y me dio el resultado”	“La canasta A tiene más naranjas… tiene 5 más”
E16	R2	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando “El cesto A tiene más naranjas que el cesto C”	“El cesto A tiene más naranjas que el cesto C”
E17	R8	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando “El cesto A tiene más naranjas que el cesto C”	“El cesto A tiene más naranjas que el cesto C”
E18	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema M = 2 N = 7 P = 1	“M tiene más que P”
E19	R9	El estudiante resta (7 – 6 = 1)	“En el A hay más naranjas”
E20	R4	El estudiante suma (7 – 6 = 1)	“En el cesto A hay más que en el cesto C”
E21	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema M = 5 N = 6P = 4	“El cesto M tiene más que el cesto P”
E22	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema A=7 B = 6 C = 5	A=7 B = 6 C = 5

Origen: creación propia

2.2.2.2 Tarea 2

Tabla 8:

Tabulación de resultados de la prueba final tarea 2

Prueba final Tarea 2			
En un cesto M hay 5 naranjas menos que en un cesto N, y en este N hay 6 naranjas más que en un cesto P. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos M y P. ¿cuál tiene más? ¿cuántas más? Explique cómo hace las cuentas.			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	**COD RESP**	**PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN**	**RESPUESTA DESCRIPCIÓN**
E1	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema M=5 N=10 P= 4	"El cesto M tiene más que el P por 1"
E2	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema M=55 N=60 P= 54	"En el cesto M hay más naranjas hay 1 naranja más"
E3	R2	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: "Tiene más el cesto N"	"Tiene más el cesto N"
E4	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema M=10 N=15 P= 9	M=10 N=15 P= 9
E5	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema M = 16 N = 21 P = 15	M = 16 N = 21 P = 15
E6	R3	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: "El N tiene más naranjas que el M y P"	"El N tiene más naranjas que el M y P"
E7	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema M = 5 M = 10 P = 8	"P tiene 3 más que M"
E8	R8	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: "Tiene más el cesto P porque tiene una naranja más que el cesto M"	"Tiene más el cesto P porque tiene una naranja más que el cesto M"
E9	R4	El estudiante suma (5 + 6 = 11)	"En el cesto P hay 11 naranjas"
E10	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema M = 16 N = 9 P = 3	"En el A hay más naranjas… Hay 6 menos que en el C"
E11	R3	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: "El N tiene más naranjas que el M y P"	"El N tiene más naranjas que el M y P"
E12	R9	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: "Pues queda 1 porque se resta"	"Pues queda 1 porque se resta"

E13	R3	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: "El P tiene 0 y el M tiene 1 entonces el que tiene más es el M"	"El que tiene más es el cesto M"
E14	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema M = 8 N = 3 P = 9 "porque a 8 le resto para que me de uno"	M = 8 N = 3 P = 9
E15	R5	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: "El canasto M tiene más naranjas, tiene 9 más, pues yo sume y me dio el resultado"	"La canasta M tiene más naranjas… tiene 9 más"
E16	R2	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando "El cesto M tiene más naranjas que el cesto P"	"El cesto N hay más naranjas que el cesto P"
E17	R8	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando "El cesto M tiene más naranjas que el cesto P"	"El cesto M tiene más naranjas que el cesto P"
E18	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema M = 8 N = 1 P = 7	"M tiene más que P"
E19	R9	El estudiante resta (7 – 6 = 1)	"En el M hay más naranjas"
E20	R4	El estudiante suma (5 + 6 = 11)	"En el cesto M hay más que en el cesto P"
E21	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema M = 7 N = 5 P = 10	"El cesto M tiene más que el cesto P"
E22	R1	El estudiante inventa un ejemplo que le sirva para solucionar el problema M =7 N = 6 P = 5	M =7 N = 6 P = 5

Origen: Creación propia

2.2.2.3 Tarea 3

Tabla 9:

Tabulación de resultados de la prueba final tarea 3

Prueba final Tarea 3			
Si a "16" se le suma 8, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial "16" o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta.			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	**COD RESP**	**PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN**	**RESPUESTA DESCRIPCIÓN**
E1	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13)	"El número inicial es mayor que el número final por 3"
E2	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13)	"El número inicial es mayor por 3"
E3	R1	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: "El resultado final"	"El resultado final"
E4	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13)	"El número inicial es mayor por 3"
E5	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13)	"Es mayor el número inicial, es tres unidades mayor"
E6	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13)	"El número mayor es el 16" …"Lo mayor que tiene es 3"
E7	R1	El estudiante suma (7 + 22 = 29) y al resultado le resta (29 – 12 = 7)	"Es mayor 29"
E8	R1	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: "Es mayor el número inicial, cuanto mayor 5"	"Es mayor el número inicial, cuanto mayor 5"
E9	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13)	"16 es el mayor"
E10	R1	El estudiante suma (7 + 22 = 29) y al resultado le resta (29 – 12 = 7)	"Es mayor el 22, es mayor por 10"
E11	R1	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: "Yo le sumo 8 y da 24 después le tengo que restar 11y da 13 y el mayor sigue siendo 16"	"El mayor sigue siendo 16"

E12	R4	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: “16 es mayor que el número final”	“16 es mayor que el número final”
E13	R1	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: “Es el resultado inicial porque el resultado final es 8 y en el inicial hay 16”	“Es el resultado inicial”
E14	R1	El estudiante suma (7 + 22 = 29) y al resultado le resta (29 – 12 = 7)	“El mayor fue el resultado 29”
E15	R1	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: “El que tiene menos es el 8, El que le sigue es el 11 y por último es el 16”	“Es el 16”
E16	R1	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: “12 es menor que 16”	“12 es menor que 16”
E17	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13)	“El número mayor es el número inicial”
E18	R1	El estudiante suma (7 + 22 = 29) y al resultado le resta (29 – 12 = 17)	“22 es mayor que el resultado 17 por 5 números”
E19	R1	El estudiante resta (24 – 11 = 13)	“El número inicial hay 16 y en el final hay 13”
E20	R1	El estudiante suma (16 + 8 = 24) y al resultado le resta (24 – 11 = 13)	“El resultado inicial es mayor que 13, a 13 le falta 3 para llegar a 16”
E21	R1	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: “La respuesta es R=17 y el número mayor es el inicial porque 22+7-12 da como resultado 17 entonces el número mayor es 22”	“El número mayor es 22”
E22	R1	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: “La respuesta es R=17 y el número mayor es el inicial porque 22+7-12 da como resultado 17 entonces el número mayor es 22”	“El número mayor es 22”

Origen: Creación propia

2.2.2.4 Tarea 4

Tabla 10:

Tabulación de resultados de la prueba final tarea 4.

Prueba final Tarea 4			
A un número desconocido primero se le suma 8, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial desconocido o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta.			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	**COD RESP**	**PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN**	**RESPUESTA DESCRIPCIÓN**
E1	R1	14+8=22-11=11	"El número inicial es mayor que el final por3"
E2	R1	38+8=46-11=35	"Es mayor el número inicial, es mayor por 3"
E3	R1	12+28=210-11=09	"Es mayor el número inicial"
E4	R1	10+8=18-11=07	"El número inicial es mayor por 3"
E5	R1	5+8=13-11=12	"Es mayor el final"
E6	R1	10+8-11=7	"El resultado final es mayor 4 veces"
E7	R4	19+29=38-11=27	"29, cuanto mayor 2, cuanto menor 9"
E8	R1	8+5=12-11=1	"Es mayor el número desconocido, cuanto mayor 4"
E9	R1	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: "Pues ocho es menor que once "	"Pues 8 es menor que once"
E10	R1	7+9=16-11=5	"Es mayor el desconocido por 2"
E11	R1	19+8=27-11=19	"Sigue siendo mayor el número desconocido"
E12	R4	"Al número inicial se le suma 10 y queda 18 entonces es mayor el 18"	"Es mayor el 18"
E13	R1	El estudiante no realiza operaciones, da su explicación indicando: "es mayor el número inicial "	"Es mayor el número inicial"
E14	R1	5+9=14-11=3	"El número desconocido fue el mayor"
E15	R1	25+5=30	"El número mayor es el 30"
E16	R1	24+8=32	"El número inicial o desconocido"
E17	R1	24+8=32-11=22	"El número desconocido es el mayor"
E18	R1	8+9=17-11=6	"El número mayor fue 8 y menor fue 6 por 2 números"
E19	R1	19-11=8	19-11=8
E20	R1	10+8=18-11=7	"El resultado inicial es mayor que el resultado final"

E21	R1	12+9-11=10	“Es mayor el número desconocido por 10”
E22	R1	20+8=28-11=17	19-11=8

Origen: Creación Propia

ANEXO 3: TABULACIÓN DE RESULTADOS GUÍAS DE TRABAJO DEL JUEGO DE LA RUTA

A continuación, se encuentra un resumen de las respuestas que dieron los estudiantes a las diferentes tareas presentadas en las guías de trabajo del juego de la ruta. Para la tabulación de resultados se aplicaron códigos como:

E1, E2, …etc.; los cuales representan a los estudiantes que presentaron la prueba

R1, R2, …etc.; Representan la clasificación de las procedimientos y respuestas dadas por los estudiantes.

El trabajo se llevó a cabo en tres sesiones, las cuales incluyen diferentes tipos de tarea, las cuales está clasificadas en tres estructuras aditivas diferentes:

Estructura 1: Donde se le da al sujeto un estado inicial y una composición de desplazamientos (dos, tres o cuatro) en sentidos opuestos (izquierda o derecha) y se le pide que encuentre la posición final.

Estructura 2: En este de tarea, se le indica al estudiante los desplazamientos que ha realizado la ficha y estado final (posición a la cual llegó) y se le pide que encuentre la posición o estado inicial (de donde partió la ficha).

c) El estado inicial se encuentra a la izquierda del estado final

d) El estado inicial se encuentra a la derecha del estado final.

Estructura 3: Se le da al estudiante el estado inicial y el estado final (De donde parte la ficha y a donde llega) y se le pide al estudiante que indique los posibles desplazamientos que realizo (resultados de los dados).

3.1 Tipificación de respuestas y procedimientos asociados

Para la tipificación de respuestas se dividieron las tareas realizadas en cuatro grupos teniendo en cuenta la estructura que se plantea en cada tarea.

3.1.1 Estructura 1: Directos:

Donde se le da al sujeto un estado inicial y una composición de desplazamientos (dos, tres o cuatro) en sentidos opuestos (izquierda o derecha) y se le pide que encuentre la posición final; En este tipo de estructura se agruparon las siguientes tareas:

- Guía No 1 Tarea 1
- Guía No 2 Tarea 1
- Guía No 2 Tarea 3a.

Tabla 11:

Tipificación de procedimientos asociados a la estructura 1

RESPUESTAS		
COD	Descripción	Procedimientos asociados
R1	Indica el punto de llegada y la ubicación exacta (izquierda o derecha del punto de partida) de la ficha.	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
		No justifica, solo escribe la posición de la ficha
R2	Indica un pun punto y ubicación de llegada equivocado	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
		No justifica, solo escribe la posición de la ficha

Origen: Creación propia

3.1.2 Estructura 2A: Inversos:

En este tipo de tarea, se le indica al estudiante los desplazamientos que ha realizado la ficha y estado final (posición a la cual llegó) y se le pide que encuentre la posición o estado inicial (de donde partió la ficha).

a) El estado inicial se encuentra a la izquierda del estado final

En este tipo de estructura se agruparon las siguientes tareas:

- Guía No 2 Tarea 3b
- Guía 3 Tarea 1
- Guía 3 Tarea 2

Tabla 12:

Tipificación de procedimientos asociados a la estructura 2a

RESPUESTAS		
COD	Descripción	Procedimientos asociados
R1	Indica el punto de inicio y la ubicación exacta (izquierda o derecha del punto de partida) de la ficha.	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
		No justifica, solo escribe la posición de la ficha
R2	Indica un punto y ubicación de inicio equivocado	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
		No justifica, solo escribe la posición de la ficha
R3	No responde	

Origen: Creación propia

3.1.3 Estructura 2B:

En este tipo de tarea, se le indica al estudiante los desplazamientos que ha realizado la ficha y estado final (posición a la cual llegó) y se le pide que encuentre la posición o estado inicial (de donde partió la ficha).

b) El estado inicial se encuentra a la derecha del estado final.

En este tipo de estructura se agruparon las siguientes tareas:

- Guía No 1 Tarea 2
- Guía No 2 Tarea 3c
- Guía No 3 Tarea 3

Tabla 13:

Tipificación de procedimientos asociados a la estructura 2b

RESPUESTAS		
COD	Descripción	Procedimientos asociados
R1	Indica el punto de inicio y la ubicación exacta (izquierda o derecha del punto de partida) de la ficha.	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
		No justifica, solo escribe la posición de la ficha
R2	Indica un pun punto y ubicación de inicio equivocado	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
		No justifica, solo escribe la posición de la ficha
R3	No responde	

Origen: Creación propia

3.1.4 Estructura 3:

Se le da al estudiante el estado inicial y el estado final (De donde parte la ficha y a donde llega) y se le pide al estudiante que indique los posibles desplazamientos que realizo (resultados de los dados).

Tabla 14:

Tipificación de procedimientos asociados a la estructura 3

RESPUESTAS		
COD	Descripción	Procedimientos asociados
R2	Indica un punto y ubicación de llegada equivocado	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
		No justifica, solo escribe la posición de la ficha
R3	No responde	
R4	Indica uno o más ejemplos adecuados (se adaptan a la solución)	Propone un ejemplo de solución
		Propone dos ejemplos de solución
		Propone dos ejemplos de solución
R5	Indica uno o más ejemplos inadecuados (no se adaptan a la solución)	Propone un ejemplo de solución
		Propone dos ejemplos de solución
		Propone dos ejemplos de solución

Origen: Creación propia

En este tipo de estructura se agruparon las siguientes tareas:

- Guía No 1 Tarea 3

- Guía No 2 Tarea 2
- Guía No 2 Tarea 3d

3.2 Tabulación de respuestas y procedimientos asociados a las guías del juego de la ruta

3.2.1 Juego de la ruta primera sesión.

3.2.1.1 Guía No 1 – Tarea 1

Esta guía fue desarrollada por 21 estudiantes, el estudiante codificado como **E11,** no la presentó.

Tipificación de respuestas y procedimientos asociados, ver tabla 11.

Tabla 15:

Tabulación de respuestas y procedimientos asociados a la tarea 1 de la guía 1

JUEGO DE LA RUTA GUIA 1			
Tarea 1			
Si una ficha se encuentra 4 espacios a la derecha del punto de partida, y los dados muestran: azul 2 y rojo 6, ¿A qué posición debería llegar la ficha?			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	**COD RESP**	**RESPUESTA DESCRIPCIÓN**	**PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN**
E1	R1	"La ficha llega a la posición del inicio"	Utiliza un dibujo del juego de la ruta para justificar sus movimientos.
E2	R1	"Debería llegar a inicio"	Utiliza un dibujo del juego de la ruta para justificar sus movimientos.
E3	R2	"La posición que debe estar el dado es 5 rojo"	Utiliza un dibujo del juego de la ruta para justificar sus movimientos.
E4	R2	"Debió llegar: 4 rojo"	Utiliza un dibujo del juego de la ruta para justificar sus movimientos.
E5	R1	"Quedaría en el punto de partida"	No justifica, ni realiza operaciones.
E6	R2	"Llegada al 8A"	Utiliza un dibujo del juego de la ruta para justificar sus movimientos.
E7	R2	"En la posición dos rojas"	No justifica, ni realiza operaciones.
E8	R2	"La posición en la que debería quedar la ficha sería la posición 4 de las casillas rojas"	No justifica, ni realiza operaciones.
E9	R2	"Debería llegar a 4"	No justifica, ni realiza operaciones.
E10	R2	"Quedaría en el 8 derecha"	Utiliza un dibujo del juego de la ruta para justificar sus movimientos.
E11	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E12	R2	"Queda en cuatro"	No justifica, ni realiza operaciones.

E13	R1	"Tiene que llegar al inicio"	No justifica, ni realiza operaciones.
E14	R1	"Queda en inicio"	Utiliza un dibujo del juego de la ruta para justificar sus movimientos.
E15	R1	"En el cuadro inicio"	No justifica, ni realiza operaciones.
E16	R1	"Quedaría en punto de partida"	No justifica, ni realiza operaciones.
E17	R1	"Queda en el punto de partida"	No justifica, ni realiza operaciones.
E18	R1	"La ficha llega a la posición del inicio"	No justifica, ni realiza operaciones.
E19	R2	"Queda en el azul número 4"	No justifica, ni realiza operaciones.
E20	R2	"En la posición 5 azul"	No justifica, ni realiza operaciones.
E21	R2	"5 azul"	No justifica, ni realiza operaciones.
E22	R2	"Quedaría en 8"	No justifica, ni realiza operaciones.

Origen: Creación propia

3.2.1.3 Guía No 1 – Tarea 2

Esta guía fue desarrollada por 21 estudiantes, el estudiante codificado como **E11,** no la presentó.

Tipificación de respuestas y procedimientos asociados, ver tabla 13.

Tabla 16:

Tabulación de respuestas y procedimientos asociados a la tarea 2 de la guía 1

JUEGO DE LA RUTA GUIA 1			
Tarea 2			
Se lanzan los dados y se obtiene 2 azul, rojo 6 y la ficha finaliza en 3 azul. ¿En dónde se encontraba la ficha antes de lanzar los dados?			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	**COD RESP**	**RESPUESTA DESCRIPCIÓN**	**PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN**
E1	R2	"La ficha se encontraba en la posición 1 azul"	No justifica, ni realiza operaciones.
E2	R2	"Se encontraba en 6 azul"	No justifica, ni realiza operaciones.
E3	R1	"La ficha antes de lanzar se encontraba en el siete azul"	No justifica, ni realiza operaciones.
E4	R2	"La ficha está en azul 1"	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
E5	R1	"En 7 azul"	No justifica, ni realiza operaciones.

E6	R2	"Comienza en 1 azul"	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
E7	R2	"Se encontraba en dos azules"	No justifica, ni realiza operaciones.
E8	R2	"Se encontraba en la casilla del inicio"	No justifica, ni realiza operaciones.
E9	R2	"En inicio"	No justifica, ni realiza operaciones.
E10	R2	"Queda en la casilla 13 azul"	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
E11	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E12	R2	"Quedo en el 5 azul"	No justifica, ni realiza operaciones.
E13	R2	"Estaba en el 6 azulito"	No justifica, ni realiza operaciones.
E14	R3	NO RESPONDE	
E15	R2	"Queda en el 13"	No justifica, ni realiza operaciones.
E16	R1	"En 7 azul"	No justifica, ni realiza operaciones.
E17	R1	"Queda en el 7 azul"	No justifica, ni realiza operaciones.
E18	R2	"La ficha a la posición uno azul"	No justifica, ni realiza operaciones.
E19	R1	"En el 7 el azul"	No justifica, ni realiza operaciones.
E20	R2	"Se encontraba en la posición 2 y al lanzar los dados quedó en la posición 5"	No justifica, ni realiza operaciones.
E21	R2	"En el 2 azul"	No justifica, ni realiza operaciones.
E22	R2	"5 queda"	No justifica, ni realiza operaciones.

Origen: Creación propia

3.2.1.3 Guía No 1 – Tarea 3

Esta guía fue desarrollada por 21 estudiantes, el estudiante codificado como **E11,** no la presentó.

Tipificación de respuestas y procedimientos asociados, ver tabla 14.

Tabla 17:

Tabulación de respuestas y procedimientos asociados a la tarea 3 de la guía 1

JUEGO DE LA RUTA GUIA 1			
Tarea 3			
Inicialmente la ficha se encontraba en 5 azul, y después de lanzar los dados la ficha queda un espacio a la derecha de su posición inicial, ¿Cuáles pudieron ser el resultado de los dados? En caso de considerar que se pueden dar varias posibilidades, intente encontrar el mayor número de respuestas posible.			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	**COD RESP**	**RESPUESTA DESCRIPCIÓN**	**PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN**
E1	R4	"Posibilidades 3rojo - 4 azul"	Solo indica un ejemplo 3rojo - 4 azul
E2	R4	4R, 5A. 2R, 3A. 5R, 6A.	Muestra tres ejemplos de solución Rojo azul 1 4 5 2 2 3 3 5 6
E3	R2	6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18	Escribe los números del 6 al 18 6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18
E4	R4	"Las inicialmente son 3 rojos – 4 azul"	Da un ejemplo de solución "Las inicialmente son 3 rojos – 4 azul"
E5	R5	"5r, 1a, 1r, 5a"	Presenta dos ejemplos de solución Rojo azul 1 5 5 1
E6	R2	"Quedo en 5A"	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
E7	R2	"Quedó en 6 del lado Azul"	No justifica, solo escribe la posición de la ficha
E8	R5	"1A 6R, 6R, 1A"	Propone dos ejemplos de solución A R 1 6 6 1
E9	R2	"Queda más adelante"	No justifica, solo escribe la posición de la ficha
E10	R5	"lanzaría dos veces el dado para ver 4A, 5R y 5A, 6R"	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
E11	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E12	R5	1rojo = 5 Azul	Solo presenta un ejemplo de solución: 1rojo = 5 Azul
E13	R3	NO RESPONDIO	
E14	R3	NO RESPONDIO	
E15	R4	"Posibilidades: 3roja 4 azules"	Solo presenta un ejemplo de solución: 3rojo, 4Azul.
E16	R5	"5r, 1a, 1r, 5a"	Presenta dos ejemplos de solución Rojo azul 2 5 5 1
E17	R5	"5r, 1a, 1r, 5a"	Presenta dos ejemplos de solución

			Rojo azul 3 5 5 1
E18	R4	"La posición de posibilidad es 3rojo, 4azul"	Solo presenta un ejemplo de solución: 3rojo, 4Azul.
E19	R2	6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18	Escribe los números del 6 al 18 6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18
E20	R2	"La ficha quedo en el 6 del lado azul"	No justifica, solo escribe la posición de la ficha
E21	R2	"La ficha quedo en el 6 del lado azul"	No justifica, solo escribe la posición de la ficha
E22	R5	"2 y 2 y después 2 y 1"	Presenta dos ejemplos de solución "2 y 2 y después 2 y 1"

Origen: creación propia

3.2.2 Juego de la ruta segunda sesión.

3.2.2.1 Guía No 2 – Tarea 1

Esta guía fue desarrollada por 16 estudiantes, los estudiantes codificados como **E8, E10, E12, E15, E17 Y E18** no la presentaron.

