Transformada de Radon y su inversión

Juan Sebastián Lozano Penagos

Facultad de Ciencias
Pontificia Universidad Javeriana
2018

TRANSFORMADA DE RADON Y SU INVERSIÓN

Juan Sebastián Lozano Penagos

Tutor
Humberto Gil Silva Rafeiro, PhD

Facultad de Ciencias
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Mayo 2018

Quiero agradecer a mi tutor Humberto Rafeiro por su acompañamiento, confianza, paciencia y dedicación en este trabajo de grado y mi formación académica a lo largo de estos años. Agradezco a todos los profesores de matemáticas de la facultad de ciencias, quienes me han brindado su apoyo y conocimiento durante mi proceso universitario.
Dedico este trabajo de grado a mi familia quienes con su infinito apoyo, amor y esfuerzo han contribuido a mi formación integral como matemático.

Índice general

Prefacio

El objeto de estudio de este trabajo de grado será la transformada de Radon, la cual fue introducida por el matemático austriaco Johan Radon (1887-1956) en 1917. Diversas aplicaciones existen, entre ellas están la tomografía, astronomía y geofísica, para más detalles sobre aplicaciones ver por ejemplo [1].

En el capítulo 1 serán introducidas las coordenadas polares generalizadas, estás serán fundamentales en el desarrollo del problema de inversión para la transformada de Radon. Hablaremos brevemente sobre las funciones Gamma y Beta mencionando algunas de sus propiedades más importantes.

En el capítulo 2 hablaremos sobre las integrales fraccionarias de Riemann-Liouville, las cuales son una generalización de la integral iterada. Las integrales fraccionarias serán de gran importancia, esto debido a que la fórmula de inversión será escrita en términos de estas. Además, daremos dos soluciones explícitas a la ecuación integral de Abel.

En el capítulo 3 generalizaremos la noción de integral fraccionaria introduciendo los potenciales de Riesz, motivando su estudio mediante el Laplaciano fraccionario y la transformada de Fourier. Además estudiaremos el espacio de Lizorkin, el cuál será un subespacio del espacio de Schwartz de $\mathbb{R}^n$ invariante bajo la acción del operador de Riesz.

En el capítulo 4 se introducirá la transformada de Radon en el espacio tridimensional y hallaremos una fórmula de inversión en términos del Laplaciano. El caso n-dimensional será dividido en dos partes, primero consideraremos funciones radiales y posteriormente funciones arbitrarias. Para el caso radial serán usadas las integrales fraccionarias de Riemann-Liouville y la integración polar desarrollada en el capítulo 1. Para el caso arbitrario se definirá la transformada dual de Radon y concluiremos con una fórmula de inversión usando potencias fraccionarias del operador Laplaciano.

1 Notación

EL conjunto de los números reales positivos será denotado por $\mathbb{R}_+$, es decir, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. El símbolo $\mathbb{N}_0$ denota los números naturales no negativos. Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ definimos la esfera n-dimensional como $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ donde $|x|$ es la norma euclidiana. $O(n)$ denotará el *grupo ortogonal de matrices* $A \in M_n(\mathbb{R})$ que satisfacen $A \cdot A^t = I_n$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A e I_n es la matriz identidad de tamaño n. Si $A \in O(n)$ entonces $\det(A) = \pm 1$, el *grupo especial ortogonal* $SO(n)$ son las matrices ortogonales con determinante 1.
Para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ definimos el *símbolo de Pochhammer*

$$(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1). \tag{1.1}$$

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada definimos la *convolución* de f y g, denotada $f * g$ como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^k si la k-ésima derivada existe y es continua. El conjunto de todas las funciones de clase C^k es denotado $C^k(\mathbb{R}^n)$.
Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pertenece al *espacio de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si f es infinitamente diferenciable y