Tipificación de respuestas y procedimientos asociados, ver tabla 11.

Tabla 18:

Tabulación de respuestas y procedimientos asociados a la tarea 1 de la guía 2

Juego de la ruta guía 2: Juego de la ruta con tres dados, taller individual			
Tarea 1			
Juan Lanza los dados y obtiene los siguientes resultados: 3azul, 4azul, y 2rojo. Si antes de lanzar los dados la ficha se encontraba dos puestos a la derecha del punto inicial, ¿A qué puesto llegará después de lanzar los dados?			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	COD RESP	RESPUESTA DESCRIPCIÓN	PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN
E1	R1	7Azul	"Al punto inicial se le suman los movimientos azules, y al resultado le resta los rojos"
E2	R1	7Azul	"Llegó a 7 azul"
E3	R2	5Azul	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
E4	R1	7 Azul	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
E5	R1	7 Azul	"Llegó a 7 azul"
E6	R2	No da respuesta	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
E7	R2	10	"Llega al puesto 10"
E8	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		

E9	R2	5D	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento "Quedaría en 5 a la derecha"
E10	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E11	R2	3D	"Queda en el lado derecho puesto 3"
E12	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E13	R2	3A	"Queda en el lado derecho puesto 3 color azul La ficha está en el lado izquierdo entonces corro 2 para el lado izquierdo y lo de los dados azules lo sumo y lo que quede lo corro a la derecha"
E14	R2	3A	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
E15	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E16	R1	7A	"Queda en 7 azul"
E17	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E18	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E19	R2	No da respuesta	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
E20	R2	7	"La ficha tiene que quedarse hasta 7 porque él se devuelve 2 4 + 3 = 7"
E21	R2	7	"Tiene que quedarse 7 en dos 4 + 3 = 7"
E22	R1	7A	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento "Quedaría en 7 azul"

Origen: Creación propia

3.2.2.2 Guía No 2 – Tarea 2

Esta guía fue desarrollada por 16 estudiantes, los estudiantes codificados como **E8, E10, E12, E15, E17 Y E18** no la presentaron.

Tipificación de respuestas y procedimientos asociados, ver tabla 14.

Tabla 19:

Tabulación de respuestas y procedimientos asociados a la tarea 2 de la guía 2

Juego de la ruta guía 2: Juego de la ruta con tres dados, taller individual			
Tarea 2			
La ficha se encuentra en el número 4 a la derecha del punto de salida. Se lanzan los dados y llega al número 6 a la derecha del punto de salida. ¿Qué números pudieron haber salido en los dados?, indique tres ejemplos			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	COD RESP	RESPUESTA DESCRIPCIÓN	PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN
E1	R5	"6Azul, 3 azul, 1 azul"	No justifica, solo indica el ejemplo
E2	R5	"2Azul, 1 azul, 3 rojo"	No justifica, solo indica el ejemplo
E3	R5	"Hay que sacar 2"	Describe su procedimiento indicando: "Para llegar a 6 hay que sacar 2 porque está en 4"
E4	R4	"4 azul y 2 rojo"	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento e indica: "Pudiera haber salido 4 azul y 2 rojo"
E5	R5	5R 6A	No justifica, solo indica el ejemplo
E6	R5	"2 y 1"	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento e indica: "2 y 1"
E7	R5	1A – 1R	Describe su procedimiento indicando: "Salieron dos 1 del lado azul y otro del lado rojo"
E8	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E9	R5	No indica valor	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento
E10	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E11	R5	1A y 1R	Describe su procedimiento indicando: "El número que pudo salir en los dados es 1 vs 1 en cada dado"
E12	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E13	R4	3A, 3A, 4R	Describe su procedimiento indicando: "Porque la ficha está en el lado derecho puesto 4entonces cuando lanza los dados sacó azul 3, azul 3, rojo 4, entonces corre 4 para la izquierda y con los azules corre 6 para adelante"
E14	R2	10 Azul	Describe su procedimiento indicando: "La ficha se encontraba en el número 10 del lado azul"
E15	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E16	R2	6A	Describe su procedimiento indicando: "Queda en 6 azul"
E17	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E18	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		

E19	R5	Avanzo 2	Describe su procedimiento indicando: "Quedan 2"
E20	R2	10 D	Describe su procedimiento indicando: "En los números debe haber salido 10 a la derecha 6 + 4 = 10"
E21	R2	10	Describe su procedimiento indicando: "4 + 6 = 10"
E22	R2	6A	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento e indica: "Quedaría en 6A"

Origen: Creación propia

3.2.2.3 Guía No 2 – Tarea 3a

Esta guía fue desarrollada por 16 estudiantes, los estudiantes codificados como **E8, E10, E12, E15, E17 Y E18** no la presentaron.

Tipificación de respuestas y procedimientos asociados, ver tabla 11.

Tabla 20:

Tabulación de respuestas y procedimientos asociados a la tarea 3a de la guía 2

Juego de la ruta guía 2: Juego de la ruta con tres dados, taller individual

Tarea 3a

Para determinar la posición de la ficha se escribirá, por ejemplo, 4 D para indicar que la ficha está en el cuadro 4 a la derecha del punto de salida y 4 I para indicar que se encuentra en el cuadro 4 a la izquierda del punto de partida

Completa la siguiente tabla del juego de la ruta donde se juega con tres dados y utilice el rectángulo de abajo para hacer las operaciones.

PREGUNTA	POSICION INICIAL	DADOS	POSICIÓN FINAL
A	1 D	4 A 3 A 5 R	

RESPUESTA DEL ESTUDIANTE

COD EST	COD RESP	RESPUESTA DESCRIPCIÓN	PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN
E1	R1	3D	Describe su procedimiento indicando: "4 + 3 +1 = 8 – 5 = 3"
E2	R1	3D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E3	R2	3I	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E4	R1	3D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E5	R3	No indica valor	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E6	R3	No indica valor	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E7	R2	6I	No hace operaciones ni justifica su procedimiento

E8	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E9	R2	5D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E10	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E11	R1	3D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E12	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E13	R1	3D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E14	R2	2D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E15	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E16	R1	3D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E17	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E18	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E19	R1	3D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E20	R2	2D	Describe su procedimiento indicando: "Pues yo sume lo de la posición inicial con los dados y lo puse en la posición final"
E21	R2	5	Describe su procedimiento indicando: "En rojo sacó 5 en azul sacó 4, 5 + 4 = 9"
E22	R1	3D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento

Origen: Creación propia

3.2.2.4 Guía No 2 – Tarea 3b

Esta guía fue desarrollada por 16 estudiantes, los estudiantes codificados como **E8, E10, E12, E15, E17 Y E18** no la presentaron.

Tipificación de respuestas y procedimientos asociados, ver tabla 12.

Tabla 21:

Tabulación de respuestas y procedimientos asociados a la tarea 3b de la guía 2

Juego de la ruta guía 2: Juego de la ruta con tres dados, taller individual

Tarea 3b

Para determinar la posición de la ficha se escribirá, por ejemplo, 4 D para indicar que la ficha está en el cuadro 4 a la derecha del punto de salida y 4 I para indicar que se encuentra en el cuadro 4 a la izquierda del punto de partida

Completa la siguiente tabla del juego de la ruta donde se juega con tres dados y utilice el rectángulo de abajo para hacer las operaciones.

PREGUNTA	POSICION INICIAL	DADOS	POSICIÓN FINAL
B		3 A 6 A 3 R	2 D

RESPUESTA DEL ESTUDIANTE

COD EST	COD RESP	RESPUESTA DESCRIPCIÓN	PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN
E1	R1	4I	Describe su procedimiento indicando: "4 + 3 +1 = 8 – 5 = 3"
E2	R1	4I	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E3	R2	1D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E4	R2	7I	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E5	R3	No indica valor	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E6	R3	No indica valor	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E7	R2	3I	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E8	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E9	R2	3D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E10	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E11	R2	3D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E12	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E13	R2	3I	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E14	R2	6I	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E15	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E16	R2	7I	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E17	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E18	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		

E19	R2	9D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E20	R2	1D	Describe su procedimiento indicando: "Pues yo sume lo de la posición inicial con los dados y lo puse en la posición final"
E21	R3	No indica valor	Describe su procedimiento indicando: "En rojo sacó 5 en azul sacó 4, 5 + 4 = 9"
E22	R2	7I	No hace operaciones ni justifica su procedimiento

Origen: Creación propia

3.2.2.5 Guía No 2 – Tarea 3c

Esta guía fue desarrollada por 16 estudiantes, los estudiantes codificados como **E8, E10, E12, E15, E17 Y E18** no la presentaron.

Tipificación de respuestas y procedimientos asociados, ver tabla 13.

Tabla 22:

Tabulación de respuestas y procedimientos asociados a la tarea 3c de la guía 2

Juego de la ruta guía 2: Juego de la ruta con tres dados, taller individual

Tarea 3c

Para determinar la posición de la ficha se escribirá, por ejemplo, 4 D para indicar que la ficha está en el cuadro 4 a la derecha del punto de salida y 4 I para indicar que se encuentra en el cuadro 4 a la izquierda del punto de partida

Completa la siguiente tabla del juego de la ruta donde se juega con tres dados y utilice el rectángulo de abajo para hacer las operaciones.

PREGUNTA	POSICION INICIAL	DADOS	POSICIÓN FINAL
C		5 R 3 R 4 A	7 D

RESPUESTA DEL ESTUDIANTE

COD EST	COD RESP	RESPUESTA DESCRIPCIÓN	PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN
E1	R2	10D	Describe su procedimiento indicando: "4 + 3 +1 = 8 – 5 = 3"
E2	R1	11D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E3	R2	5I	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E4	R3	No indica valor	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E5	R3	No indica valor	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E6	R3	No indica valor	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E7	R1	11D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E8	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		

E9	R2	3D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E10	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E11	R2	3D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E12	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E13	R2	3I	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E14	R2	6I	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E15	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E16	R2	9D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E17	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E18	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E19	R2	8I	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E20	R3	2D	Describe su procedimiento indicando: "Pues yo sume lo de la posición inicial con los dados y lo puse en la posición final"
E21	R3	No indica valor	Describe su procedimiento indicando: "En rojo sacó 5 en azul sacó 4, 5 + 4 = 9"
E22	R2	9D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento

Origen: Creación propia

3.2.2.6 Guía No 2 – Tarea 3d

Esta guía fue desarrollada por 16 estudiantes, los estudiantes codificados como **E8, E10, E12, E15, E17 Y E18** no la presentaron.

Tipificación de respuestas y procedimientos asociados, ver tabla 14.

Tabla 23:

Tabulación de respuestas y procedimientos asociados a la tarea 3d de la guía 2

Juego de la ruta guía 2: Juego de la ruta con tres dados, taller individual

Tarea 3d

Para determinar la posición de la ficha se escribirá, por ejemplo, 4 D para indicar que la ficha está en el cuadro 4 a la derecha del punto de salida y 4 I para indicar que se encuentra en el cuadro 4 a la izquierda del punto de partida

Completa la siguiente tabla del juego de la ruta donde se juega con tres dados y utilice el rectángulo de abajo para hacer las operaciones.

PREGUNTA	POSICION INICIAL	DADOS	POSICIÓN FINAL
D	2 I	2 A _ 6 R	3 I

RESPUESTA DEL ESTUDIANTE

COD EST	COD RESP	RESPUESTA DESCRIPCIÓN	PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN
E1	R1	3A	Describe su procedimiento indicando: "4 + 3 +1 = 8 – 5 = 3"
E2	R1	3A	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E3	R2	5A	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E4	R3	No indica valor	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E5	R3	No indica valor	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E6	R3	No indica valor	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E7	R3	No indica valor	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E8	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E9	R2	5A	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E10	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E11	R2	5A	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E12	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E13	R2	5A	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E14	R2	6A	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E15	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E16	R2	5A	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E17	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E18	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		

E19	R3	No indica valor	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E20	R2	8A	Describe su procedimiento indicando: "Pues yo sume lo de la posición inicial con los dados y lo puse en la posición final"
E21	R3	No indica valor	Describe su procedimiento indicando: "En rojo sacó 5 en azul sacó 4, 5 + 4 = 9"
E22	R2	5A	No hace operaciones ni justifica su procedimiento

Origen: Creación propia

3.2.3 Juego de la ruta segunda sesión.

3.2.3.1 Guía No 3 – Tarea 1

Esta guía fue desarrollada por 19 estudiantes, los estudiantes codificados como **E9, E11 y E 21,** no la presentaron.

Tipificación de respuestas y procedimientos asociados, ver tabla 12.

Tabla 24:

Tabulación de respuestas y procedimientos asociados a la tarea 1 de la guía 3

Juego de la ruta: Segunda parte			
Guía 3 Tarea 1			
Necesitamos que nos ayudes averiguar el estado inicial de Juanito "DONDE SE ENCONTRABA ANTES DE REALIZAR LOS MOVIMIENTOS INDICADOS" Si sabemos el resultado de los dados y el lugar al que llegó después de realizar los movimientos Estaba en ___ y el resultado luego de lanzar los dados fue: 3A, 5A, 4R, y 2R; finalmente llegó al puesto 7 a la derecha del punto inicial.			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	COD RESP	RESPUESTA DESCRIPCIÓN	PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN
E1	R1	5D	Describe su procedimiento indicando: "Probamos varios números hasta llegar al 5y corrimos 6 a la izquierda y nos devolvimos 8 a la derecha (sumamos los dos azules y los dos rojos)"
E2	R1	5D	Describe su procedimiento indicando: "Como la ficha se encontraba en 5D corrí los 6 que sumaban los dados azules y me dio 7 derecha"
E3	R2	9I	Describe su procedimiento indicando: "Yo hice todo al contrario"
E4	R1	5D	Describe su procedimiento indicando: "A mí me dio 5 a la derecha porque sumé 3A. 5A y 5R, 2R y resté"
E5	R1	5A	Describe su procedimiento indicando: "Se encontraba en la casilla 5A antes de mover los dados se cuenta cada casilla y se suma y se resta y se encuentra en el último movimiento7A"
E6	R1	5A	Describe su procedimiento indicando:

			"5A + 3A + 5A = 13 13rojo – 4R – 2Rojo = 7"
E7	R2	8	Describe su procedimiento indicando: "Tenemos que ver cuanto da en los números y mirar 16 números hacia atrás y nos dará el resultado"
E8	R1	5D	Describe su procedimiento indicando: "Estaba en 5D porque 3A quedaría en 8D y 5A quedaría en 13D con 4R quedaría en 9D y se quitan 2R queda en 7D del punto inicial"
E9	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E10	R1	5A	Describe su procedimiento indicando: "5A + 3A + 5A = 13 13rojo – 4Rojo – 2Rojo = 7"
E11	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E12	R2	2D	Describe su procedimiento indicando: "3+ 5 = 8 8 – 4 – 2 = 2D"
E13	R1	5D	Describe su procedimiento indicando: "Porque estaba en el 5 lado D entonces corro 8 y retrocedo 6"
E14	R1	5A	Describe su procedimiento indicando: "5A + 3A + 5A = 13 13rojo – 4Rojo – 2Rojo = 7"
E15	R2	8	Describe su procedimiento indicando: "Toca sumar todo y después se le resta al resultado hasta que dé 8 y retrocedo 6"
E16	R1	5D	Describe su procedimiento indicando: "Yo sumé todo lo que aparece y luego lo sume"
E17	R1	5D	No hace operaciones ni justifica su procedimiento
E18	R1	5D	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento e indica: "Yo hice el movimiento al contrario"
E19	R2	14I	Describe su procedimiento indicando: "Queda 14 a la izquierda yo sume 3,4,5,1 y 2 y se le suma al punto de inicio"
E20	R2	5	Describe su procedimiento indicando: "Sumamos azules y rojos por aparte y hacemos el movimiento al revés"
E21	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E22	R1	5A	Describe su procedimiento indicando: "5A + 3A + 5A = 13 13rojo – 4Rojo – 2Rojo = 7"

Origen: Creación propia

3.2.3.2 Guía No 3 – Tarea 2

Esta guía fue desarrollada por 19 estudiantes, los estudiantes codificados como **E9, E11 y E 21,** no la presentaron.

Tipificación de respuestas y procedimientos asociados ver tabla 12.

Tabla 25:

Tabulación de respuestas y procedimientos asociados a la tarea 2 de la guía 3

Juego de la ruta: Segunda parte			
Guía 3 Tarea 2			
Necesitamos que nos ayudes averiguar el estado inicial de Juanito "DONDE SE ENCONTRABA ANTES DE REALIZAR LOS MOVIMIENTOS INDICADOS" Si sabemos el resultado de los dados y el lugar al que llegó después de realizar los movimientos Estaba en ___ y el resultado luego de lanzar los dados fue:6A, 5A, 1R, y 2R; finalmente llegó al puesto 3 a la derecha del punto inicial.			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	COD RESP	RESPUESTA DESCRIPCIÓN	PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN
E1	R1	5I	Describe su procedimiento indicando: "Sumamos 8 + 6 = 11 de azul y después 1 + 2 = 3 de rojo después restamos 11 – 3 = 8 y volvimos a restar 8 – 3 = 5 y da 5 a la izquierda que es la posición inicial"
E2	R2	11D	Describe su procedimiento indicando: "Busque un número que al correr lo que daban los dados me diera 3 a la derecha"
E3	R1	5I	Describe su procedimiento indicando: "Yo hice todo al contrario"
E4	R1	5I	Describe su procedimiento indicando: "A mí me dio 5 a la izquierda porque sume 3A y 5A y reste 1R y 2R"
E5	R1	5R	Describe su procedimiento indicando: "Se encontraba en 5 R después e mover los dados en 3A"
E6	R1	5R	Describe su procedimiento indicando: "5R – 6A – 5A = 6Azul 6Azul – 1Rojo = 5Azul – 2Rojo = 3 azul"
E7	R2	2D	Describe su procedimiento indicando: "Antes de tirar los dados debes ver y luego sumar y restar y nos dará el resultado que es 2D"
E8	R1	5I	Describe su procedimiento indicando: "Estaba en 5I porque al lanzar 6A quedaba en 1D y luego se lanzó 5A y quedo en 6D luego se lanza 1R y queda en 5D y después se le restan 2R y queda en 3D"
E9	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E10	R1	5R	Describe su procedimiento indicando: 5R – 6A – 5A = 6Azul 6Azul – 1Rojo = 5Azul – 2Rojo = 3 azul"
E11	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E12	R2	8D	Describe su procedimiento indicando: "6 + 5 = 11 – 1 – 2 = 8D"
E13	R1	5R	No justifica, solo escribe la posición de la ficha
E14	R1	5R	Describe su procedimiento indicando: 5R – 6A – 5A = 6Azul 6Azul – 1Rojo = 5Azul – 2Rojo = 3 azul"

E15	R2	9	Describe su procedimiento indicando: “Primero toca sacarle la mitad de 6A, 5A, 1R y 2R y después lo suma”
E16	R1	5R	Describe su procedimiento indicando: “Yo sume y luego reste lo que aparece”
E17	R2	5D	No justifica, solo escribe la posición de la ficha
E18	R1	5R	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento e indica: “Yo hice el movimiento al contrario”
E19	R2	11	Describe su procedimiento indicando: “Al punto rojo reste todo quedo en 10”
E20	R2	8R	Describe su procedimiento indicando: “Quedaría en 8 Rojo”
E21	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E22	R2	5R	Describe su procedimiento indicando: 5R – 6A – 5A = 6Azul 6Azul – 1Rojo = 5Azul – 2Rojo = 3 azul”

Origen: Creación propia

3.2.3.3 Guía No 3 – Tarea 3

Esta guía fue desarrollada por 19 estudiantes, los estudiantes codificados como **E9, E11 y E 21,** no la presentaron.

Tipificación de respuestas y procedimientos asociados, ver tabla 13.

Tabla 26:

Tabulación de respuestas y procedimientos asociados a la tarea 3 de la guía 3

Juego de la ruta: Segunda parte			
Guía 3 Tarea 3			
Necesitamos que nos ayudes averiguar el estado inicial de Juanito “DONDE SE ENCONTRABA ANTES DE REALIZAR LOS MOVIMIENTOS INDICADOS” Si sabemos el resultado de los dados y el lugar al que llegó después de realizar los movimientos Estaba en ___ y el resultado luego de lanzar los dados fue: 1A, 2A, 4R, y 5R; finalmente llegó al puesto 12 a la izquierda del punto de partida			
RESPUESTA DEL ESTUDIANTE			
COD EST	COD RESP	RESPUESTA DESCRIPCIÓN	PROCEDIMIENTO DESCRIPCIÓN
E1	R1	6I	Describe su procedimiento indicando: “Sumamos 1 + 2 = 3 de azul y después 4 + 5 = 9 de rojo restamos 9 – 3 = 6 restamos 6 – 12 = 6 que es la posición inicial”
E2	R2	5I	Describe su procedimiento indicando: “Busqué un número que al correr lo que me dieron los dados me diera 12 a la izquierda”
E3	R1	6I	No justifica, solo escribe la posición de la ficha
E4	R2	2I	Describe su procedimiento indicando:

			"Digamos que estaba en 2I y me dio 3 y quedó en el punto de inicio 12 porque lo hice al revés"
E5	R1	6R	Describe su procedimiento indicando: "Se encontraba en 6R después de mover los dados llegó al puesto 6R"
E6	R1	6R	Describe su procedimiento indicando: "R – 1Az = 5R – 2Az = 3Rojo 3Rojo + 4Ro = 7Rojo + 5Rojo = 12Rojo"
E7	R2	11A	Describe su procedimiento indicando: "1A, 2A, 4R y 5R Debemos sumar y multiplicar los números y nos dará 11A"
E8	R1	6R	Describe su procedimiento indicando: Queda en 6I porque 1A queda en 5 a la izquierda, luego 2A queda en 3I luego 4R queda en 7I y luego se lanza 5R y queda en 12I"
E9	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E10	R1	6R	No justifica, solo escribe la posición de la ficha
E11	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E12	R2	3D	No justifica, solo escribe la posición de la ficha
E13	R1	6R	No justifica, solo escribe la posición de la ficha
E14	R1	6R	Describe su procedimiento indicando: "6R – 1Az = 5R – 2Az = 3Rojo 3Rojo + 4Ro = 7Rojo + 5Rojo = 12Rojo"
E15	R2	6	Describe su procedimiento indicando: "Yo sumé y después lo multipliqué y me dio 6"
E16	R1	6R	Describe su procedimiento indicando: "Yo reste y sume lo que aparecía"
E17	R1	6R	No justifica, solo escribe la posición de la ficha
E18	R1	6R	Se guía utilizando un dibujo del juego de la ruta y simulando el movimiento e indica: "Yo hice el movimiento al contrario"
E19	R2	12	No justifica, solo escribe la posición de la ficha
E20	R2	9I	No justifica, solo escribe la posición de la ficha
E21	NO PRESENTÓ LA PRUEBA		
E22	R1	6R	Describe su procedimiento indicando: "6R – 1Az = 5R – 2Az = 3Rojo 3Rojo + 4Ro = 7Rojo + 5Rojo = 12Rojo"

Origen: Creación propia

ANEXO 4: ANÁLISIS CUALITATIVO SUJETO E1 NIVEL ALTO

4.1 Análisis de las tareas 1 y 2

Tarea1: En un cesto A hay 7 naranjas más que en uno B, y en este B hay 6 naranjas menos que en un cesto C. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos A y C. ¿cuál tiene más? ¿cuántas más? Explique cómo hace las cuentas.

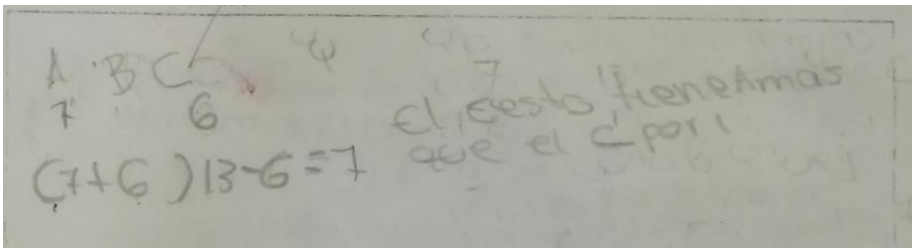


Figura 11, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 1 de la prueba inicial.

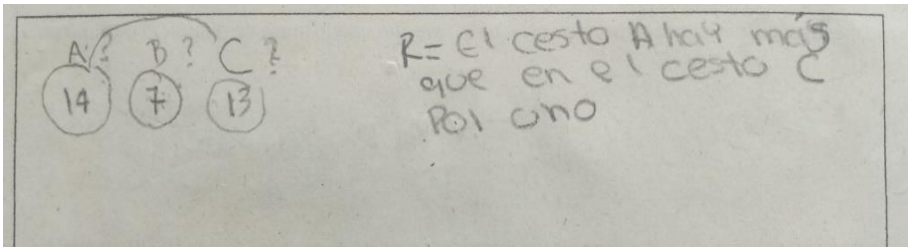


Figura 12, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 1 de la prueba final.

Tarea 2: En un cesto M hay 5 naranjas menos que en un cesto N, y en este N hay 6 naranjas más que en un cesto P. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos M y P. ¿cuál tiene más? ¿cuántas más? Explique cómo hace las cuentas.

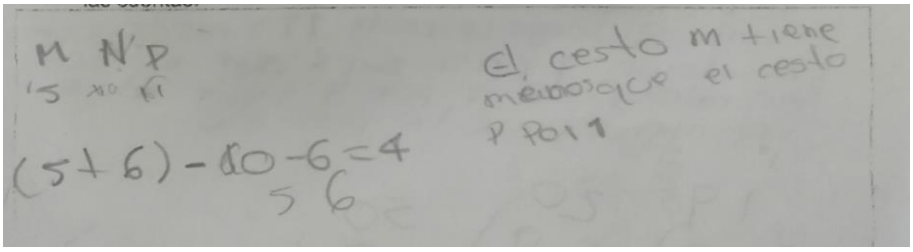


Figura 13, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 2 de la prueba inicial.

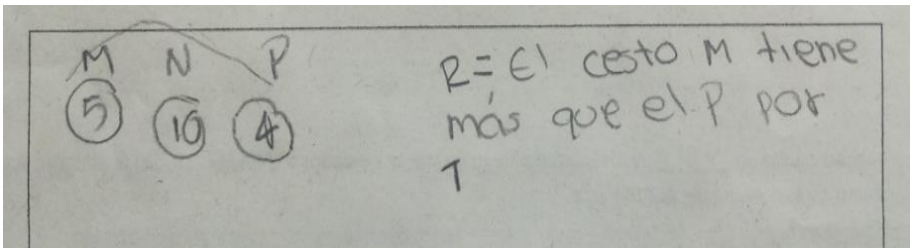


Figura 14, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 2 de la prueba final.

En la tabla No 27 se resumen las respuestas proporcionadas por el estudiante E1 a las dos tareas.

Tabla 27:

Resumen procedimientos de las tareas 1 y 2

TAREA	Código Procedimiento	
	Prueba inicial	Prueba final
T 1	R2	R1
T 2	R2	R1

Origen: Creación propia

Procedimiento R1. Inventa un ejemplo de solución, asigna valores a la cantidad de naranjas de cada cesto y tiene en cuenta las diferencias indicadas en el enunciado.

Procedimiento R2. Suma las cantidades indicadas en el enunciado y luego al resultado le resta la diferencia indicada entre el cesto N y P 5 + 6 = 11 y 6 – 5 = 1.

En la prueba inicial en ambas preguntas, el estudiante sigue el procedimiento R2. En la tarea uno contesta correctamente y en la dos incorrectamente. En la tarea 1 escribe. “el cesto A tiene más que C por 1”, en la tarea 2 dice que “el cesto M tiene menos que el P por 1”. En la entrevista que se hace al estudiante después de la prueba se evidencia que la respuesta correcta a la tarea uno es una respuesta falsa (es correcta, pero el procedimiento y la justificación dada por el resolutor es incorrecta). E1 se limita a tomar los dos valores que determinan las diferencias de las cantidades de las naranjas y los resta. Parece que el que termine afirmando en la primera tarea

que en el primer cesto hay uno más que en el tercero y en la segunda tarea que hay uno menos que en el tercero tiene que ver con el hecho de aparecer estas expresiones en los enunciados que comparan el primer cesto con la segundo. En la tarea uno: “en un cesto A hay 7 naranjas **más** que en uno B” y en la segunda: “en un cesto M hay 5 naranjas **menos** que en un cesto N”.

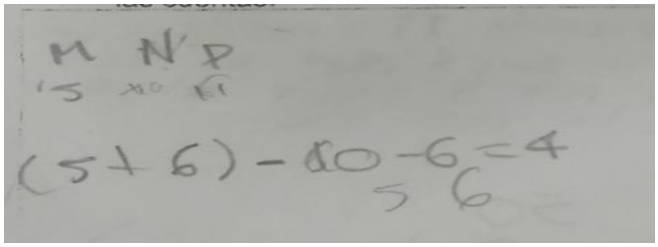
En la primera tarea, del primer enunciado “hay 7 naranjas más que en uno B” toma 7. Y del segundo, “B hay 6 naranjas menos que en un cesto C”, toma 6. Posiblemente decide restar (7 – 6) porque en el segundo enunciado aparece la palabra menos.

En la entrevista sobre la prueba inicial al solicitarle que explicara y justificara la respuesta que había dada al responder la prueba se da el diálogo siguiente:

P*: (entrevistador). … Lo que queremos nosotros es saber por qué escribió estas cosas y listo, y ya vamos conversando.*
E1*: El cesto A tiene más que el C por 1.*
P1*: Explíquenos eso. ¿Cómo supo que era por 1?*
E1: *Porque éste 7 y éste 6, o sea comparé los dos números y me dio 1.*
P1*: ¿Y cree que eso es así?*
E1*: No.*
P1*: ¿Cómo cree ahora que es?*
E1*: Hummm pues no sé.*

En la tarea 2 se tiene

P1: *¿Esto* [se muestra el procedimiento que escribió en la figura 13] por*qué lo hizo?*



E1*: Yo lo intenté hacer igual que este* [que la primera tarea]
P1*: ¿Díganos cómo razonó?*
E1*: Yo seguía pensando que no era así, y borraba y lo intentaba hacer nuevamente.*
P1*: ¿Por qué cogió 5?*
E1*: Porque había 5 naranjas. Yo sabía que no.*
P1*: ¿En dónde había 5 naranjas?*
E1*: En el cesto N. Yo sabía que no, pero pues no sabía cómo.*

P1*: ¿Y este 6 qué hizo con él?*
E1*: Por el N*

De este fragmento parece lícito, hacer dos afirmaciones:

a) E1 reconoce la semejanza de las dos tareas

b) El reconoce que en el enunciado no se dice cuántas naranjas hay en M y cuántas en N, pero como parece que necesita conocer la cantidad que hay en los cestos decide realizar operaciones para obtener estos valores

P1: *¿Y por qué lo sumó?*
E1: *Para saber cuántos había en el P*
[…]
P1: *¿Y después por qué dijo que el cesto M tiene menos que el cesto P por 1?*
E1: *Porque los comparé*

Que las operaciones que escribe el estudiante en los dos casos, cumplen más la función de satisfacer la demanda de escribir un procedimiento (hay que mostrar operaciones que se ejecutan) que de responder a una forma de significar los enunciados que componen el texto del problema, más bien lo que parece que hace E1 en las dos tareas E1 es limitarse a comparar los valores que se dan en los enunciados que establecen las relaciones entre las cantidades de los cestos. Con la información que se tiene no se puede afirmar si E1 presta atención al sentido de la relación (…7 más y 6 menos y … 5 menos y 6 más …) y como encuentra que son opuestos resta o simplemente se limita a restar porque aparece un menos.

Quizá al comparar las respuestas de otros casos pueda precisar algo al respecto.

Sin embargo, en la misma entrevista, a propósito de la tarea 1, se puede constatar que el estudiante comprende bien los enunciados relacionales.

P1 *...podemos comparar la cantidad de naranjas que hay en el cesto A y en el cesto B. ¿Qué podemos decir?*
E1*: Que en el cesto A hay 7 naranjas más que en el cesto B. Es decir, que en el A hay más que en el B*
P1*: ¿Cuántas más hay en el A que en el B?*

E1*: 7*
P1*: Póngame un ejemplo, por ejemplo, ¿Cuántas podría haber en A y cuántas en B para que se cumpla la condición?*
E1*: una y acá 7 [en el cesto B]*
P1*: ¿Cuantas naranjas más tiene A que B?*
E1: *6*
P1*: ¿Entonces qué arregla?*
E1*: que acá no tiene nada, y acá 7*
P1*: Bueno, puede ser, listo. ¿Póngame otro ejemplo?*
E1*: que acá hay 14, y acá 7.*
P1*: ...Listo, muy bien, otro ejemplo.*
E1*: ... 27 y acá 34.*

Es claro que E1 interpreta correctamente el enunciado "en A hay 7 naranjas más que en uno B" De igual forma hace con el enunciado que compara B con C. Parece que la dificultad está en hacer la composición de las dos relaciones implicadas.

En la entrevista que se realizó sobre la prueba final se constata un cambio en la forma de abordar el problema con relación a como lo hizo inicialmente. E1 coloca valores posibles a las cantidades de los A, B y C (o M, N y P para la tarea 2) y con base en esto hace la comparación directa entre el primer y tercer cesto. El siguiente es el dialogo que se da con relación a la tarea 1

P1: … ¿Por qué hiciste esto? ¨[se hace referencia a lo que aparece en la figura 4)
E1*: Es un número que le di*
P1*: ¿Quién dijo que escribieras 14?*
E1*: Yo lo di teniendo en cuenta las cantidades que pedían.*
P1: *¿Y por qué 7?*
E1*: Contabilicé que el A tuviera 7 más que el B, y así hice con C.*
P1*: Bien. ¿Y quién tiene más A o B?*
E1: *A, por un número.*

Aunque el segmento muestra un progreso con relación a lo que ocurrió en la prueba inicial, parece que E1 todavía no logra hacer una verdadera generalización, es decir, da valores particulares a las cantidades de naranjas que contiene cada cesto (que satisfagan los enunciados relacionales) para encontrar la diferencia pedida, todavía duda de si la diferencia obtenida depende de los valores que se tomen.

P: *¿Y por qué hiciste esto otro? (dar otros valores para las cantidades del contenido de los cestos A, B y C: 13, 6 y 12)*
E1*: Quise dar hartos ejemplos.*
P1*: ¿Y quién tiene más?*
E1*: Igual la A y por uno.*
P1*: ¿Y por qué crees que pasa eso? ¿Y si pones otro número?*
E1*: También me da mayor la A por uno.*
P1: *¿Estás segura?*
E1*: si porque yo hice 3.*
P1*: ¿No importa el número que pongas siempre va ser mayor el A por uno?*
E1: *Si, pero teniendo en cuenta las condiciones que dice, este procedimiento, en esta característica, porque en otras quién sabe.*
P1: *¿Qué condiciones?*
E1*: Que el A tiene 7 naranjas más que el B, y que el C tenga 6 naranjas menos que C. Aunque en el segundo me dio lo mismo.*
P1*: ¿Qué es lo mismo?*
E1: *Que era mayor por uno.*

En la segunda tarea sigue el mismo procedimiento, pero en este caso solo usa un ejemplo, parece que tiene una relativa seguridad de que le va a dar lo mismo independientemente de las cantidades que tome, con tal de que se satisfagan las condiciones del problema; aunque no logra explicarse bien por qué sucede esto

P1*: Hummm, ok. ¿Y eso lo hiciste con más números?*
E1*: No, porque ya más o menos tenía la idea.*
P1*: Hummm, pero mira que aquí cambiamos las condiciones, ya que este punto es distinto al primero.*
E1*: Pero no sé porque me da siempre que uno es mayor que el otro por uno.*
P1: *¿Y si ponemos 8?*
E1: *Creo que también va a dar por uno.*
P1*: ¿Está segura?*
E1*: Me da también uno. M8, N13 y P7. M tiene uno más que P.*
P1*: ¿Y si ponemos otro número? ¿Por qué siempre da uno?*
E1*: Creo que también me va a dar uno. El problema está para que dé así. Como que se balancea, no sé*

Resumen del caso en las tareas 1 y 2: De la prueba inicial a la final pasa de un procedimiento R2 a R1. Parece ser que en la prueba inicial las operaciones que escribe como procedimiento no tienen que ver con una forma de razonar para resolver el problema, parece ser más bien que cumplen el papel de responder el requerimiento que se le hace de escribir cómo lo hace y de la idea de que al resolver un problema hay que ejecutar operaciones con las cantidades

que se dan. Para la solución, E1 se limita a comparar las cantidades que se dan en los enunciados relacionales, tomándolos como valores absolutos y dando su deferencia y el hecho de que afirme que hay más o hay menos en el primer cesto que en el segundo tiene que ver más con que se usan estas expresiones en la relación de la cantidad del primer cesto con relación a la del segundo. En la prueba final da muestras de comprender el problema y para resolverlo da valores particulares.

En un comienzo no tiene clara la permanencia de la diferencia entre las cantidades independientemente de los valores particulares que se den, y aunque en la tarea 2 parece ganar seguridad de la necesidad de este hecho, no logra darse una explicación de por qué sucede (sabe que sucede, pero no sabe por qué).

4.2 Análisis de las tareas 3 y 4

Tarea 3: Si a “16” se le suma 8, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial “16” o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta.

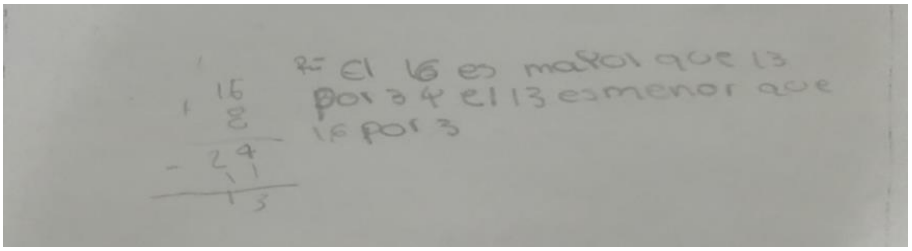


Figura 15, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 3 de la prueba inicial

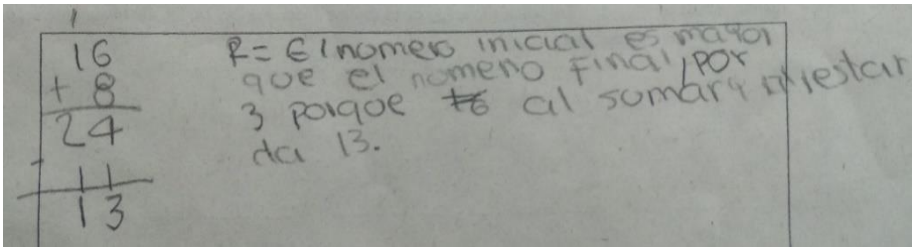


Figura 16, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 3 de la prueba final

Tarea 4: A un número desconocido primero se le suma 8, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial desconocido o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta.

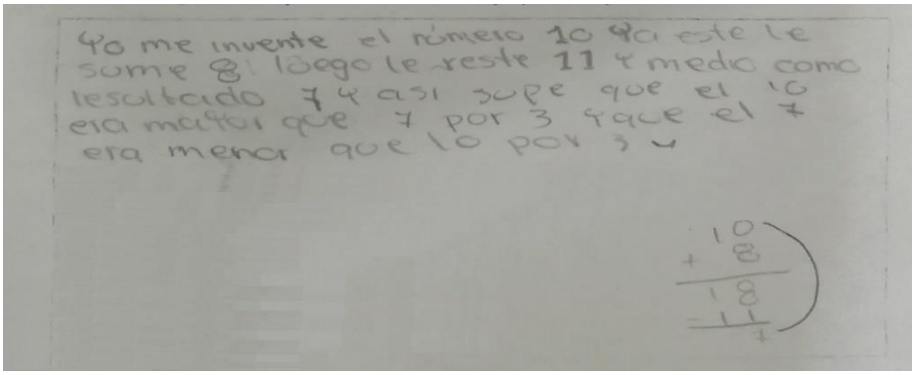


Figura 17, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 4 de la prueba inicial

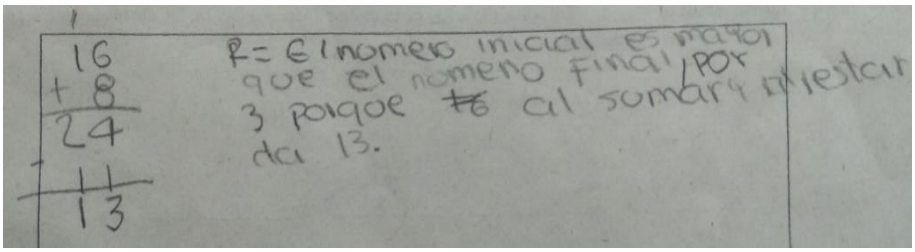


Figura 18, *Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 4 de la prueba final*

En la tabla 28 se resumen las respuestas que proporcionó el estudiante E1 a las tareas 3 y 4

Tabla 28:

Resumen procedimientos de las tareas 3 y 4

TAREA	Código Procedimiento	
	Prueba inicial	Prueba final
T 3	R1	R1
T 4	R1	R1

Origen: Creación propia

Procedimiento R1: En T3 al número inicial le suma la cantidad indicada y al resultado le resta la cantidad indicada. Luego compara el número inicial con el resultado final. En T4 se da un valor para seguir el procedimiento indicado.