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{|x^\alpha \partial^\gamma f(x)| : \text{para todo } \alpha, \gamma \in \mathbb{N}_0^n\} < \infty,$$

donde $\mathbb{N}_0^n := \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{N}_0\}$, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\partial^\gamma f := \dfrac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial x_1^{\gamma_1} \cdots \partial x_n^{\gamma_n}}$ y $|\gamma| := \sum_{i=1}^n \gamma_i$.
Decimos que $f(x) = O(g(x))$ cuando $(x \to \infty)$ si existe $A > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq A|g(x)|$ para todo $x \geq x_0$, dado un $\beta > 0$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definimos $C_\beta(\mathbb{R}^n) = \{f : f \textit{ es continua y } f(x) = O(|x|^{-\beta})\}$.

2 Preliminares

Sea $A \in O(n)$ y A_i la i-ésima fila de A, como $AA^t = I_n$ se cumple que $A_i \cdot A_j = \delta_{ij}$ donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Esta relación nos dice que las filas de A son vectores unitarios mutuamente ortogonales, análogamente las columnas de A también serán vectores unitarios mutuamente ortogonales.
Si $A \in SO(n)$ y $x \in S^{n-1}$, tenemos una acción natural del grupo $SO(n)$ sobre S^{n-1} dada por la multiplicación a izquierda, *i.e*, $A \star x := A \cdot x$ donde $\star : SO(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ es la acción de grupo y $\cdot$ es la multiplicación usual de matrices. Note que la acción está bien definida pues $|A \cdot x| = 1$ si $x \in S^{n-1}$.
Demostraremos que esta acción es transitiva.

Lema 2.0.1. *El grupo $SO(n)$ actúa transitivamente en S^{n-1}, es decir, dados $x, y \in S^{n-1}$ existe $\gamma \in SO(n)$ tal que $\gamma x = y$.*

Demostración. Mostraremos primero que para $\theta \in S^{n-1}$ existe $\rho \in SO(n)$ con $\rho e_n = \theta$. Sea $\theta \in S^{n-1}$, existen $B^1, \ldots, B^{n-1}$ tal que $\{B^1, \ldots, B^{n-1}, \theta\}$ es una base para $\mathbb{R}^n$. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt encontramos $A^1, \ldots, A^{n-1}$ tal que $\{A^1, \ldots, A^{n-1}, \theta\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. Sea ρ la matriz cuyas columnas son $A^1, \ldots, A^{n-1}, \theta$. Es claro que $\rho e_n = \theta$ y como las columnas de la matriz ρ son vectores unitarios mutuamente ortogonales, se sigue que $\rho \in O(n)$. Cambiamos A^i por $-A^i$ si es necesario para obtener $\det \rho = 1$.
Para el caso general sean $x, y \in S^{n-1}$, existen $\alpha, \beta \in SO(n)$ tal que $\alpha e_n = x$ y $\beta e_n = y$. Tome $\gamma \in SO(n)$ con $\gamma \cdot \alpha = \beta$, entonces

$$\gamma x = \gamma \cdot \alpha e_n = \beta e_n = y,$$

lo cuál termina la prueba. $\square$

2.1. Coordenadas polares generalizadas

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $x_1, \ldots, x_n$ sus coordenadas cartesianas. Las coordenadas polares $r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ del punto x se relacionan mediante las fórmulas

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\ x_2 = r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \\ x_n = r\cos\varphi_1, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $0 \le \varphi_i \le \pi$ para $1 \le i \le n-2$ y $0 \le \varphi_{n-1} \le 2\pi$. Cada $x \neq 0$ se puede escribir de manera única como $x = r\theta$ donde $r = |x|$ y $\theta = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$. Esto nos dará una función continua biyectiva entre $\mathbb{R}^n - \{0\}$ y $\mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$.
Los números $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ son llamados las coordenadas esféricas de θ. Podemos relacionar las coordenadas esféricas con las coordenadas cartesianas $\theta_1, \ldots, \theta_n$ mediante las siguientes fórmulas

$$\cos\varphi_k = \frac{\theta_{k+1}}{r_{k+1}}, \quad \sin\varphi_k = \frac{r_k}{r_{k+1}}, \quad r_k = (\theta_1^2 + \ldots + \theta_k^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Si tenemos el par (r, θ) con $r \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in S^{n-1}$ de (2.2) obtenemos las coordenadas esféricas $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ de θ y de (2.1) las coordenadas cartesianas del punto $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. En consecuencia, obtenemos una función biyectiva continua entre $\mathbb{R}^n - \{0\}$ y $\mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$. Omitiremos la demostración del siguiente lema, para más detalles ver por ejemplo [2, pp.279-281] o [3] .