En la tarea 3: 16 + 8 = 24 y 24 – 11 = 13.

En ambas tareas E1 sigue el mismo procedimiento tanto en la prueba inicial como en la final.

En la entrevista sobre la prueba inicial al solicitarle que explicara y justificara la respuesta que había dado en la T3 al responder la prueba, se da el diálogo siguiente

P1*: ¿Qué contestó usted?*
E1*: 16 es mayor que 13 por 3 y 13 es menor que 16 por 3. ..-Yo comparé el 16 y el 13, y me dio que era mayor por 3*
P1*: Muy bien.*

En la prueba final mantiene el mismo procedimiento para esta tarea, sin embargo, la enunciación de la respuesta cambia con relación a la dada en la prueba inicial, en este caso dice: "El número inicial es mayor que el número final por 3 porque al sumar y a restar da 13".

El segmento de la entrevista final al respecto de este punto muestra la dificultad que tiene E1 para entender que independientemente de valor inicial, mientras permanezcan los dos operadores (suma 8 y resta 11) el valor inicial será mayor que el final en 3. Esto mismo se verá de forma más clara en la Tarea 4

P1: *...Dijiste que el 16 es mayor por 3. ¿Y si en lugar de 16 ponemos otro número?*
E1*: También sería mayor.*
P1: *¿Y por cuánto?*
E1*: MMM, no sé. ¿Siempre sería por 3?*
P1*: ¿Y por qué crees que pasa eso?*
E1: *No sé.*
P1*: Bueno, vamos con el siguiente.*

Para la tarea 4 en la prueba inicial E1 toma un valor para el número desconocido (en este caso 10), de manera que reduce el problema a uno del tipo de la tarea 3. El siguiente segmento de la entrevista de la prueba inicial sobre la tarea 4 ilustra con claridad el conflicto que tiene para determinar que lo que sucede con un valor particular necesariamente tiene que suceder con cualquier valor de E1, ya que esto depende de la relación entre los operadores.

P1: *Eso es cuando es 10 [E1 había escrito en la prueba "yo me inventé el número 10], pero si se inventa otro número, ¿la diferencia entre el primero y el último va a ser 3?*
E1: *No.*
P1: *¿Por qué no inventa otro número?*
E1: [*toma 19 suma 8 y resta 11] 19 y 16, da 3.*
P1: *Dio lo mismo. ¿Fue de casualidad?*
E1: *¿De pronto será por qué son los mismos el 8 y el 11?*
P1: *¿Cree que si lo hacemos con otros números da igual?*
E1: *No sé.*
P1: *Invéntese otros números para ver qué pasa*.
E: [*lo hace con 20] 20 y 17*
P1: *¡Le volvió a dar igual! ¿Entonces qué piensa?*
E1: *No sé. Que de pronto es por el 8 y el 11*.
P1: *Por eso, ¿pero siempre nos va a dar igual? Inventamos con otro número más grande, con 50 para ver qué pasa.*
E1: *Me da lo mismo. 50 y 47 da 3.*
P1: *Entonces ¿qué piensa?*
E1: *que sí, es por el 8 y el 11*.
P1: *pero ¿por qué? Todos le dieron la misma diferencia, estos. ¿Usted cree que siempre va a dar lo mismo*? *¿Por qué?*
E1: *Por el 8 y el 11 dan lo mismo. Como que hacen que un número de 3... Pero no sé por qué sigue dando 3…….*

Claramente por el procedimiento de ensayo E1 reduce la tarea 4 a una de tipo de la tarea 3. Parece que lo hace porque todavía no ha accedido a la composición de operadores. Para E1 no es del todo claro que debido a que los operadores son sumar 3 y restar 11, necesariamente el Ei va a quedar disminuido en 3 unidades. Cuando verifica que la diferencia se mantiene a pesar de diferentes valores del Ei, los hechos se le imponen, y acepta que sí, que siempre se va a tener el mismo valor, pero aún se le escapa una razón. "Pero no sé por qué sigue dando 3…"

En la prueba final de esta misma tarea aplica el mismo procedimiento, toma como valor inicial 14. El segmento de la entrevista correspondiente

E1: Es como el anterior [es decir la tarea 3]. Si se da la operación que da 3 [hacer referencia a los enunciados que indican las transformaciones] o sea que el número desconocido es mayor por 3.
P1: ¿Y si en lugar del 14 que pusiste pongo otro número? ¿Cuál sería la diferencia?
E1: Da lo mismo.
P1. Hummm, ¿y por qué?
E1: ay profe, no sé. Porque las operaciones están creadas para que den un resultado así se cambie el número inicial.

Puede afirmarse que E1 muestra en esta entrevista final un importante avance hacia la composición de operadores. “Si se da la operación que da 3 [hacer referencia a los enunciados que indican las transformaciones] o sea que el número desconocido es mayor por 3”, aunque todavía no accede a un por qué basado en una necesidad lógica: “ay profe, no sé. Porque las operaciones están creadas para que den un resultado así se cambie el número inicial”.

***Resumen del caso en las tareas 3 y 4*:** Las tareas 3 y 4 son resueltas mediante el procedimiento R1, consistente en comparar de manera directa los valores inicial y final. A partir de las entrevistas parece razonable afirmar que E1 no ha accedido a la composición de operadores, de ahí que en la tarea 3 calcule el valor final para después hacer la comparación y, en la tarea 4, prefiera dar un valor al Ei desconocido, para proceder como en la tarea 3. También parece razonable afirmar que al final se da un progreso importante de E1 hacia la composición de operadores, debido a la evidencia de los casos particulares el estudiante termina aceptando que la diferencia entre el valor inicial y el final será la misma para los dos operadores, pero no logra acceder a un por qué. A nuestro parecer porque E1 aún no logra comprender la composición de operadores (si se suma 8 y se resta 11, necesariamente el número quedará disminuido en 3).

4.3 Análisis de las guías del juego de la ruta

A continuación, se analizan las producciones del estudiante en algunas tareas que le propusieron en las guías a lo largo de la secuencia didáctica. Las tareas se relacionan con las diferentes versiones del juego de la ruta. Este juego consiste en realizar desplazamientos en dos sentidos opuestos a partir de una posición dada, las variantes del juego consisten en la cantidad de desplazamientos que suponga un juego, la primera variante involucra únicamente dos desplazamientos uno en un sentido opuesto a otro, la segunda variante involucra tres

desplazamientos, uno en un sentido y el tercero en sentido opuesto y la tercera variante consiste en cuatro desplazamientos, dos en un sentido y los otros dos en sentidos opuesto. Aquí se describen las producciones con dos tipos de situaciones.

Situaciones de estructura 1. Problemas directos: Estas tareas consisten en que se les da un punto de partida (estado inicial), se aplican dos o tres desplazamientos en diferentes sentidos y se le pide que indique el punto de llegada (estado final). Se dice directo en tanto que la situación que se plantea se da en el mismo sentido en que se realiza la acción en juego (el jugador conoce el punto de partida se realizan unos desplazamientos y finaliza en un lugar de la ruta).

- Situaciones de estructura 2: Problemas inversos de estado inicial desconocido. Estas tareas consisten en que se dan varios desplazamientos y el punto de llegada (estado final) y se pide indicar el punto de partida (estado inicial). Se dice inverso en tanto que no se da en el mismo sentido de la acción, aquí se desconoce el punto de partida que debe reconstruirse

4.3.1 Análisis de respuestas correspondientes a las tareas de estructura 1. Directos

Guía 1 Tarea 1: Si una ficha se encuentra a 4 espacios a la derecha del punto de partida, y los dados muestran: azul 2 y rojo 6, ¿a qué posición debería llegar la ficha?

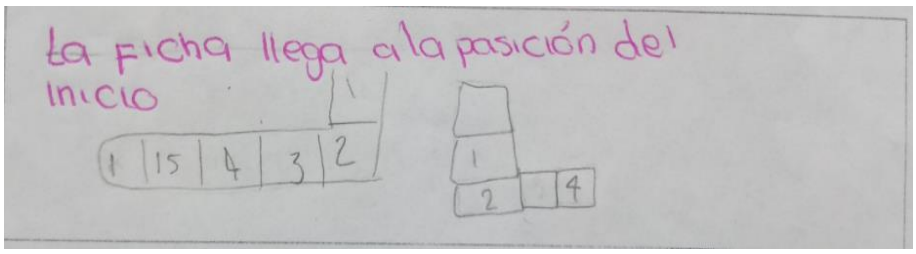


Figura 19, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 1 de la guía 1.

Guía 2 Tarea1: Juan lanza los dados y obtiene los siguientes resultados: 3 azul, 4 azul y 2 rojo. Si antes de lanzar los dados la ficha se encontraba 2 puestos a la derecha del punto inicial, ¿a qué puesto llegará después de lanzar los dados?

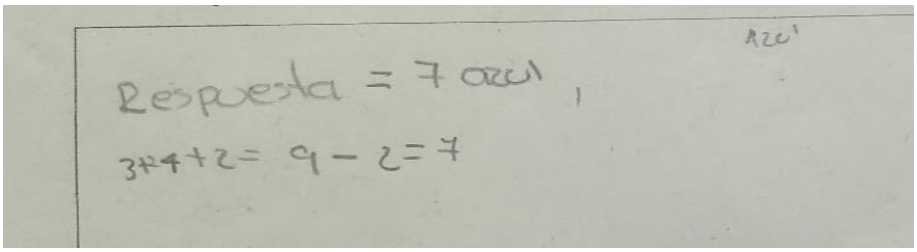
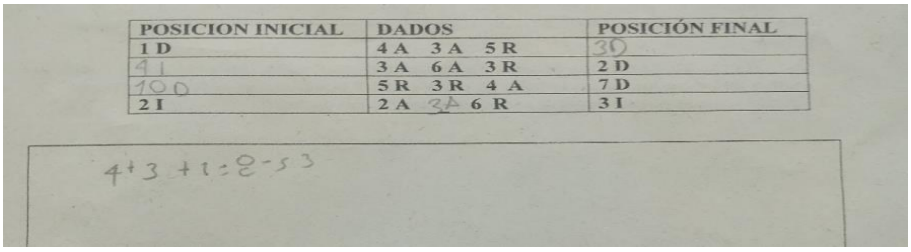


Figura 20, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 1 de la guía 2.

Guía 2 Tarea 3a:



POSICION INICIAL	DADOS	POSICIÓN FINAL
1 D	4 A 3 A 5 R	3D
9 I	3 A 6 A 3 R	2 D
10 D	5 R 3 R 4 A	7 D
2 I	2 A 3A 6 R	3 I

4+3+1=8-5=3

Figura 21, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 3A de la guía 2

En la tabla 29 se resumen las respuestas que proporcionó el estudiante E1 a las tareas 1de la guía 1 y 1 y 3A de la guía 2

Tabla 29:

Resumen procedimientos de las tareas 1 de la guía 1 y 1 y 3A de la guía 2

TAREA	Código Respuesta		
	Tarea 1 guía 1	Tarea 1 guía 2	Tarea 3A guía 2
Estructura 1	R1	R1	R1

Origen: Creación propia

Procedimiento R1: Indica como respuesta el punto de llegada y la ubicación exacta (izquierda o derecha del punto de partida) de la ficha. “La ficha llega a la posición del inicio” ...”7Azul” …”3D” como se muestra en las figuras 9, 10 y 11 respectivamente.

En las tres tareas el estudiante E1 da una respuesta correcta a la pregunta. Mientras en la guía 1 toma como base el juego de la ruta y realiza una simulación de los movimientos indicados, en las tareas de la guía 2 el estudiante suma el resultado de los dados azules al punto inicial y al resultado le resta el de los dados rojos, “4 + 3 +1 = 8 – 5 = 3” ver figura 11.

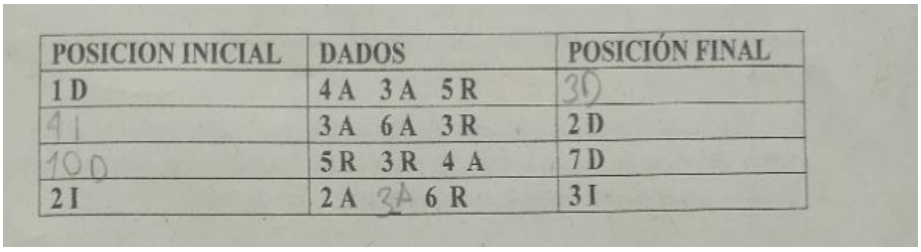
Para este caso, se nota un avance en el procedimiento desarrollado por el estudiante; mientras en la guía 1 hace una simulación de los movimientos para llegar al resultado, en las tareas de la guía 2 asocia el color de los dados con desplazamientos en sentidos opuestos y con base en esto calcula utilizando sumas y restas, el resultado.

4.3.2 Análisis de respuestas correspondientes a la estructura 2

Para este análisis distinguimos dos tipos de problemas según que el estado inicial desconocido esté a un lado u otro del estado final: a) cuando el estado inicial se encuentra a la izquierda del estado final y b) cuando el estado inicial se encuentra a la derecha del estado final.

4.3.2.1 Estado inicial se encuentra a la izquierda del estado final

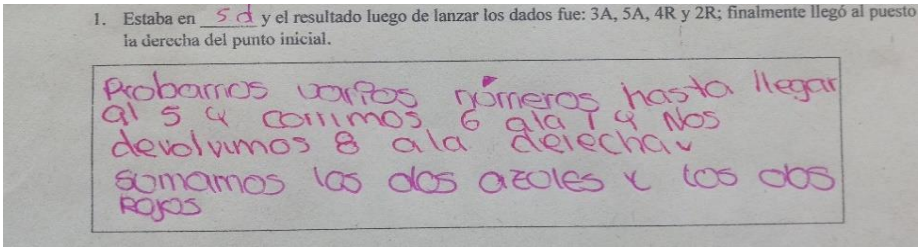
Guía 2 Tarea 3B



POSICION INICIAL	DADOS	POSICIÓN FINAL
1 D	4 A 3 A 5 R	30
41	3 A 6 A 3 R	2 D
100	5 R 3 R 4 A	7 D
2 I	2 A 3A 6 R	3 I

Figura 22, Respuesta del estudiante E1 3b de la guía 2a la pregunta

Guía 3 Tarea1: Estaba en ___ y el resultado luego de lanzar los dados fue: 3A, 5A, 4R, y 2R; finalmente llegó al puesto 7 a la derecha del punto inicial.

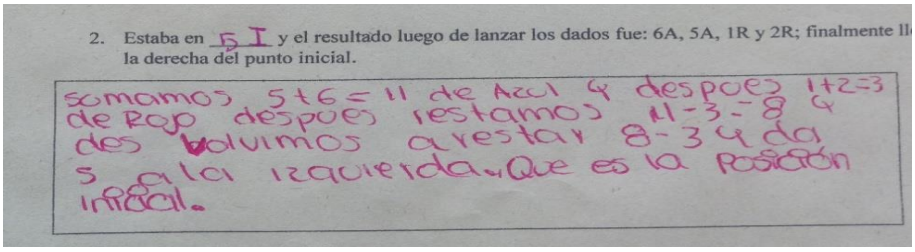


1. Estaba en 5 d y el resultado luego de lanzar los dados fue: 3A, 5A, 4R y 2R; finalmente llegó al puesto la derecha del punto inicial.

Probamos varios números hasta llegar al 5 y contamos 6 ala 7 y Nos devolvimos 8 ala derecha y sumamos los dos azules y los dos Rojos

Figura 23, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 1 de la guía 3

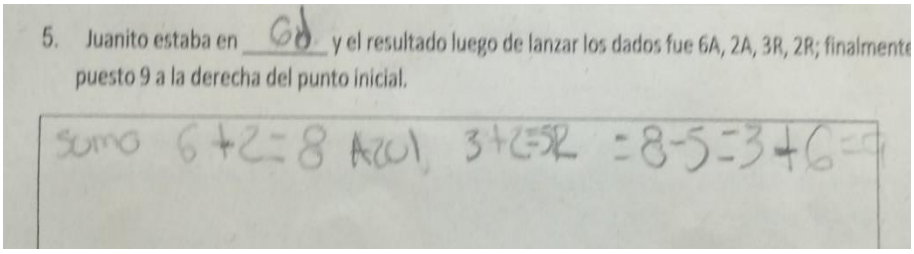
Guía 3 Tarea 2: Estaba en ___ y el resultado luego de lanzar los dados fue:6A, 5A, 1R, y 2R; finalmente llegó al puesto 3 a la derecha del punto inicial.


2. Estaba en 5 I y el resultado luego de lanzar los dados fue: 6A, 5A, 1R y 2R; finalmente ll
la derecha del punto inicial.

sumamos 5+6=11 de Azul y despues 1+2=3 de Rojo despues restamos 11-3=8 y des volvimos a restar 8-3 y da 5 a la izquierda. Que es la posición inicial.

Figura 24, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 2 de la guía 3

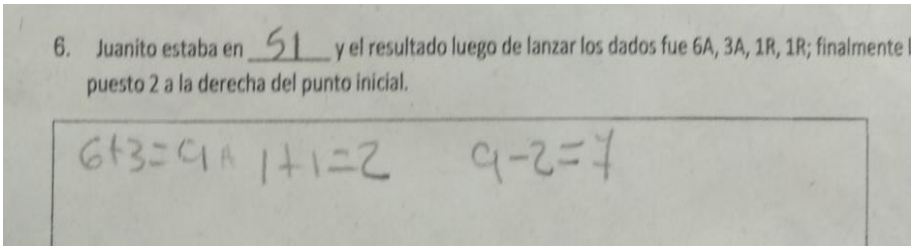
Prueba final Tarea 5: Juanito estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue 5A, 3A, 3R, 2R; finalmente llegó al puesto 9 a la derecha del punto inicial.


5. Juanito estaba en 6 y el resultado luego de lanzar los dados fue 6A, 2A, 3R, 2R; finalmente
puesto 9 a la derecha del punto inicial.

sumo 6+2=8 Azul 3+2=5R =8-5=3+6=9

Figura 25, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 5 de la prueba final

Prueba final Tarea 6: Juanito estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue 5A, 6A, 3R, 1R; finalmente llegó al puesto 2 a la derecha del punto inicial.


6. Juanito estaba en 51 y el resultado luego de lanzar los dados fue 6A, 3A, 1R, 1R; finalmente
puesto 2 a la derecha del punto inicial.

6+3=9A 1+1=2 9-2=7

Figura 26, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 6 de la prueba final

En la tabla 30 se resumen las respuestas que proporcionó el estudiante E1 a las tareas correspondientes a la estructura 2, donde el punto inicial se encuentra a la izquierda del punto final: Guía 2 tarea 3c, guía 3 tarea 1, guía 3 tarea 2, y tareas 5 y 6 de la prueba final.

Tabla 30:

Resumen procedimientos de las tareas 3c de la guía2, 1 y 2 de la guía 3 y 5 y 6 de la prueba final

TAREA	Código Respuesta				
	Tarea 3c Guía 2	Tarea 1 guía 3	Tarea 2 guía 3	Tarea 5 Prueba final	Tarea 6 Prueba final
Estructura 3 Ei < Ef	R1	R1	R1	R1	R1

Origen: Creación propia

Procedimiento R1: Indica el punto de llegada y la ubicación exacta (izquierda o derecha del punto de partida) de la ficha. *"4I" ..."5D" ..."5I" ... "6D" ... "5I".*

En las cinco tareas el estudiante E1 da una respuesta correcta a la pregunta y realiza un procedimiento similar, en la tarea 1 de la guía 3 escribe: "Probamos varios números hasta llegar al 5 y corrimos 6 a la izquierda y nos devolvimos 8 a la derecha (sumamos los dos azules y los dos rojos)", ver figura 26.…

En la tarea 2 de la guía 3 escribe: "Sumamos 8 + 6 = 11 de azul y después 1 + 2 = 3 de rojo después restamos 11 – 3 = 8 y volvimos a restar 8 – 3 = 5 y da 5 a la izquierda que es la posición inicial", ver figura 27; donde suma el resultado de los dados azules y al resultado le resta el de los dados rojos, y al punto final le resta el resultado obtenido.

El procedimiento seguido en estos casos se caracteriza porque no ve la reversibilidad que existe para llegar del punto final al punto inicial invirtiendo el sentido de los desplazamientos dados, por lo que se hace necesario tener un punto de partida. Hecho que se resuelve probando con un posible valor y a partir de ahí se aplican los desplazamientos. Otro hecho claro es que se componen los desplazamientos en el mismo sentido para tener resultados parciales, asociando el color de los dados con desplazamientos en sentidos opuestos. y se entiende que estos dos desplazamientos dan como resultado un desplazamiento cuya magnitud es la diferencia de las

magnitudes de los resultados parciales y la dirección es la del desplazamiento mayor de estos dos.

4.3.2.2 Estado inicial se encuentra a la derecha del estado final

Guía 1 Tarea 2: Se lanzan los dados y se obtiene 2 azul, rojo 6, y la ficha finaliza en 3 azul. ¿En dónde se encontraba la ficha antes de lanzar los dados?

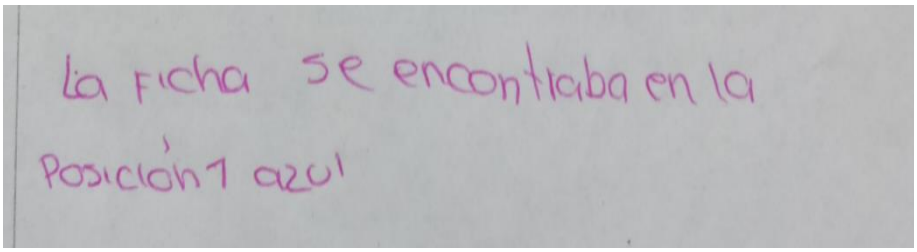
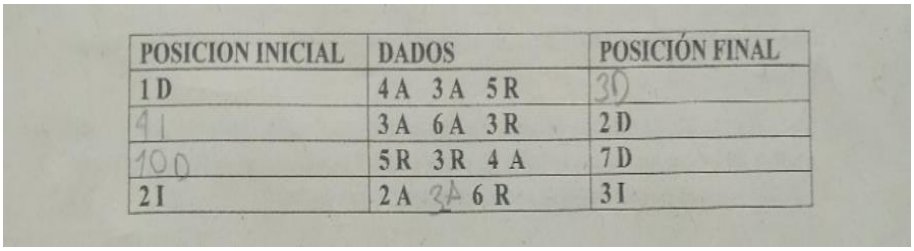

La ficha se encontraba en la
Posición 1 azul

Figura 27, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 2 de la guía 1

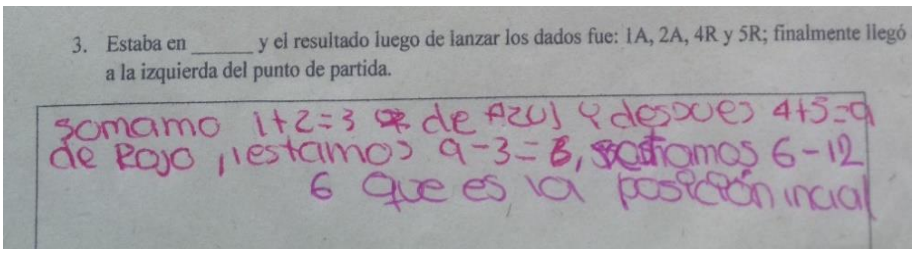
Guía 2 Tarea 3c



POSICION INICIAL	DADOS	POSICIÓN FINAL
1 D	4 A 3 A 5 R	3D
4 I	3 A 6 A 3 R	2 D
10 D	5 R 3 R 4 A	7 D
2 I	2 A 3A 6 R	3 I

Figura 28, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 3c de la guía 2

Guía 3 Tarea 3: Estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue: 1A, 2A, 4R y 5R; finalmente llegó al puesto 12 a la izquierda del punto de partida.


3. Estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue: 1A, 2A, 4R y 5R; finalmente llegó a la izquierda del punto de partida.

somamo 1+2=3 de Azul y despues 4+5=9 de Rojo, restamos 9-3=6, sumamos 6-12 6 que es la posición inicial

Figura 29, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 3 de la guía 3

Prueba final Tarea 7: Juanito estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue 2A, 2A, 5R, 4R; finalmente llegó al puesto 7 a la izquierda del punto inicial.

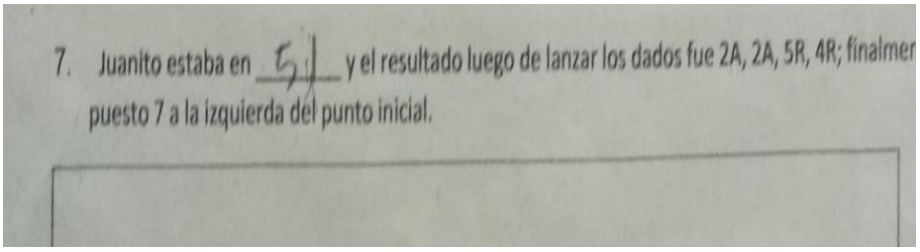

7. Juanito estaba en 5 y el resultado luego de lanzar los dados fue 2A, 2A, 5R, 4R; finalmen
puesto 7 a la izquierda del punto inicial.

Figura 30, Respuesta del estudiante E1 a la pregunta 7 de la prueba final

En la tabla 31 se resumen las respuestas que proporcionó el estudiante E1 a las tareas correspondientes a la estructura 3, donde el punto inicial es mayor que el punto final: Guía 1 tarea 2, guía 2 tarea 3c, guía 3 tarea 3, y tareas 7 de la prueba final.

Tabla 31:

Resumen procedimientos de las tareas 2 de la guía 1, 3c de la guía 2, tarea 3 de la guía 3 y tarea 7 de la prueba final

TAREA	**Código Respuesta**			
	Tarea 2 Guía 1	Tarea 3c guía 2	Tarea 3 guía 3	Tarea 7 Prueba final
Estructura 3 Ei > Ef	R2	R2	R1	R2

Origen: Creación propia

Procedimiento R1: Indica el punto de llegada y la ubicación exacta (izquierda o derecha del punto de partida) de la ficha. “Sumamos 1 + 2 = 3 de azul y después 4 + 5 = 9 de rojo restamos 9 – 3 = 6 restamos 6 – 12 = 6 que es la posición inicial” (ver figura 27).

Procedimiento R2: Indica un punto y ubicación de inicio equivocado “La ficha se encontraba en la posición 1 azul” … “10D” … “5I” (ver figura 28).

En las tres de las cuatro tareas el estudiante E1 da una respuesta incorrecta a la pregunta y no justifica su procedimiento.

Solo en la tarea 3 de la guía 3 el estudiante E1 da una respuesta correcta a la pregunta, y justifica su procedimiento indicando que suma el resultado de los dados azules y el de los dados rojos por aparte, luego resta los dos resultados y este resultado se lo resta al punto final. “Sumamos 1 + 2 = 3 de azul y después 4 + 5 = 9 de rojo restamos 9 – 3 = 6 restamos 6 – 12 = 6 que es la posición inicial” (ver figura 29).

Pese a que el procedimiento desarrollado por el estudiante en esta tarea; muestra que asocia el color de los dados con desplazamientos en sentidos opuestos y con base en esto calcula la posición de la ficha utilizando sumas y restas, deja ver que aún hay dificultad cuando el estado inicial de una operación es mayor que el estado final.

ANEXO 5: ANÁLISIS CUALITATIVO SUJETO E22 NIVEL MEDIO

5.1 análisis de las tareas 1 y 2

Tarea 1: En un cesto A hay 7 naranjas más que en uno B, y en este B hay 6 naranjas menos que en un cesto C. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos A y C. ¿cuál tiene más? ¿cuántas más? Explique cómo hace las cuentas.

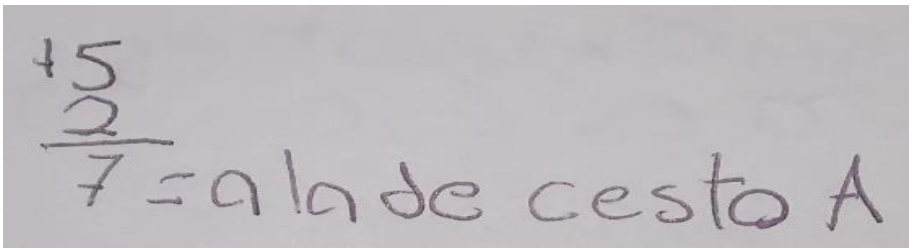


Figura 31, Respuesta del estudiante E22 a la Tarea 1 de la Prueba inicial

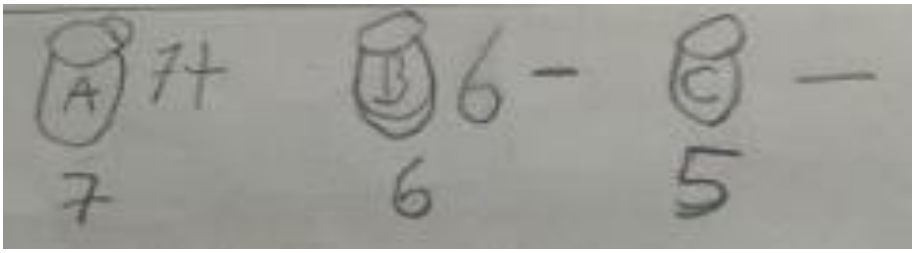


Figura 32, Respuesta del estudiante E22 a la Tarea 1 de la Prueba final

Tarea 2: En un cesto M hay 5 naranjas menos que en un cesto N, y en este N hay 6 naranjas más que en un cesto P. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos M y P. ¿cuál tiene más? ¿cuántas más? Explique cómo hace las cuentas.

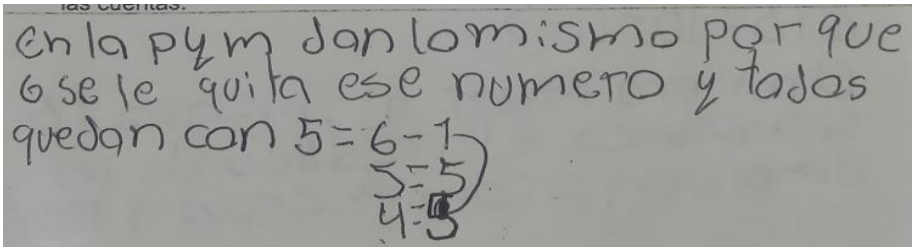


Figura 33, Respuesta del estudiante E22 a la Tarea 2 de la Prueba inicial

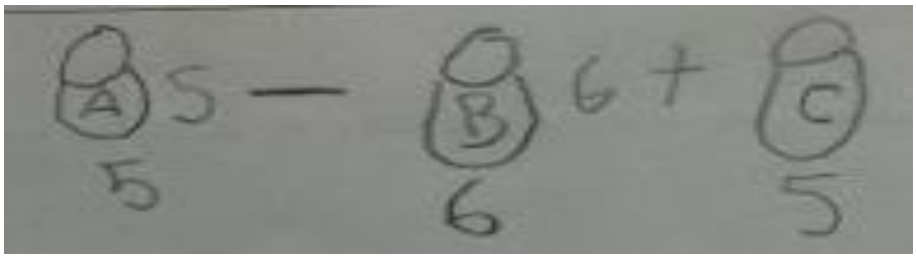


Figura 34, Respuesta del estudiante E22 a la Tarea 2 de la Prueba final

En la tabla 32 se presenta un resumen de las respuestas que ofrece el estudiante E22 a las tareas 1 y2

Tabla 32:

Resumen procedimientos de las tareas 1 y 2

TAREA	Código Procedimiento	
	Prueba inicial	Prueba final
T 1	R6	R1
T 2	R7	R1

Origen: Creación propia

Procedimiento R1: En T1 al número inicial le suma la cantidad indicada y al resultado le resta la cantidad indicada. Luego compara el número inicial con el resultado final. En T2 se da un valor al número inicial y sigue el procedimiento indicado en T1.

Procedimiento R6. Suma dos números (5 y 2)

5 + 2 = 7.

Procedimiento R7. Da una respuesta equivocada, indicando con palabras la relación entre la cantidad de naranjas de los tres cestos, pero no realiza operaciones ni justifica su respuesta.

En la prueba inicial en la tarea 1 a 5+2=7. Y para la tarea 2 acota que “En la P y M dan lo mismo porque 6 se le quita ese número y todos quedan con 5 = 6 - 1 = 5”.

En la entrevista sobre la prueba inicial en la tarea 1, E22 toma los valores de los dos enunciados relaciónales como la cantidad de naranjas que hay en los cestos A y B

E22*: Este tiene 7 [refiriéndose a A], y este tiene 6[refiriéndose a B], y el C tiene menos, entonces tiene 5*
P: *O sea, ¿buscaste cuánto sumar al 5 para que diera 7?*
E22*: Si*

Y parece que inventa un valor para la cantidad de naranjas del cesto C que sea menor a a las naranjas que hay en B (en C hay ____ que B) y como ha asumido que en B hay 6, decide tomar 5. Parece que la suma 5 + 2 obedece a responder a la demanda de que al resolver un problema se calculan operaciones.

El segmento que continúa muestra la dificultad que tiene E22 para comprender los enunciados relacionales (A tiene _____ más que B y C tiene menos ___C)

P: Este es el cesto A y aquí tenemos al cesto B, y aquí tenemos otro cesto C. Leamos ¨[ver imagen 2]. En un cesto A hay 7 naranjas más que en uno B. ¿Quién tiene más?
E22: A P: ¿Cuántas más? E22: 7 P: Es decir, aquí [cesto A] hay 7 más que acá [cesto B]. ¿Podrías dar un ejemplo para que se cumpla esto?
E22: Pues aquí tuviera que haber 6 y aquí 7
P: ¿Y se cumple que aquí [cesto A] hay 7 más que acá [cesto B]?
E22: No.
P: ¿Entonces? E22: Está muy difícil. No entiendo.

Como no logra comprender los enunciados relacionales, termina asignando los valores que dan cuenta de la diferencia de naranjas de los dos cestos que se comparan como la cantidad de naranjas de los cestos A y B.

A pesar de que en la entrevista el entrevistador ayuda a tener otra terna de valores que satisface las condiciones del problema, para E22 no es del todo claro la relación de A y C y menos de que esta siempre será que en el cesto A hay una naranja más que en C.

E22: Pongamos un 9, 3 y 10. Este sigue siendo mayor. Todos dan por 1.
P: ¿Y por qué?
E22: Siempre tiene que haber 6 menos, y al 3 se le suma 7 y da 10. Siempre da la mayor cantidad.
P: ¿Y si miramos estos dos valores (9 y 10) podemos decir algo al respecto?
E: Pues, no sé. No sé.

En la entrevista a propósito de la prueba final en la tarea 1, el estudiante parece reconocer que el resultado no variará, pero desconoce el porqué de ello:

P: Ud. resolvió así el problema que dice que: "En un cesto A hay 7 naranjas más que en uno B, y en este B hay 6 naranjas menos que en un cesto C. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos A y C. ¿cuál tiene más? ¿Cuántas más? Explique cómo hace las cuentas". […]
E22: El A tiene 22, el B 15, y el C 21. A tiene una más que C.
P: Entonces A tiene una más que C. Bien. ¿Y si hacemos que A tenga otro número?
E22: A tiene 20, B 13, y C tiene 19.
P: Ahora, ¿quién es mayor y por cuánto?
E22: A por 1.
P: Bien, y si digo que A es 15.
E22: B tiene 8 y C 14. Otra vez es mayor A por 1.
P: ¿Sabes a qué se debe que el canasto A tenga una más que B?
E22: Porque A tiene 15 y C tiene 14.
P: Claro. Si retomamos el enunciado principal no dice que el canasto A tenga un valor en particular, pero usted le asignó valores.
E22: si
P: ¿Por qué sin importar el valor que le pongamos a A y siguiendo las condiciones, siempre es mayor que C por uno?
E22: No sé.

En el siguiente segmento de la misma entrevista de la prueba final en la tarea 2 E22 muestra que avanza en tanto que es capaz de construir ternas para la cantidad de naranjas de los tres cestos que satisfagan las condiciones del problema, pero muestra que tiene dificultad para ver la necesidad lógica de la relación entre los cestos M y P

E22: Acá se haría lo mismo. 5 menos, entonces ponemos 10 y acá 5. No. Y al otro lado 4.
P: Muy bien. Ahora comparemos a M y P
E22: Este, es más, [Refiriéndose a M] por uno, como el otro.
P: Escribe otro ejemplo.
E22: 7, 13 y 8. Sigue dando más.
P: ¿Por cuánto?
E22: Por uno.
P: ¿Y se cumple siempre?
E22 No. Para siempre no.
P: ¡Hagamos otro ejemplo a ver si se cumple! ¿Qué tal si digo que acá hay 10? ¿Será que se cumple?
E22 Toca ver. Acá hay 15, y acá 9…
P: ¿Y se cumple?
E: Todos [refiriéndose a los ejemplos anteriores dados por él] llevan por uno.

De lo anterior podemos afirmar que el estudiante reconoce que:

a) este segundo problema es similar al anterior.

b) Aunque en la prueba termina tomando los valores de los enunciados relacionales como la cantidad de las naranjas que hay en los dos cestos (el primero y el segundo), en la entrevista con ayuda del entrevistador logra construir ternas correctas que satisfacen los enunciados del problema.

c) aunque a partir de los ejemplos de terna, en algunos casos logra constatar que la diferencia en el primer cesto y el tercero es 1, no logra generalizar y menos tener una explicación propia de la necesidad de este resultado.

En la prueba final en la tarea 1, el estudiante ofrece respuestas en las que nuevamente toma los valores de los enunciados relacionales como la cantidad de naranjas de los cestos A y B, sin embargo, en la entrevista muestra que puede dar ejemplos correctos de ternas y las utiliza correctamente para comparar las cantidades de los cestos primero y tercero

E22: El A tiene 22, el B 15, y el C 21. A tiene una más que C.
P: Entonces A tiene una más que C. Bien. ¿Y si hacemos que A tenga otro número?
E22: A tiene 20, B 13, y C tiene 19.
P: Ahora, ¿quién es mayor y por cuánto?
E22: A por 1.
P: Bien, y si digo que A es 15.
E22: B tiene 8 y C 14. Otra vez es mayor A por 1.
P: ¿Sabes a qué se debe que el canasto A tenga una más que B?
E22: Porque A tiene 15 y C tiene 14.
P: Claro. Si retomamos el enunciado principal no dice que el canasto A tenga un valor en particular, pero usted le asignó valores.
E22: si
P: ¿Por qué sin importar el valor que le pongamos a A y siguiendo las condiciones, siempre es mayor que C por uno?
E22: No sé.

Para la tarea 2 en la prueba final el estudiante entiende que el método a seguir es el de asignar valores que satisfagan la condición, pero continúa desconociendo el porqué de la diferencia, por ello se limita a sólo ofrecer ejemplos que cumplen los requisitos de comparación.

E1: Yo había dicho eso [refiriéndose a la respuesta dada en la prueba]. Pero si lo hago como el anterior.
P: Claro.
E22: M tiene 14, N tiene 19, y P 13. M tiene una más que P.
P: ¿Y si le pones otros valores siguiendo la instrucción?
E22: M tiene 16, N tiene 21, y P 15. M tiene una más que P.
P: ¿Y por qué sigue pasando lo mismo? ¿Por qué así le cambie los valores sigue siendo mayor por uno?
E22: Hummm, no sé.

Resumen del caso E22, tareas 1 y 2. El estudiante pasa de una forma de proceder R6 y R7 a una R1. Sin embargo, es de aclararse que el procedimiento R1 de la prueba final no lo sigue el estudiante de primera intención al contestar la prueba, ese surge a realizar la entrevista. En la prueba inicial toma los valores de los enunciados relacionales como si fueran las cantidades de los dos primeros cestos (A y B en la Tarea 1 y M y N en la tarea 2), para el tercer cesto (C y P) toma un valor que sea menor que el del segundo cesto. De primera intención no entiende los enunciados relacionales, no logra poner ejemplo de un par de valores que los satisfagan. En la entrevista final, es capaz de poner ejemplos de diferentes ternas y usarlos para establecer la relación entre el primer y tercer cesto, sin embargo, aunque debido a los ejemplos particulares acepta que la diferencia del número de naranjas entre el primer cesto y el tercero es la misma para diferentes ternas, no lo generalizar y menos logra explicarse por qué.

5.2 Análisis de las tareas 3 y 4

Tarea 3: Si a “16” se le suma 8, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial “16” o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta.