Lema 2.1.1. *Existe una única medida de Borel μ sobre S^{n-1}, invariante bajo la acción del grupo $O(n)$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dx = \int_0^\infty r^{n-1}dr \int_{S^{n-1}} F(r\theta)d\mu(\theta). \tag{2.3}$$

Con invarianza bajo la acción del grupo $O(n)$ queremos decir que para $\gamma \in O(n)$ se cumple que

$$\int_{S^{n-1}} f(\gamma\theta)d\mu(\theta) = \int_{S^{n-1}} f(\theta)d\mu(\theta).$$

Recordemos que dado un grupo de Lie G (una variedad diferenciable con una estructura de grupo donde la operación del grupo y la inversión son suaves) existe una medida invariante a izquierda y a derecha, esta medida es conocida como la medida de Haar, para más detalles ver por ejemplo [4, 5]. Con invarianza a izquierda queremos decir que, para $f : G \to \mathbb{R}$ y para todo $s \in G$ tenemos

$$\int_G f(sx)d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x).$$

Como $SO(n)$ es un grupo de Lie, existe la medida de Haar denotada $d\gamma$ invariante a derecha e izquierda con $\int_{SO(n)} d\gamma = 1$. El siguiente lema relaciona la integración sobre la esfera n-dimensional con la integración en el grupo $SO(n)$.

Lema 2.1.2. *Sea $f \in L^1(S^{n-1})$, entonces para todo $u \in S^{n-1}$ se cumple que*

$$\int_{S^{n-1}} f(\theta)d\theta = \sigma_{n-1} \int_{SO(n)} f(\gamma u)d\gamma, \tag{2.4}$$

donde $\sigma_{n-1} = \int_{S^{n-1}} d\theta$.

Demostración. Como $\int_{SO(n)} d\gamma = 1$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} f(\theta)d\theta &= \int_{SO(n)} d\gamma \int_{S^{n-1}} f(\theta)d\theta \\ &= \int_{S^{n-1}} d\theta \int_{SO(n)} f(\gamma u)d\gamma \\ &= \sigma_{n-1} \int_{SO(n)} f(\gamma u)d\gamma,\end{aligned}$$

se realizó el cambio de variable $\theta = \gamma u$. Veamos que esto es independiente de u. Si $v \in S^{n-1}$ existe $\rho \in SO(n)$ tal que $u = \rho v$, de la invarianza de la medida de Haar obtenemos

$$\int_{SO(n)} f(\gamma u)d\gamma = \int_{SO(n)} f(\gamma\rho v)d\gamma = \int_{SO(n)} f(\gamma v)d\gamma.$$

□

2.2. Integrales Eulerianas

Estudiaremos las integrales eulerianas de primer y segundo tipo (función Beta y función Gamma respectivamente) pues sus propiedades serán de utilidad en el capítulo 4.

2.2.1. Función Beta

Definición 2.2.1. *Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b > 0$ definimos a la función Beta de parámetro a, b por la integral*

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx. \tag{2.5}$$

Realizando el cambio de variable $x = \frac{s}{1+s}$ obtenemos

$$B(a,b) = \int_0^\infty \left(\frac{s}{1+s}\right)^{a-1}\left(\frac{1}{1+s}\right)^{b-1}\frac{ds}{(1+s)^2} = \int_0^\infty \frac{s^{a-1}}{(s+1)^{a+b}}ds, \tag{2.6}$$

si hacemos el cambio de variable $x = \sin^2\theta$ de (2.5) se sigue

$$B(a,b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1}\theta\cos^{2b-1}\theta d\theta.$$

La función Beta es simétrica respecto a las variables a y b, es decir, $B(a,b) = B(b,a)$, esto se deduce del cambio $s = 1-x$.