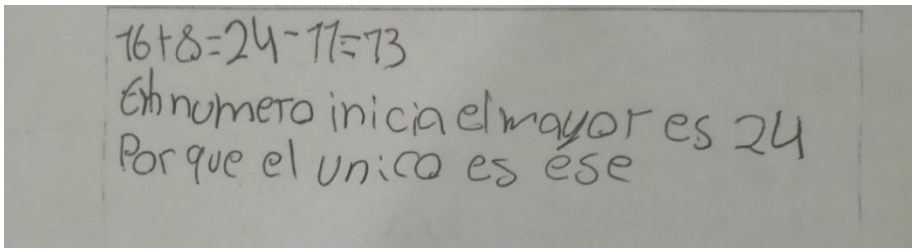


Figura 35, Respuesta del estudiante E22 a la Tarea 3 de la Prueba inicial

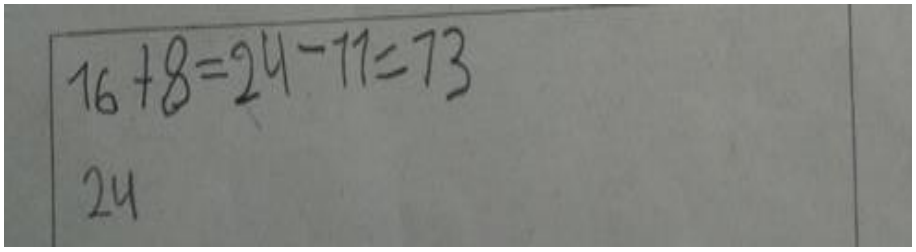


Figura 36, Respuesta del estudiante E22 a la Tarea 3 de la Prueba final

Tarea 4: A un número desconocido primero se le suma 8, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial desconocido o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta.

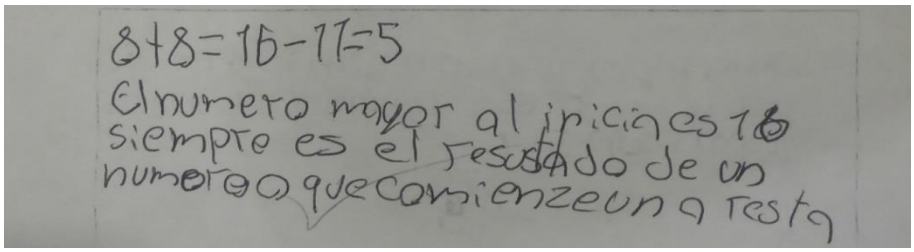


Figura 37, Respuesta del estudiante E22 a la Tarea 4 de la Prueba inicial

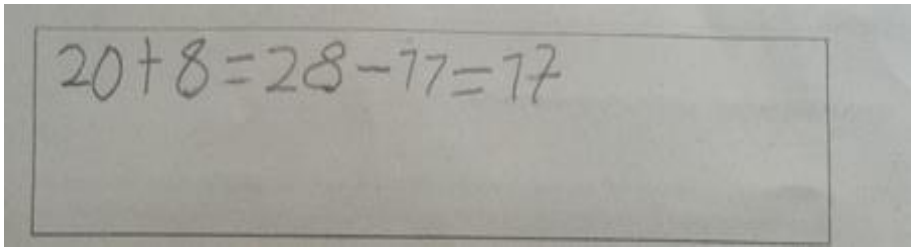


Figura 38, Respuesta del estudiante E22 a la Tarea 4 de la Prueba final

En la tabla 33 se resumen las respuestas a las dos tareas

Tabla 33:

Resumen procedimientos de las tareas 3 y 4

TAREA	Código Procedimiento	
	Prueba inicial	Prueba final
T 3	R1	R1
T 4	R1	R1

Origen: Creación propia

Procedimiento R1: Al número inicial (16), le suma la cantidad indicada (8) y al resultado le resta la cantidad indicada (11). Luego compara el número inicial con el resultado final.

16 + 8 = 24

24 – 11 = 13

En ambas tareas E22 sigue el mismo procedimiento tanto en la prueba inicial como en la final. En la prueba inicial a propósito de la tarea 3 resuelve así:

E22: Si a 16 se le suma 8 da 24, y luego se le resta 11 da 13, se tiene el resultado final.
P: Ojo. ¿Quién es mayor, el inicial o el final?
E22: Este, el inicial.
P: ¿Por cuánto?
E22: por 3
P: ¿Si cambiamos el 16 por otro número cualquiera daría la misma diferencia? Con la misma condición.
E22: Vamos a ver. Pongamos un 17. 17 más 8 daría 25 menos 11 daría 14, noo, tampoco.
P: Miremos el primero y el resultado. ¿Quién es mayor? ¿Y por cuánto?
E22: El inicial por 3.
P: Y en el otro, ¿Cuánto le dio?
E22: Mayor el inicial, por 3.
P: ¿Será que se cumple si ponemos otro número diferente?
E22: No.
P: Dale, cualquiera.
E22: 20. 8 igual a 28, se le resta 11 igual 17. Y por 3. ¿Da lo mismo y siempre queda por 3?
P: ¿Y por qué?
E22: Si cambiamos esto. [Sugirió cambiar el 8 de la condición] ¿Puedo cambiarlo?
P: No te olvides de la condición: le sumas 8 y le restas 11.
E22: Si, siempre va a quedar 3
P: ¿Por qué siempre 3?
E22: Como este [refiriéndose al 16] comienza mayor que los demás…

Si bien al final el estudiante afirma que siempre la diferencia da 3, no evidencia la comprensión del caso pues al principio se veía en la necesidad de buscar números, luego a pesar de la diferencia igual dudaba. Además, el argumento que presenta al final no corresponde a la respuesta "sí, siempre va a dar 3". Por otro lado, en la prueba final acota así:

P1: Así resolviste el tercer punto que dice: "Si a "16" se le suma 8, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial "16" o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta".
E22: 16 es mayor por 3.
P1: ¿Y si cambio el 16 por un 10?
E22: Da 7.
P1: Ahora, ¿cuál es mayor y por cuánto?
E22: 10 es mayor que 7 por 3.
P1: Y si lo cambio ahora por 20, ¿quién es mayor?
E22: El 20
P1: ¿Por qué?
E22. Porque el inicial es mayor que el final.
P1: ¿Por qué crees que pasa eso?
E22: no sé tampoco.

Aquí se le nota más fluidez a la hora de asignar valores que cumplen la condición. También tiene seguridad de que la diferencia será 3 si se cambia el número inicial 16, a diferencia de la prueba inicial en la que dudaba o no mostraba señales de seguridad cuando se veía en la necesidad de asignar valores y realizar operaciones.

Para la tarea 4 en la prueba inicial, resuelve de manera similar a la tarea 3. Parece que encuentra similitud en su forma y toma la decisión de asignar un valor particular al número desconocido, pero nuevamente afirma desconocer el porqué de la misma diferencia. De hecho, le sorprende el resultado.

E22: Puedo poner cualquier número,11 + 8 da, 19, menos 11 da 8. Nooo, por 3, sí, pero ¿por qué? Muy raro. No sé.
P: Te atreverías a concluir algo.
E22: No. No sé.

En la prueba final, en la tarea 4, acota explícitamente que resolverá de igual manera al anterior, pero no supera conocer el porqué de la constancia de la diferencia

Resumen del caso E22. Tareas 3 y 4. Las tareas 3 y 4 son resueltas mediante el procedimiento R1 consistente en comparar de manera directa los valores inicial y final.

A partir de las entrevistas parece razonable afirmar que E1 no ha accedido a la composición de operadores, de ahí que en la tarea 3 calcule el valor final para después hacer la comparación y, en la tarea 4, prefiera dar un valor al Ei desconocido, para proceder como en la tarea 3.Parece justo también afirmar a partir de las entrevistas que E22 ha experimentado un avance positivo respecto de la composición de operadores, pues finaliza dando a entender que sin importar el cambio que se haga a los valores iniciales, la diferencia será la misma entre inicial y final, a pesar de no comprender que la solución a estos problemas yace en los valores que no se deben modificar (los operadores).

5.3 Análisis de las guías del juego de la ruta

5.3.1 Análisis de respuestas correspondientes a las tareas de estructura 1. Directos

Para este caso se da un estado inicial, se aplican dos o tres variables (según la guía) y se pide al estudiante que encuentre el estado final.

Guía 1 Tarea 1: Si una ficha se encuentra a 4 espacios a la derecha del punto de partida, y los dados muestran: azul 2 y rojo 6, ¿a qué posición debería llegar la ficha?

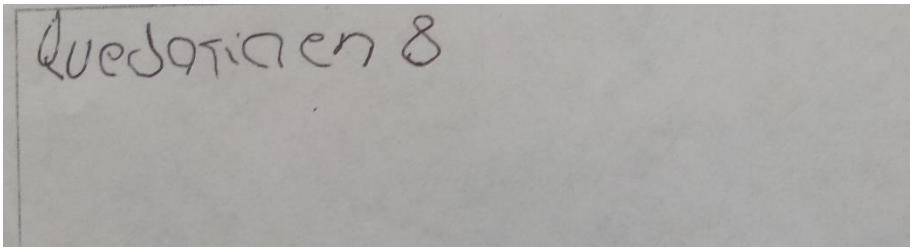
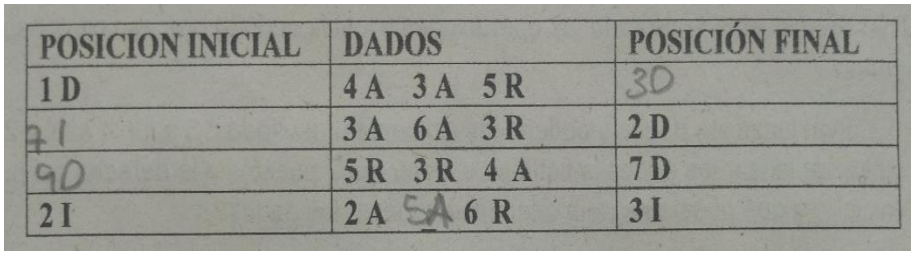


Figura 39, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 1 de la guía 1

Guía 2 Tarea1: Juan lanza los dados y obtiene los siguientes resultados: 3 azul, 4 azul y 2 rojo. Si antes de lanzar los dados la ficha se encontraba 2 puestos a la derecha del punto inicial, ¿a qué puesto llegará después de lanzar los dados?

Figura 40, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 1 de la guía 2

Guía 2 Tarea 3a



POSICION INICIAL	DADOS	POSICIÓN FINAL
1 D	4 A 3 A 5 R	3D
7 I	3 A 6 A 3 R	2 D
9D	5 R 3 R 4 A	7 D
2 I	2 A 5A 6 R	3 I

Figura 41, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 3A de la guía 2

En la tabla 34 se resumen las respuestas que proporcionó el estudiante E22 a las tareas 1de la guía 1 y 1 y 3A de la guía 2

Tabla 34:

Resumen de procedimientos de las tareas 1de la guía 1 y 1 y 3A de la guía 2

TAREA	Código Respuesta		
	Tarea 1 guía 1	Tarea 1 guía 2	Tarea 3A guía 2
Estructura 1	R2	R2	R1

Origen: Creación propia

Procedimiento R2: Indica un punto y ubicación de llegada equivocado “Quedaría en ocho” (ver figura 39).

Procedimiento R1: Indica como respuesta el punto de llegada y la ubicación exacta (izquierda o derecha del punto de partida) de la ficha. "...Quedaría en 7Azul" …" (ver figura 41).

En las tareas1 de la guía 1 y 1 de la guía 2 el estudiante E22 da una respuesta incorrecta a la pregunta. Mientras en la guía 1 solo indica "quedaría en ocho" en las tareas de la guía 2 toma como base el juego de la ruta y realiza una simulación de los movimientos indicados, ver figura 40.

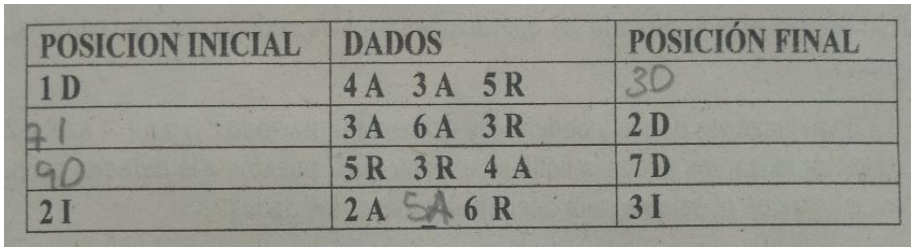
Pese a que la repuesta indicada por el estudiante E22 es correcta en algunos casos, no se nota un avance en el procedimiento desarrollado por el estudiante; mientras en la guía 1, no justifica su respuesta, en las tareas de la guía 2 hace una simulación de los movimientos para llegar al resultado.

5.3.2 Análisis de respuestas correspondientes a la estructura 2

Para este análisis dividimos la tarea en dos partes a) cuando el estado inicial se encuentra a la izquierda del estado final y b) cuando el estado inicial se encuentra a la derecha del estado final.

5.3.2.1 Estado inicial se encuentra a la izquierda del estado final

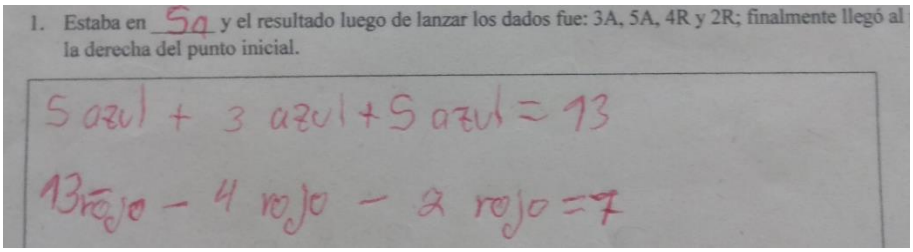
Guía 2 Tarea 3B



POSICION INICIAL	DADOS	POSICIÓN FINAL
1 D	4 A 3 A 5 R	3D
71	3 A 6 A 3 R	2 D
90	5 R 3 R 4 A	7 D
2 I	2 A 5A 6 R	3 I

Figura 42, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 3b de la guía 2

Guía 3 Tarea1: Estaba en ___ y el resultado luego de lanzar los dados fue: 3A, 5A, 4R, y 2R; finalmente llegó al puesto 7 a la derecha del punto inicial.

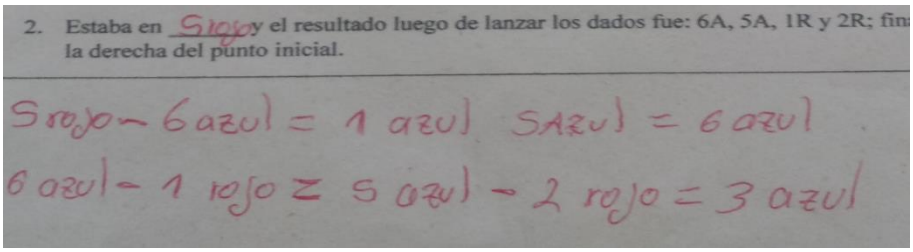

1. Estaba en 5A y el resultado luego de lanzar los dados fue: 3A, 5A, 4R y 2R; finalmente llegó al la derecha del punto inicial.

5 azul + 3 azul + 5 azul = 13

13 rojo − 4 rojo − 2 rojo = 7

Figura 43, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 1 de la guía 3

Guía 3 Tarea 2: Estaba en ___ y el resultado luego de lanzar los dados fue:6A, 5A, 1R, y 2R; finalmente llegó al puesto 3 a la derecha del punto inicial.


2. Estaba en 5 rojo y el resultado luego de lanzar los dados fue: 6A, 5A, 1R y 2R; fin la derecha del punto inicial.

5 rojo − 6 azul = 1 azul 5 azul = 6 azul

6 azul − 1 rojo = 5 azul − 2 rojo = 3 azul

Figura 44, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 2 de la guía 3

Prueba final Tarea 5: Juanito estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue 5A, 3A, 3R, 2R; finalmente llegó al puesto 9 a la derecha del punto inicial.

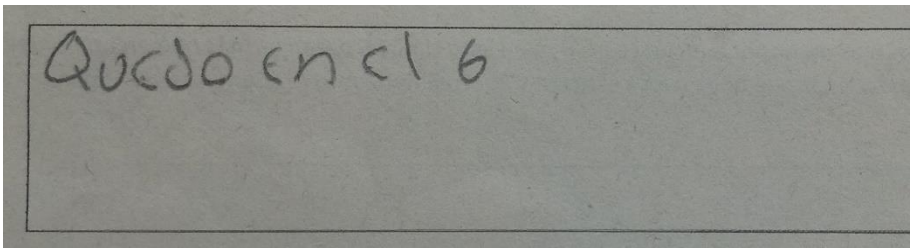

Quedo en el 6

Figura 45, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 5 de la prueba final

Prueba final Tarea 6: Juanito estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue 5A, 6A, 3R, 1R; finalmente llegó al puesto 2 a la derecha del punto inicial.

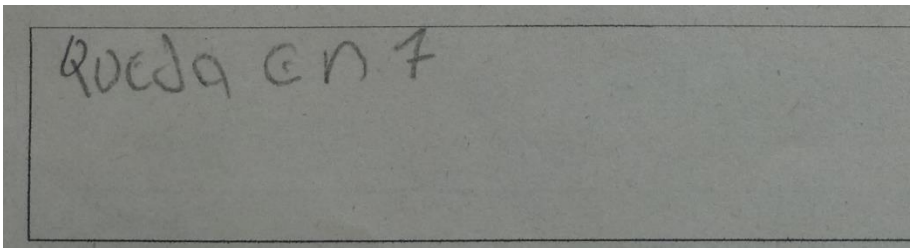


Figura 46, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 6 de la prueba final

En la tabla 35 se resumen las respuestas que proporcionó el estudiante E22 a las tareas correspondientes a la estructura 2, donde el punto inicial se encuentra a la izquierda del punto final: Guía 2 tarea 3c, guía 3 tarea 1, guía 3 tarea 2, y tareas 5 y 6 de la prueba final.

Tabla 35:

Resumen procedimientos de las tareas 3c de la guía 2, 1 y 2 de la guía 3 y 5 y 6 de la prueba final

TAREA	**Código Respuesta**				
	Tarea 3c Guía 2	Tarea 1 guía 3	Tarea 2 guía 3	Tarea 5 Prueba final	Tarea 6 Prueba final
Estructura 3 Ei < Ef	R2	R1	R1	R2	R2

Origen: Creación propia

Procedimiento R2: Indica un punto y ubicación de llegada equivocado “7I” (ver figura 32).

Procedimiento R1: Indica el punto de llegada y la ubicación exacta (izquierda o derecha del punto de partida) de la ficha. Describe su procedimiento indicando: “5A + 3A + 5A = 13, 13rojo – 4Rojo – 2Rojo = 7” (ver figura 33).

En tres de las cinco tareas el estudiante E22 da una respuesta incorrecta a la pregunta y no justifica su repuesta; mientras que en las tareas de la guía 3 Da una respuesta correcta y realiza un procedimiento similar, en la tarea 1 escribe: “5A + 3A + 5A = 13”…”13rojo – 4Rojo – 2Rojo = 7” (ver figura 13), en la tarea 2 escribe: “5R – 6A – 5A = 6Azul” … “6Azul – 1Rojo = 5Azul – 2Rojo = 3 azul” (ver figura 34); donde toma un punto inicial, y le suma o resta el resultado de los dados azules y al resultado le suma el de los dados rojos.

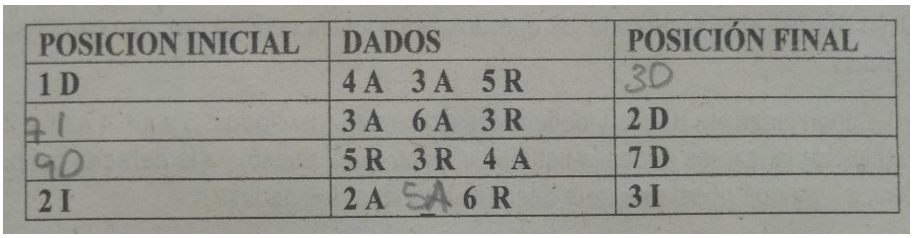
Pese a que el estudiante E22 parece tener claro que es necesario componer los desplazamientos en el mismo sentido asociando el color de los dados con desplazamientos en sentidos opuestos para obtener resultados parciales, no ve la reversibilidad que existe para llegar del punto final al punto inicial invirtiendo el sentido de los desplazamientos dados, por lo que se hace necesario tener un punto de partida. Hecho que se resuelve probando con un posible valor y a partir de ahí se aplican los desplazamientos.

5.3.2.2 Estado inicial se encuentra a la derecha del estado final.

Guía 1 Tarea 2: Se lanzan los dados y se obtiene 2 azul, rojo 6, y la ficha finaliza en 3 azul. ¿En dónde se encontraba la ficha antes de lanzar los dados?

Figura 47, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 2 de la guía 1

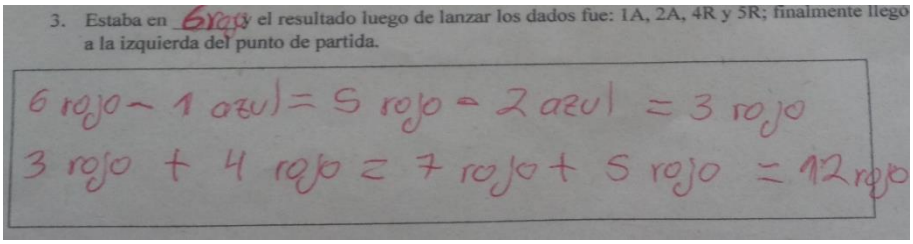
Guía 2 Tarea 3c



POSICION INICIAL	DADOS	POSICIÓN FINAL
1 D	4 A 3 A 5 R	3D
7 I	3 A 6 A 3 R	2 D
9D	5 R 3 R 4 A	7 D
2 I	2 A 5A 6 R	3 I

Figura 48, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 3c de la guía 2

Guía 3 Tarea 3: Estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue: 1A, 2A, 4R y 5R; finalmente llegó al puesto 12 a la izquierda del punto de partida.


3. Estaba en 6rojo y el resultado luego de lanzar los dados fue: 1A, 2A, 4R y 5R; finalmente llego a la izquierda del punto de partida.

6 rojo – 1 azul = 5 rojo – 2 azul = 3 rojo
3 rojo + 4 rojo = 7 rojo + 5 rojo = 12 rojo

Figura 49, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 3 de la guía 3

Prueba final Tarea 7: Juanito estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue 2A, 2A, 5R, 4R; finalmente llegó al puesto 7 a la izquierda del punto inicial.

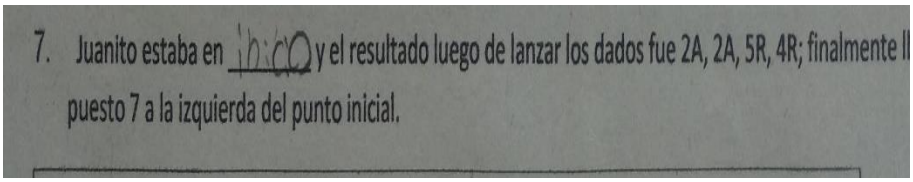

7. Juanito estaba en inicio y el resultado luego de lanzar los dados fue 2A, 2A, 5R, 4R; finalmente ll
puesto 7 a la izquierda del punto inicial.

Figura 50, Respuesta del estudiante E22 a la pregunta 7 de la prueba final

En la tabla 36 se resumen las respuestas que proporcionó el estudiante E1 a las tareas correspondientes a la estructura 3, donde el punto inicial es mayor que el punto final: Guía 1 tarea 2, guía 2 tarea 3c, guía 3 tarea 3, y tareas 7 de la prueba final.

Tabla 36:

Resumen de procedimientos de las tareas 2 de la guía 1, 3c de la guía 2, tarea 3 de la guía 3 y tarea 7 de la prueba final

TAREA	**Código Respuesta**			
	Tarea 2 Guía 1	Tarea 3c guía 2	Tarea 3 guía 3	Tarea 7 Prueba final
Estructura 3 Ei > Ef	R2	R2	R1	R2

Origen: Creación propia

Procedimiento R1: Indica el punto de llegada y la ubicación exacta (izquierda o derecha del punto de partida) de la ficha. “6R – 1Az = 5R – 2Az = 3 Rojo” … “3Rojo + 4 Rojo = 7 Rojo + 5 Rojo = 12 Rojo” (ver figura 19).

Procedimiento R2: Indica un punto y ubicación de inicio equivocado “queda 5” (ver figura 47).

En las tres de las cuatro tareas el estudiante E22 da una respuesta incorrecta a la pregunta y no justifica su procedimiento. escribiendo: “6R – 1Az = 5R – 2Az = 3 Rojo” … “3Rojo + 4 Rojo = 7 Rojo + 5 Rojo = 12 Rojo” (ver figura 49), donde toma un punto inicial, y le suma o resta el resultado de los dados azules y al resultado le suma el de los dados rojos.

Pese a que el procedimiento desarrollado por el estudiante en esta tarea; muestra que asocia el color de los dados con desplazamientos en sentidos opuestos y con base en esto calcula la posición de la ficha utilizando sumas y restas, deja ver que aún hay dificultad cuando el estado inicial de una operación es mayor que el estado final.

ANEXO 6: ANÁLISIS CUALITATIVO SUJETO E20 NIVEL BAJO

6.1 Análisis de las tareas 1 y 2

Tarea 1: En un cesto A hay 7 naranjas más que en uno B, y en este B hay 6 naranjas menos que en un cesto C. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos A y C. ¿cuál tiene más? ¿cuántas más? Explique cómo hace las cuentas.

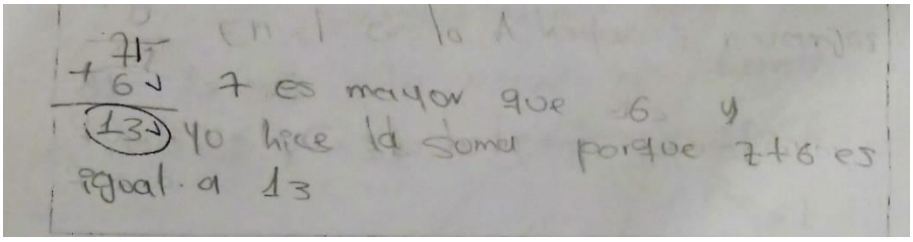


Figura 51, Respuesta del estudiante E20 a la tarea 1 de la prueba inicial

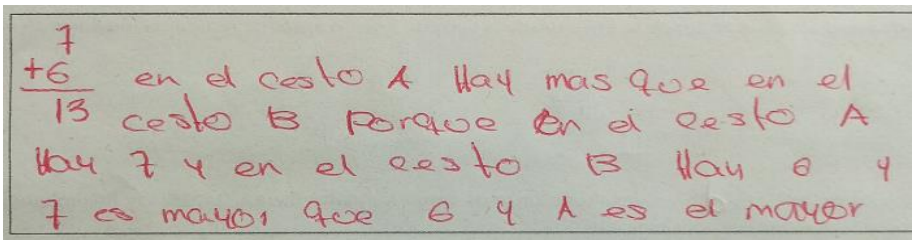


Figura 52, Respuesta del estudiante E20 a la tarea 1 de la prueba final

Tarea 2: En un cesto M hay 5 naranjas menos que en un cesto N, y en este N hay 6 naranjas más que en un cesto P. Compare la cantidad de naranjas que hay en los cestos M y P. ¿cuál tiene más? ¿cuántas más? Explique cómo hace las cuentas.

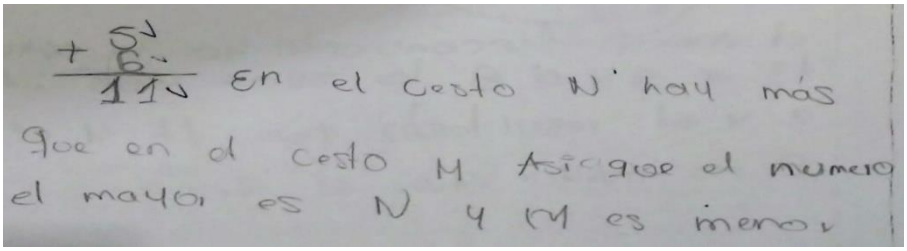


Figura 53, Respuesta del estudiante E20 a la tarea 2 de la prueba inicial

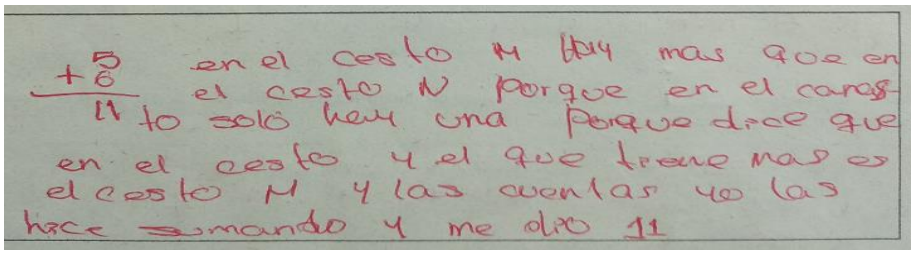


Figura 37, Respuesta del estudiante E20 a la tarea 2 de la prueba final

En la tabla No 54 se resumen las respuestas que da el estudiante E20 a las dos tareas.

Tabla 37:

Resumen procedimientos de las tareas 1 y 2

TAREA	Código Procedimiento	
	Prueba inicial	Prueba final
T 1	R4	R4
T 2	R4	R4

Origen: Creación propia

Procedimiento R4. Suma las cantidades que aparecen en el enunciado (7 y 6), (parece que asume que esta es la cantidad de naranjas que hay en los cestos A y B).

7+ 6 = 13

El estudiante E20 suma las cantidades que aparecen en los enunciados (en la tarea 1 ejecuta 7 + 6 y en la tarea 2 suma 5 + 6). Parece que asume estos valores relacionales como la cantidad de naranjas que hay en los cestos.

En la prueba inicial el estudiante E20 resuelve las tareas 1 y 2 incorrectamente. En la tarea 1 dice “7 es mayor que 6 y yo hice la suma porque 7+6=13”. Para la tarea 2 acota que: *“En el cesto N hay más que en el cesto M así que el número mayor es N y M es menor”.*

El siguiente segmento de la entrevista sobre la forma como resolvió la tarea 1 de la prueba inicial, ilustra que, aunque el estudiante reconoce que los enunciados dicen “…7 más que …” y

“6 menos que …”, termina dejando de lado su carácter relacional y los asimila a la cantidad de naranjas de los canastos

E20*: En la B hay menos, y en la A hay más.*
P1: *en la B hay menos y en la A hay más. ¿Por qué sabe que en la B hay menos?*
E20*: porque hay 6.*
P1*: ¿Porque hay 6 qué? ¡Ayúdanos leyendo si puedes por favor!*
E20*: hay 6 naranjas menos.*
P1: *¿Menos que en dónde?*
E20*: Menos que en la en la A, en la A hay más naranjas*
P1: *En la A hay más naranjas, Bueno listo. Usted hizo aquí unas cosas. Ayúdenos a entender esto que escribió Cómo fue. Trate de recordar con estas noticas que hay acá, qué fue lo que pensó en ese momento cuando contestó. ¿Sí?*
E20*: Pues una suma*
P1*: A ver como hizo, explíquenos eso*
E20*: 7+6 son 13*
P1: *¿Y ese 13 que quiere decir?*
E20*: 13 naranjas*
P1*: ¿Sí, son 13 naranjas, de dónde?, ¿qué había en dónde?, ¿no? ¡Bueno!... ¿este 7 que es?*
E20*: **7 naranjas más***
P1*: Si, las 7 naranjas más, pero a ver, yo digo… las 7 naranjas más que hay en la canasta con relación a la caja… ¿Este 7 que es?, dígamelo más completo. ¡¿Siete naranjas más que qué, de quien con quién?!!... de acuerdo con lo que está aquí*
E20*: **7 naranjas del cesto A***
P1: *¿O sea, esas eran las que había en el cesto A? ¿7 naranjas?*
E20*: Sí*
P1: ***¿Y éste 6 que es?***
E20***: Del cesto de las 6 naranjas menos***
P1: ***¿cuántas hay en el B? ¿Sabe?***
E20: ***6***
P1: *¿sabe cuántas hay en C?*
E20*: **¡no hay ninguna!***
P1*: ¿No hay ninguna? ¡O no sabe!... ¿no hay ninguna?... entonces voy a poner ninguna, cero, ¿sí?... ¿es lo que me quiere decir? ¿Y cómo supo que era cero?, ¿que no había ninguna?*
E20*: Porque en cesto hay 7 naranjas más que en un cesto B en el cesto B hay 6 naranjas que en el cesto C*
P1: Hummm, ¿y por qué llego a la conclusión que no había naranjas en C?
E20: *Porque no dice cuántas hay*

Aunque al comienzo afirma que el 7 de la suma 7 + 6 = 13, es “7 naranjas más”, termina diciendo “7 naranjas del cesto A” y hace algo semejante para explicar el segundo sumando (6). Como no hay valor para asignar al cesto C, lo resuelve diciendo que en C no hay ninguna [naranjas].

En la prueba final el estudiante también resuelve las tareas 1 y 2 incorrectamente, en ambas tareas vuelve a ejecutar sumas con los valores del enunciado. En la tarea 1 la respuesta es más explícita; “en el cesto A hay más que en el cesto B porque en el cesto A hay 7 y en el cesto B hay 6 y 7 es mayor que 6 y A es el mayor” (ver figura 2); algo semejante contesta en la tarea 2: “en el cesto N hay más que en el cesto M. Así que el número mayor es N y M es menor”.

Parece correcto afirmar que en ambas tareas en las dos pruebas (inicial y fina) Y se evidencia que el estudiante no establece las diferencias entre las cantidades en los cestos, simplemente asume los valores relacionales como si fueran las cantidades de que contiene cada naranja. En el siguiente segmento de la entrevista sobre la prueba final se repite a lo que se ilustró arriba en la entrevista inicial

P1: *Eso es lo que nos están preguntando, Cuéntenos que fue lo que hizo*
E20: *una suma*
P1: *¿Qué sumó?*
E20*: El 5 con el 6*
P1: *¿Este 5 qué es?*
E20: *las 5 naranjas menos*
P1: *¿Y este 6 que es?*
E20*: Las 6 naranjas más*
P1*: entonces le dio…*
E20*: 11*
P1: *¿Y ese 11 que es?*
E20*: el resultado de la suma*

Algo importante que puede afirmarse tanto de las respuestas en las dos tareas de las dos pruebas como de las entrevistas es que en las cuatro situaciones el estudiante ofrece la respuesta relacionando las cantidades de los dos primeros cesto (A y B y N y M) y NO de cesto primero al tercero, el estudiante hace caso omiso de que la relación solicitada es entre el primer cesto y el tercero.

Resumen caso del caso E20, tareas 1 y 2: El estudiante conserva su modo de resolver las tareas. Se limita a sumar los valores de los enunciados relacionales entre las cantidades de los cestos, hace caso omiso del sentido que acompaña este valor (---es más ---, es menos ---), simplemente los toma como la cantidad que contiene el primer y segundo cesto. En las cuatro respuestas se limita a comparar las cantidades de los cestos A y B y hace caso omiso de que la pregunta pide la comparación con los cestos A y C. Por ello, además de decir que se niega a la comprensión de la expresión "más" como elemento de relación; no se podría hablar de composición de relaciones pues por el momento el estudiante no da cuenta de la comprensión de los elementos del problema.

6.2 Análisis de las tareas 3 y 4

Tarea 3: Si a "16" se le suma 8, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial "16" o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta

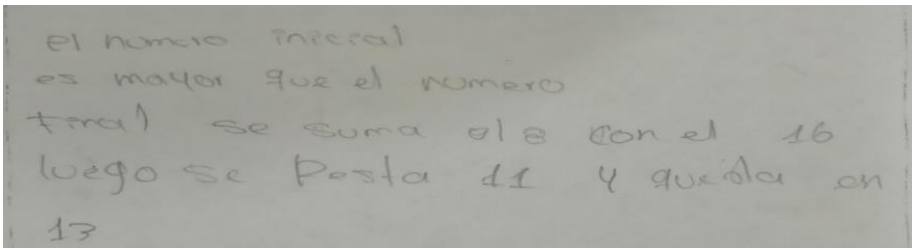

el numero inicial
es mayor que el numero
final se suma el 8 con el 16
luego se Resta 11 y queda en
13

Figura 55, Respuesta del estudiante E20 a la tarea 3 de la prueba inicial

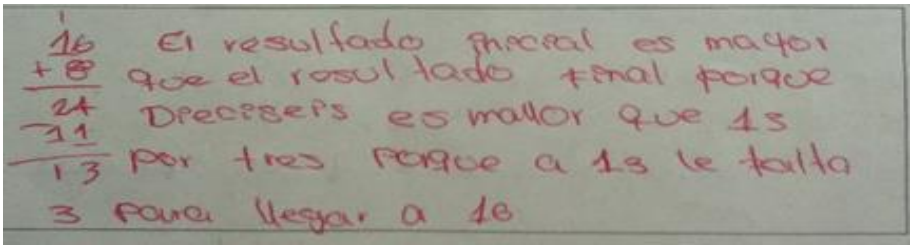

16 El resultado inicial es mayor
+8 que el resultado final porque
24 Dieciseis es mallor que 13
-11 por tres porque a 13 le falta
13 3 para llegar a 16

Figura 56: Respuesta del estudiante E20 a la tarea 3 de la prueba final

Tarea 4: A un número desconocido primero se le suma 8, luego se le resta 11 y se obtiene un resultado final. ¿Cuál es mayor el número inicial desconocido o el resultado final? ¿Cuánto mayor o cuánto menor? Explique su respuesta.

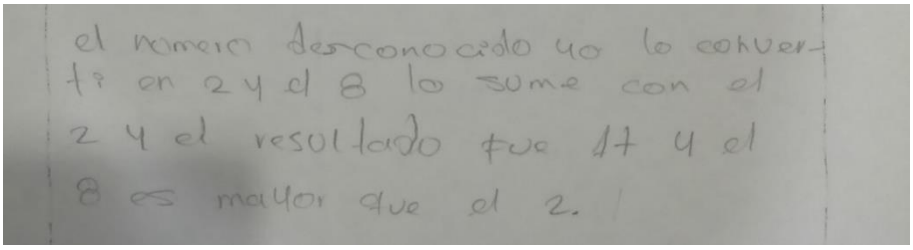


Figura 57, Respuesta del estudiante E20 a la tarea 4 de la prueba inicial

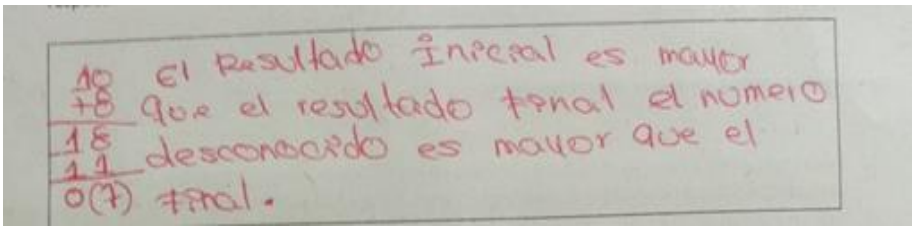


Figura 58, Respuesta del estudiante E20 a la tarea 4 de la prueba final

En la tabla 38 se resumen las respuestas a las dos tareas

Tabla 38:

Resumen procedimientos de las tareas 3 y 4

TAREA	Código Procedimiento	
	Prueba inicial	Prueba final
T 3	R1	R1
T 4	R7	R1

Origen: Creación propia

Procedimiento R1: Al número inicial (16), le suma la cantidad indicada (8) y al resultado le resta la cantidad indicada (11). Luego compara el número inicial con el resultado final.

16 + 8 = 24

24 – 11 = 13

En la T3 el estudiante E1 sigue el mismo procedimiento tanto en la prueba inicial como en la final. Es decir, reproduce las operaciones de suma y resta para hacer la comparación, sólo que esta se hace más completa en la final pues muestra la diferencia numérica entre el primero y último términos. Para T4, inicialmente E20 asigna un valor para el término inicial desconocido y se hacen las comparaciones, pero en la inicial no se comparan el primero y último términos.

Pareciera que obedece a incomprensión de la tarea que invita a comparar los términos primero y último, pero la entrevista sugiere que se operó de manera conveniente así pues al sumar el número desconocido 2 con 8 y luego restar 11 podría resultar en una inconsistencia para el estudiante, pues pudo asumir que de 10 no se puede restar 11, así que decidió comparar 2 cantidades que parecen más simples, es decir el 2 desconocido y el 8 del enunciado, pero de esto se tiene poca información, sólo lo mostrado en la prueba inicial. Por ello pareciera que cuando se le aborda al respecto, él prefiere callar:

E20: El número desconocido es 2, y el 8 lo sumo con 2 y el resultado fue 17
P1: ¿puso 2 aquí en número desconocido? ¿Si?... siga. ¿Cuánto debe salir de ahí?
E20: 10
P1: ¿y después cuánto debe salir de aquí?
E20: [silencio]
P1: Tomemos otro ejemplo. Ponga como número desconocido 15; ¿cómo sería?
E20: 15+8
P1: 23, muy bien
E20: Menos 11…. 12
P1: ¿Qué contesta?
E20: El número inicial es mayor y el número final es menor
P1: ¿Cuánto?
E20: 3

Por otro lado, y para la T3 pareciera no hay dificultad para hacer la comparación de primero y últimos términos luego de operar según dicta el enunciado. Para ello se recupera lo mostrado en la entrevista inicial:

P1: Vamos ahora a ver esto, le recuerdo que decía: A un número 16 se le suma 8, y luego se le resta 11 y obtenemos un resultado, lo que queríamos era que nos comparara este valor inicial con el resultado, si era mayor este o menor y cuanto menor.
E20: Una suma que da 24 y se le resta 11
P1: ¿de dónde salió el 24?
E20: Del 16 se le suma 8 y luego se le resta 11, entonces acá es 3 y acá es 1; el resultado es 13
P1: ¿pero ¿qué era lo que preguntaba el problema?
E20: Que cual era el número mayor, el número inicial o el resultado final
P1: ¿Entonces qué contesta usted?
E20: Que el número inicial es mayor que el número final
P1: ¿Cual es inicial aquí?
E20: El 16
P1: ¿Y cuál es el final?
E20: el 13
P1: y le preguntaban cuánto mayor, cuánto menor. ¿Sí?... ¿cuánto mayor?
E20: 16
P1: No, el 16 es mayor que el 13… pero en cuántas unidades, ¿cuántos números mayor es 16 que 13?
E20: 3

Para la tarea 4, asigna un valor al término desconocido siguiendo la dinámica de la tarea 3, hace la comparación, pero evidencia con claridad el conflicto que tiene para determinar que lo que sucede con un valor particular necesariamente tiene que suceder con cualquier valor del estado inicial. De hecho, pareciera no comprender que independiente del valor asignado, la diferencia entre primero y últimos se mantiene. La entrevista en la prueba inicial arroja:

P1: dígame completa la frase… el número inicial….
E20: El número inicial es mayor que 12, porque a 12 le faltan 3
P1: ¿Para ser?
E20: para ser 15
P1: Si cambiara este número, y yo le dijera por ejemplo 25 y comparáramos el inicial con el final, ¿nos va a quedar la misma diferencia de 3? ¿Qué piensa?
E20: No.
[…]
P1: Entonces ¿qué pasó? [después de realizar los cálculos]
E20: 25 es mayor que 22
P1: ¿Cuánto?
E20: 3
P1: ¿Y aquí?
E20: 3
P1: ¿Y qué piensa?... ¿si cambiamos el número nos va a resultar lo mismo? Si cambio el número con el que empiezo, ¿nos va a resultar lo mismo?
E20: No

Resumen del caso E20, tareas 3 y 4. Las tareas 3 y 4 son resueltas mediante el procedimiento R1, consistente en comparar de manera directa los valores inicial y final. A partir de las entrevistas parece razonable afirmar que E1 no ha accedido a la composición de operadores, de ahí que en la tarea 3 calcule el valor final para después hacer la comparación y, en la tarea 4, prefiera dar un valor al Ei desconocido, para proceder como en la tarea 3.