Lema 2.2.1. *Para $a, b > 0$ se cumple que*

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1), \tag{2.7}$$

(2.7) *se conoce como la fórmula de complemento para la función Beta.*

Demostración. Aplicando integración por partes a (2.6) tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{s^{a-1}}{(s+1)^{a+b}}ds &= -\frac{1}{a+b-1}\left.\frac{s^{a-1}}{(s+1)^{a+b-1}}\right|_0^\infty + \frac{a-1}{a+b-1}\int_0^\infty \frac{s^{a-2}ds}{(s+1)^{a+b-1}} \\ &= -\frac{1}{a+b-1}\lim_{s\to\infty}\frac{s^{a-1}}{(s+1)^{a+b-1}} + \frac{a-1}{a+b-1}B(a-1,b) \\ &= \frac{a-1}{a+b-1}B(b,a-1),\end{aligned}$$

el límite de la segunda igualdad es cero pues $b > 0$. □

Si tomamos $b = n \in \mathbb{N}$, de la fórmula de reducción (2.7) se sigue que

$$B(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdots \frac{1}{a+1} B(a,1), \tag{2.8}$$

notemos que $B(a,1) = \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}$. Si tomamos $a = m \in \mathbb{N}$ de (2.8) obtenemos

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!}{m(m+1)\cdots(m+n-1)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}. \tag{2.9}$$

Para $0 < a < 1$ se puede demostrar la fórmula de complemento para la función Beta, ver por ejemplo [6]

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}. \tag{2.10}$$

2.2.2. Función Gamma

Definición 2.2.2. *Para $a > 0$, definimos a la función Gamma como*

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx. \tag{2.11}$$

Observación 2.2.1. *Como para $A > 0$ la integral $\int_0^A \frac{1}{x^\lambda} dx$ existe si $\lambda < 1$, la función Gamma está bien definida para $a > 0$. Puede probarse que la función Gamma es continua e infinitamente diferenciable, para más detalles ver por ejemplo [7, p.18].*

Realizando integración por partes en (2.11) podemos escribir

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx = \frac{1}{a} e^{-x} x^a \Big|_0^\infty + \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-x} x^a dx = \frac{\Gamma(a+1)}{a},$$

obtuvimos la ecuación funcional $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. Iterando esto tenemos

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)a\Gamma(a), \tag{2.12}$$

tomando $a = 1$ y del hecho que $\Gamma(1) = 1$ concluimos que $\Gamma(n+1) = n!$ para $n \in \mathbb{N}$.
Del cambio de variable $x = \log(1/s)$ en (2.11) obtenemos

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{s}\right)^{a-1} ds. \tag{2.13}$$

Sea $x > 0$ fijo y definimos $f(t) = x^t$, como la derivada de f es $f'(t) = x^t \log x$, tomando $t = 0$ obtenemos

$$\log x = \lim_{h\to 0} \frac{x^h - 1}{h} = \lim_{u\to\infty} (x^{\frac{1}{u}} - 1)u,$$

de la identidad $\log(\frac{1}{x}) = -\log x$ se sigue que

$$\log \frac{1}{x} = \lim_{u\to\infty} (1 - x^{\frac{1}{u}})u, \tag{2.14}$$

reemplazando (2.14) en (2.13) y formalmente intercambiando el límite con la integral tenemos

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^{a-1}(1 - x^{\frac{1}{n}})^{a-1} dx = \lim_{n\to\infty} n^a \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{n-1} dx = \lim_{n\to\infty} n^a B(a,n),$$

de (2.8) obtenemos

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^a (n-1)!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}.$$

La sucesión de funciones $f_n(x) = (1 - x^{\frac{1}{n}})n$ es creciente y la permutación entre la integral y el límite se sigue del teorema de convergencia monótona de Lebesgue.