Para este caso particular se podría decir que si bien este hace las comparaciones para establecer quién es mayor lo que se contempla como un avance, aún debe operar cada vez que se modifica un estado inicial para asegurarse, lo que da luces sobre la dificultad que tiene de comprender la composición de operadores (si se suma 8 y se resta 11, necesariamente el número quedará disminuido en 3).

6.3 Análisis de las guías del juego de la ruta

6.3.1 Análisis de respuestas correspondientes a las tareas de estructura 1. Directos

Para este caso se da un estado inicial, se aplican dos o tres variables (según la guía) y se pide al estudiante que encuentre el estado final.

Guía 1 Tarea 1: Si una ficha se encuentra a 4 espacios a la derecha del punto de partida, y los dados muestran: azul 2 y rojo 6, ¿a qué posición debería llegar la ficha?

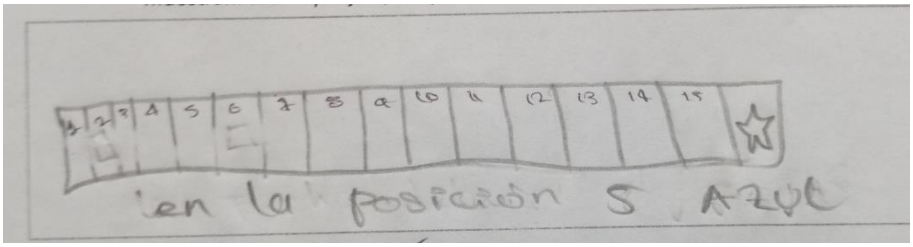


Figura 59, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 1 de la guía 1

Guía 2 Tarea1: Juan lanza los dados y obtiene los siguientes resultados: 3 azul, 4 azul y 2 rojo. Si antes de lanzar los dados la ficha se encontraba 2 puestos a la derecha del punto inicial, ¿a qué puesto llegará después de lanzar los dados?

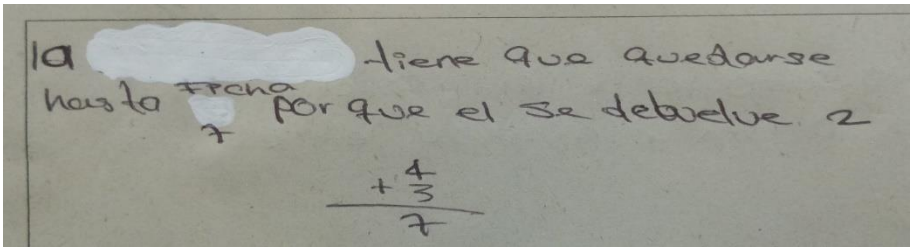
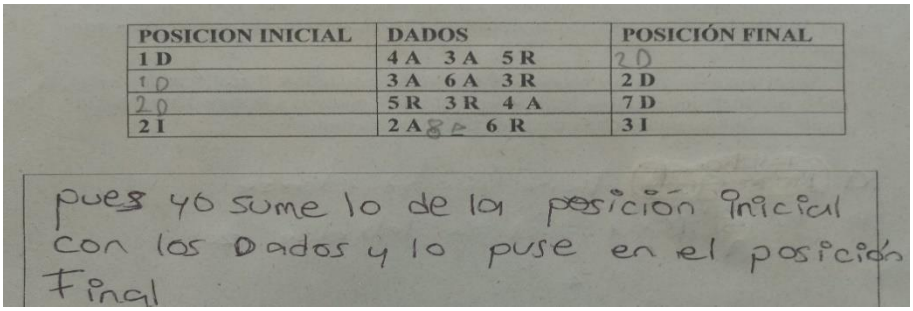


Figura 60, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 1 de la guía 2

Guía 2 Tarea 3a



POSICION INICIAL	DADOS	POSICIÓN FINAL
1 D	4 A 3 A 5 R	2 D
1 D	3 A 6 A 3 R	2 D
2 D	5 R 3 R 4 A	7 D
2 I	2 A 6 R	3 I

Figura 61, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 3A de la guía 2

En la tabla 39 se resumen las respuestas que proporcionó el estudiante E20 a las tareas 1de la guía 1 y 1 y 3A de la guía 2

Tabla 39:

Resumen procedimientos de las tareas 1de la guía 1 y 1 y 3A de la guía 2

TAREA	Código Respuesta		
	Tarea 1 guía 1	Tarea 1 guía 2	Tarea 3A guía 2
Estructura 1	R2	R2	R2

Origen: Creación propia

Procedimiento R2: Indica un punto y ubicación de llegada equivocado “5 Azul” (ver figura 9).

En las 3 tareas1 de la guía 1 y 1 de la guía 2 el estudiante E20 da una respuesta incorrecta a las preguntas. Mientras en la guía 1 toma como base el juego de la ruta y realiza una simulación de los movimientos indicados, ver figura 60. En las tareas de la guía 2 el estudiante indica que suma el resultado de los dados al punto inicial “Pues yo sume el resultado de los dados al punto inicial” ver figura 61.

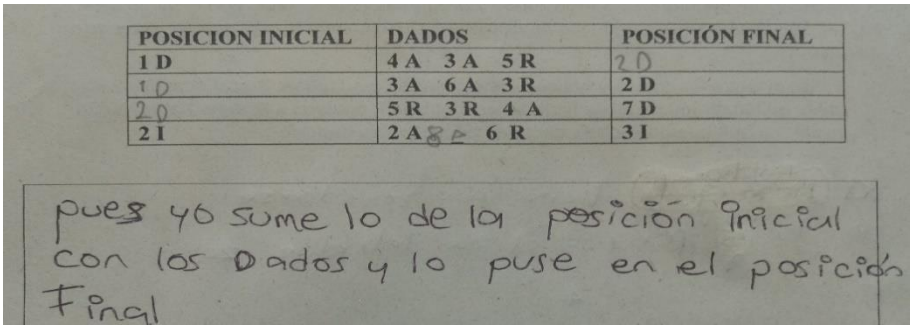
Pese a que las respuestas son incorrectas en los tres casos, se nota un avance en el procedimiento desarrollado por el estudiante; mientras en la guía 1 hace una simulación de los movimientos para llegar al resultado, en las tareas de la guía 2 asocia el color de los dados con desplazamientos en sentidos opuestos y con base en esto calcula utilizando sumas y restas, el resultado.

6.3.2 Análisis de respuestas correspondientes a la estructura 2

Para este análisis dividimos la tarea en dos partes a) cuando el estado inicial se encuentra a la izquierda del estado final y b) cuando el estado inicial se encuentra a la derecha del estado final.

6.3.2.1 Estado inicial se encuentra a la izquierda del estado final

Guía 2 Tarea 3B



POSICION INICIAL	DADOS	POSICIÓN FINAL
1 D	4 A 3 A 5 R	2 D
1 D	3 A 6 A 3 R	2 D
2 D	5 R 3 R 4 A	7 D
2 I	2 A 6 R	3 I

pues yo sume lo de la posición inicial con los Dados y lo puse en el posición Final

Figura 62, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 3b de la guía 2

Guía 3 Tarea1: Estaba en ___ y el resultado luego de lanzar los dados fue: 3A, 5A, 4R, y 2R; finalmente llegó al puesto 7 a la derecha del punto inicial.

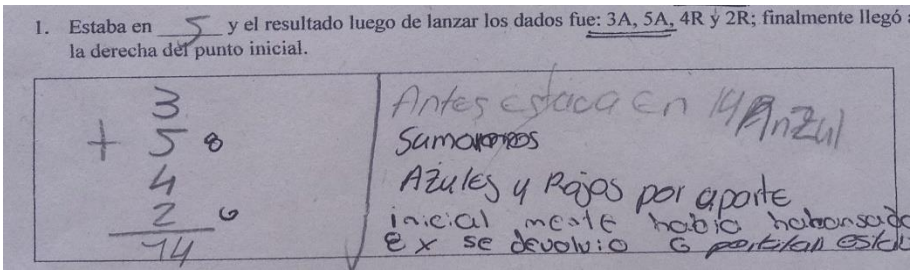


Figura 63, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 1 de la guía 3

Guía 3 Tarea 2: Estaba en ___ y el resultado luego de lanzar los dados fue:6A, 5A, 1R, y 2R; finalmente llegó al puesto 3 a la derecha del punto inicial.

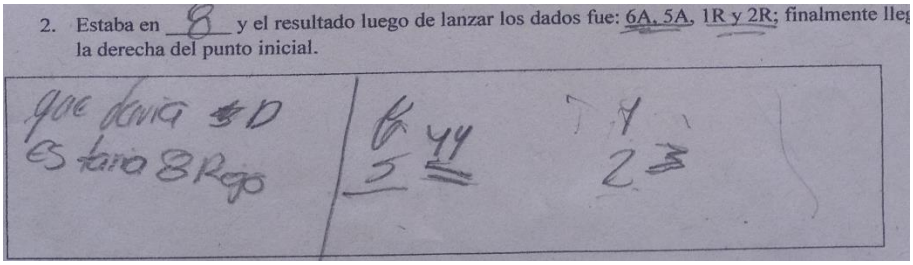


Figura 64, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 2 de la guía 3

Prueba final Tarea 5: Juanito estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue 5A, 3A, 3R, 2R; finalmente llegó al puesto 9 a la derecha del punto inicial.

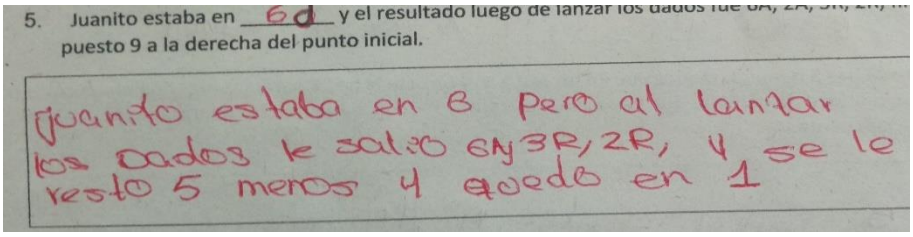
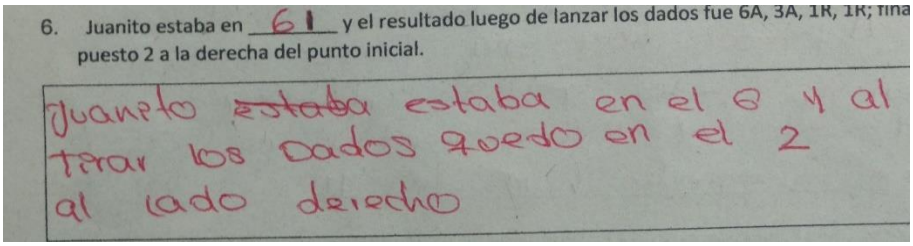


Figura 65, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 5 de la prueba final

Prueba final Tarea 6: Juanito estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue 5A, 6A, 3R, 1R; finalmente llegó al puesto 2 a la derecha del punto inicial.


6. Juanito estaba en 61 y el resultado luego de lanzar los dados fue 6A, 3A, 1R, 1R; fina
puesto 2 a la derecha del punto inicial.

Juanito ~~estaba~~ estaba en el 6 y al tirar los dados quedo en el 2 al lado derecho

Figura 66, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 6 de la prueba final

En la tabla 40 se resumen las respuestas que proporcionó el estudiante E22 a las tareas correspondientes a la estructura 2, donde el punto inicial se encuentra a la izquierda del punto final: Guía 2 tarea 3c, guía 3 tarea 1, guía 3 tarea 2, y tareas 5 y 6 de la prueba final.

Tabla 40:

Resumen procedimientos de las tareas 3c de la guía2, 1 y 2 de la guía 3 y 5 y 6 de la prueba final

TAREA	**Código Respuesta**				
	Tarea 3c Guía 2	Tarea 1 guía 3	Tarea 2 guía 3	Tarea 5 Prueba final	Tarea 6 Prueba final
Estructura 3 Ei < Ef	R2	R2	R2	R2	R2

Origen: Creación propia

Procedimiento R2: Indica un punto y ubicación de llegada equivocado “1D” (ver figura 62).

En las 5 tareas1 de la guía 1 y 1 de la guía 2 el estudiante E20 da una respuesta incorrecta a las preguntas. Mientras en la guía 1 toma como base el juego de la ruta y realiza una simulación de los movimientos indicados, ver figura 62. En las tareas de la guía 3 y de la guía final el estudiante indica que suma el resultado de los dados al punto inicial “Pues yo sume el resultado de los dados al punto inicial” ver figura 63.

Pese a que las respuestas son incorrectas en los tres casos, se nota un avance en el procedimiento desarrollado por el estudiante; mientras en la guía 1 hace una simulación de los movimientos para llegar al resultado, en las tareas de la guía 2 asocia el color de los dados con

desplazamientos en sentidos opuestos y con base en esto calcula utilizando sumas y restas, el resultado.

El estudiante E20 asocia el color de los dados con desplazamientos en sentidos opuestos para obtener resultados parciales, pero no logra ver la reversibilidad que existe para llegar del punto final al punto inicial invirtiendo el sentido de los desplazamientos dados, por lo que se hace necesario tener un punto de partida. Hecho que se resuelve probando con un posible valor y a partir de ahí se aplican los desplazamientos.

6.3.2.2 Estado inicial se encuentra a la derecha del estado final

Guía 1 Tarea 2: Se lanzan los dados y se obtiene 2 azul, rojo 6, y la ficha finaliza en 3 azul. ¿En dónde se encontraba la ficha antes de lanzar los dados?

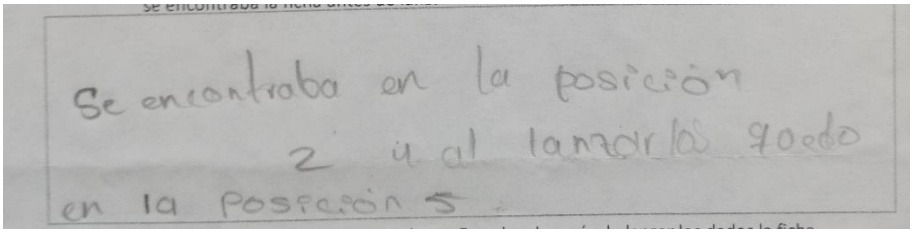
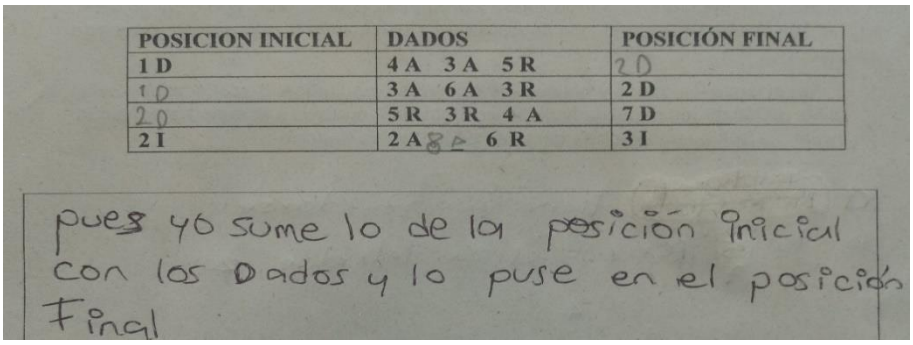

Se encontraba en la posición
2 y al lanzarlos quedo
en la posición 5

Figura 67, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 2 de la guía 1

Guía 2 Tarea 3c



POSICION INICIAL	DADOS	POSICIÓN FINAL
1 D	4 A 3 A 5 R	2 D
1 D	3 A 6 A 3 R	2 D
2 D	5 R 3 R 4 A	7 D
2 I	2 A 6 R	3 I

pues yo sume lo de la posición inicial
con los Dados y lo puse en el posición
Final

Figura 68, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 3c de la guía 2

Guía 3 Tarea 3: Estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue: 1A, 2A, 4R y 5R; finalmente llegó al puesto 12 a la izquierda del punto de partida.

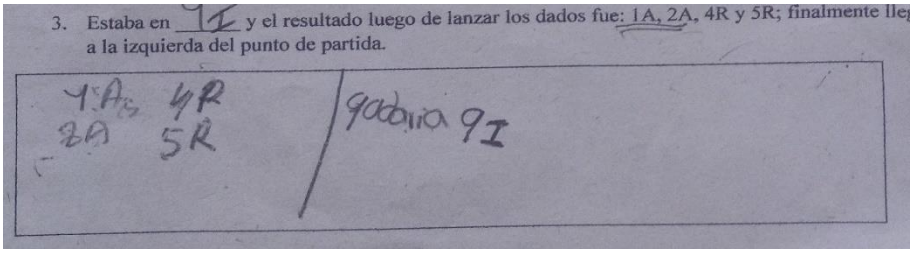


Figura 69, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 3 de la guía 3

Prueba final Tarea 7: Juanito estaba en _____ y el resultado luego de lanzar los dados fue 2A, 2A, 5R, 4R; finalmente llegó al puesto 7 a la izquierda del punto inicial.

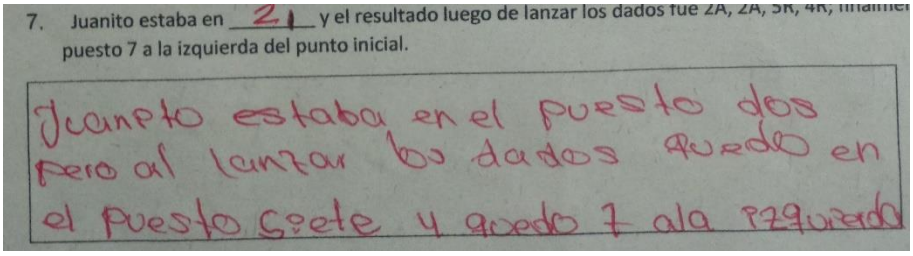


Figura 70, Respuesta del estudiante E20 a la pregunta 7 de la prueba final

En la tabla 41 se resumen las respuestas que proporcionó el estudiante E1 a las tareas correspondientes a la estructura 3, donde el punto inicial es mayor que el punto final: Guía 1 tarea 2, guía 2 tarea 3c, guía 3 tarea 3, y tareas 7 de la prueba final.

Tabla 41:

Resumen procedimientos de las tareas 2 de la guía 1, 3c de la guía 2, tarea 3 de la guía 3 y tarea 7 de la prueba final

TAREA	**Código Respuesta**			
	Tarea 2 Guía 1	Tarea 3c guía 2	Tarea 3 guía 3	Tarea 7 Prueba final
Estructura 3 Ei > Ef	R2	R2	R2	R1

Origen: Creación propia

Procedimiento R1: Indica el punto de llegada y la ubicación exacta (izquierda o derecha del punto de partida) de la ficha. “Juanito estaba en el puesto 2” (ver figura 70).

Procedimiento R2: Indica un punto y ubicación de inicio equivocado “Se encontraba en la posición 2” (ver figura 67).

En las tres de las cuatro tareas el estudiante E20 da una respuesta incorrecta a la pregunta y justifica su procedimiento. escribiendo: “se encontraba en la posición 2I” (ver figura 67), donde toma un punto inicial, y le suma o resta el resultado de los dados azules y al resultado le suma el de los dados rojos.

Pese a que el procedimiento desarrollado por el estudiante en esta tarea; muestra que asocia el color de los dados con desplazamientos en sentidos opuestos y con base en esto calcula la posición de la ficha utilizando sumas y restas, deja ver que aún hay dificultad cuando el estado inicial de una operación es mayor que el estado final.