Observación 2.2.2. *Sabemos que la definición* (2.11) *solamente es válida para* $a > 0$ *pero usando* (2.12) *podemos extenderla al semieje negativo. Usando el símbolo de Pochhammer* (1.1) *podemos escribir a* (2.12) *como*

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+n)}{(a)_n}, \tag{2.15}$$

por medio de (2.15) *extendemos la función Gamma para* $a < 0$, *excepto para los enteros negativos pues* (1.1) *es cero para* $x \in \mathbb{Z}, x < 0$ *y* $n \geq -x + 1$.

Como $\Gamma(k) = (k-1)!$ para $k \in \mathbb{N}$, podemos escribir a (2.9) como

$$B(n,m) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},$$

esta última fórmula seguirá siendo válida para $a, b > 0$ arbitrarios.

Lema 2.2.2. *Para $a, b > 0$ tenemos*

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{2.16}$$

Demostración. Sean $a, b > 0$, de (2.11) se sigue que

$$\frac{\Gamma(r)}{(1+t)^r} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}x^{r-1}}{(1+t)^r}dx = \int_0^\infty e^{-(1+t)y}y^{r-1}dy,$$

se realizó el cambio de variable $x = (1+t)y$. Tomando $r = a+b$, tenemos

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^\infty e^{-(1+t)y}y^{a+b-1}dy,$$

multiplicando ambos lados por t^{a-1} e integrando desde 0 a infinito, por (2.6) obtenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma(a+b)B(a,b) &= \int_0^\infty t^{a-1}\int_0^\infty e^{-(1+t)y}y^{a+b-1}dydt \\
&= \int_0^\infty e^{-y}y^{a+b-1}\int_0^\infty e^{-ty}t^{a-1}dtdy \\
&= \frac{\Gamma(a)}{y^a}\int_0^\infty e^{-y}y^{a+b-1}dy \\
&= \Gamma(a)\Gamma(b).
\end{aligned}$$

Esto muestra lo que queríamos $\square$

Por la fórmula de complemento para la función Beta (2.10) y (2.16) para $0 < a < 1$ tenemos

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}, \tag{2.17}$$

la expresión (2.17) es conocida como la fórmula de complemento para la función Gamma.

Como una aplicación hallaremos el área superficial de la esfera y el volumen de la bola n-dimensional. Por definición el área superficial es $\int_{S^{n-1}} d\theta \equiv \sigma_{n-1}$. Definamos $F(x) = e^{-|x|^2}$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}dx_1\ldots dx_n = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-x_i^2}dx_i = \pi^{\frac{n}{2}}, \tag{2.18}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty r^{n-1}dr \int_{S^{n-1}} e^{-|r\theta|^2} d\theta &= \int_0^\infty r^{n-1}e^{-r^2}dr \int_{S^{n-1}} d\theta \\
&= \sigma_{n-1} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr \\
&= \frac{\sigma_{n-1}}{2} \int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{1}{2}(n-1)} s^{-\frac{1}{2}} ds \\
&= \frac{\sigma_{n-1}}{2} \int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{n}{2}-1} ds \\
&= \frac{\sigma_{n-1}\Gamma(\frac{n}{2})}{2},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

de (2.18),(2.19) y (2.3) obtenemos

$$\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

La bola n-dimensional de radio r se define como $B_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$. Sea V_n el volumen de la bola de radio 1, usaremos el mismo método que se uso para hallar el área superficial de la esfera. Usando coordenadas polares (2.3) tenemos

$$V_n = \int_{B^n} dx = \int_0^1 r^{n-1}dr \int_{S^{n-1}} d\theta = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} d\theta. \tag{2.20}$$

Sea $F(x) = e^{-|x|^2}$ de (2.3) y (2.20) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr \int_{S^{n-1}} d\theta = \frac{n\Gamma(\frac{n}{2})}{2} V_n, \tag{2.21}$$

de (2.18) y (2.21) se sigue que

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}. \tag{2.22}$$

Si V_n^r es el volumen de la bola de radio r, entonces

$$V_n^r = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} r^n.$$

3 Integral fraccionaria de Riemann-Liouville

La integral fraccionaria de Riemann-Liouville será de gran importancia en nuestro trabajo, más específicamente, en la fórmula de inversión para la transformada de Radon.

3.1. Motivación

En lugar de dar la definición de la integral fraccionaria directamente, veamos como la misma surge de manera natural. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, $a \in \mathbb{R}$ fijo y $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$(J^n f)(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \cdots dx_2 dx_1,$$

queremos mostrar que esta integración iterada se reduce a una sola integral. Más específicamente mostraremos que

$$(J^n f)(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \cdots dx_2 dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(t)(x-t)^{n-1} dt. \quad (3.1)$$

Esta última expresión es conocida como la fórmula de Cauchy para la integración iterada.
Procederemos por inducción sobre n. El caso base es obvio. Supongamos que la fórmula es válida para algún $n \in \mathbb{N}$, por la regla de Leibniz para la diferenciación bajo el signo integral, nótese que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n!}\int_a^x f(t)(x-t)^n dt\right) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(t)(x-t)^{n-1} dt. \quad (3.2)$$

De (3.2) tenemos

$$
\begin{aligned}
(J^{n+1}f)(x) &= \int_a^x \int_a^{x_1} \cdots \int_a^{x_n} f(x_{n+1})dx_{n+1}\cdots dx_2 dx_1 \\
&= \int_a^x \frac{1}{(n-1)!} \int_a^{x_1} f(t)(x_1-t)^{n-1}dtdx_1, \\
&= \int_a^x \frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{n!}\int_a^{x_1} f(t)(x_1-t)^n dt\right)dx_1 \\
&= \frac{1}{n!}\int_a^x f(t)(x-t)^n dt,
\end{aligned}
$$

esto finaliza la prueba.

3.2. Integrales fraccionarias

Definición 3.2.1. *Sea f una función integrable en un intervalo finito $[a,b]$. Para $\alpha>0$, definimos las integrales fraccionarias de Riemann-Liouville como*

$$
\begin{aligned}
(I^\alpha_{a+}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(y)dy}{(x-y)^{1-\alpha}}, \\
(I^\alpha_{b-}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{f(y)dy}{(y-x)^{1-\alpha}}.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Si $\alpha = n$ es un número natural, entonces la integral $(I^\alpha_{a+}f)(x)$ es justamente la integral iterada (3.1).

En lo que sigue, necesitaremos con frecuencia conocer el valor de cierta integral así que vamos a calcularla antes de continuar. Para $a\in\mathbb{R}$ y $\beta>0$ tenemos

$$
\int_a^x (y-a)^{\beta-1}(x-y)^{\alpha-1}dy = B(\alpha,\beta)(x-a)^{\alpha+\beta-1}, \tag{3.4}
$$

del cambio de variable $y-a=s(x-a)$ y (2.5) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\int_a^x (y-a)^{\beta-1}(x-y)^{\alpha-1}dy &= \int_0^1 s^{\beta-1}(x-a)^{\alpha+\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}ds \\
&= B(\alpha,\beta)(x-a)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}
$$

Veamos un ejemplo

Ejemplo 3.2.1. *Sea* $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$ *con* $\beta > 0$ *y calculemos* $I^{\alpha}_{a+}f$. *De* (3.4) *y* (3.3) *tenemos*

$$
\begin{aligned}
(I^{\alpha}_{a+}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x (y-a)^{\beta-1}(x-y)^{\alpha-1} dy \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha-1} B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha-1}\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}
$$

Las integrales fraccionarias de Riemann-Liouville satisfacen la propiedad de semigrupo, es decir

Lema 3.2.1. *Sea* $f \in L^1(a,b)$ *y* $\alpha, \beta > 0$, *entonces*

$$
I^{\alpha}_{a+} I^{\beta}_{a+} f = I^{\alpha+\beta}_{a+} f. \tag{3.5}
$$

Demostración. Cambiando el orden de integración obtenemos

$$
\begin{aligned}
(I^{\alpha}_{a+} I^{\beta}_{a+} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_a^x \frac{dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \int\limits_a^y \frac{f(t)dt}{(y-t)^{1-\beta}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_a^x f(t)dt \int\limits_t^x \frac{dy}{(x-y)^{1-\alpha}(y-t)^{1-\beta}},
\end{aligned}
$$

de (3.4) y (2.16) se sigue que

$$
\begin{aligned}
(I^{\alpha}_{a+} I^{\beta}_{a+} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_a^x f(t) B(\alpha,\beta)(x-t)^{\alpha+\beta-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha-\beta}} \\
&= (I^{\alpha+\beta}_{a+} f)(x).
\end{aligned}
$$

□

Continuaremos con los operadores de derivación fraccionaria, estos operadores serán inversas a izquierda para los operadores definidos en (3.3). Consideremos la integral fraccionaria (3.3)

$$(I^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(y)dy}{(x-y)^{1-\alpha}}. \tag{3.6}$$

Supongamos que $0 < \alpha < 1$, multipliquemos a (3.6) por $(z-x)^{-\alpha}$, integremos desde a hasta z y cambiemos el orden de integración

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^z \left(\int_a^x f(y)(x-y)^{\alpha-1} dy \right) (z-x)^{-\alpha} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^z f(y) \int_y^z (x-y)^{\alpha-1} (z-x)^{-\alpha} dx dy,$$

de (3.4) y (2.16) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^z f(y)dy \int_y^z (x-y)^{\alpha-1}(z-x)^{-\alpha} dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^z f(y) B(1-\alpha,\alpha) dy \\ &= \Gamma(1-\alpha) \int_a^z f(y) dy, \end{aligned}$$

derivando respecto a z recuperamos la función f. De esta manera si definimos el operador

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(y)dy}{(x-y)^{\alpha}},$$

Obtenemos $(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+} f)(x) = f(x)$. Luego de esta motivación definamos las derivadas fraccionarias.

Definición 3.2.2. *Para $0 < \alpha < 1$ definimos las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouvile para una función f definida en (a,b) como*

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(y)dy}{(x-y)^{\alpha}}, \\ (\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f)(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(y)dy}{(y-x)^{\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Extendemos esta definición para $\alpha > 0$ arbitrario de la siguiente manera. Sea $m = \lfloor \alpha \rfloor$ la parte entera de α, sea $0 < \beta < 1$ con $\alpha = m + \beta$. Entonces definimos

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x) &= (d/dx)^{m+1} (I^{1-\beta}_{a+} f)(x), \\ (\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f)(x) &= (-d/dx)^{m+1} (I^{1-\beta}_{b-} f)(x), \end{aligned} \tag{3.8}$$

si $\alpha = m \in \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f = (\frac{d}{dx})^m f$ y $\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f = (-\frac{d}{dx})^m f$. La definición (3.7) se realiza para funciones adecuadas.

Ejemplo 3.2.2. *Tome* $f(x) = (x-a)^{\beta}$ *con* $\beta > -1$, *mostraremos que*

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)(x-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}.$$

Pasemos a los detalles, sea $\alpha = m + \alpha_0$ *donde* $m = \lfloor \alpha \rfloor$. *De* (3.8) *tenemos*

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x) = (d/dx)^{m+1}(I^{1-\alpha_0}_{a+}f)(x),$$

calculemos primero $(I^{1-\alpha_0}_{a+}f)(x)$. *De* (3.4) *obtenemos*

$$\begin{aligned}(I^{1-\alpha_0}_{a+}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_0)}\int_a^x (y-a)^{\beta}(x-y)^{-\alpha_0}dy \\ &= \frac{B(1+\beta, 1-\alpha_0)(x-a)^{\beta-\alpha_0+1}}{\Gamma(1-\alpha_0)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(x-a)^{\beta-\alpha_0+1}}{\Gamma(\beta-\alpha_0+2)},\end{aligned}$$

en consecuencia

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x) &= (d/dx)^{m+1}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)(x-a)^{\beta-\alpha_0+1}}{\Gamma(\beta-\alpha_0+2)}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta-\alpha_0+1)(\beta-\alpha_0)\cdots(\beta-\alpha_0-m+1)(x-a)^{\beta-\alpha_0-m}}{\Gamma(\beta-\alpha_0+2)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta-\alpha_0-1)(\beta-\alpha_0-2)\cdots(\beta-\alpha_0-m+1)(x-a)^{\beta-\alpha_0-m}}{(\beta-\alpha_0-1)(\beta-\alpha_0-2)\cdots(\beta-\alpha_0-m+1)\Gamma(\beta-\alpha_0-m+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(x-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}.\end{aligned}$$

La igualdad $\Gamma(\beta-\alpha+2) = (\beta-\alpha_0+1)(\beta-\alpha_0)(\beta-\alpha_0-1)(\beta-\alpha_0-2)\cdots(\beta-\alpha_0-m+1)\Gamma((\beta-\alpha_0-m+1))$ *nos permite el paso de la igualdad dos a la tres.*

Demostremos que el operador $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}$ es el inverso a izquierda de I^{α}_{a+}.

Lema 3.2.2. *Sea* $f \in L^1(a,b)$ *y* $\alpha > 0$, *entonces*

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f)(x) = f(x), \qquad (\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}I^{\alpha}_{b-}f)(x) = f(x),$$

para casi todo x *en el intervalo abierto* (a,b).

Demostración. Sea $m = \lfloor \alpha \rfloor$, $\alpha = m + \alpha_0$. De (3.5) y el hecho que $(d/dx)^m((x - y)^m) = m!$ se sigue que

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+} f = (d/dx)^{m+1} I^{1-\alpha_0}_{a+} I^{\alpha}_{a+} f = (d/dx)^{m+1} I^{m+1}_{a+} f = (d/dx) I^{1}_{a+} f = f. \tag{3.9}$$

Del teorema de diferenciación de Lebesque (3.9) es válida casi todo punto. Para más detalles ver por ejemplo [8]. □

Definición 3.2.3. *Sea* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *una función definida en el semieje positivo. Tomando* $a = 0$ *en* (3.3) *tenemos*

$$(I^{\alpha}_{+} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy, \tag{3.10}$$

además, definimos

$$(I^{\alpha}_{-} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^{\infty} \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\alpha}} dy.$$

Las respectivas derivadas fraccionarias sobre $\mathbb{R}_+$ son

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}^{\alpha}_{+} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^{\alpha}} dy, \\ (\mathcal{D}^{\alpha}_{-} f)(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_x^{\infty} \frac{f(y)}{(y-x)^{\alpha}} dy. \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.2.1. La ecuación integral de Abel

En esta sección nos centraremos en resolver dos tipos de ecuaciones en integrales fraccionarias, más especificamente la ecuación

$$(I^{\alpha}_{b-} u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^b \frac{u(y)dy}{(y-x)^{1-\alpha}} \equiv v(x), \tag{3.12}$$

podemos aplicar formalmente el operador $\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}$ obteniendo $u(x) = (\mathcal{D}^{\alpha}_{b-} v)(x)$. Para aplicar el operador D^{α}_{b-} debemos asegurar que la función v pertenece al rango de I^{α}_{b-}, una condición suficiente es tomar $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua. Para más detalles ver por ejemplo [9].

Teorema 3.2.1. *Sean $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la solución a la ecuación* (3.12) *viene dada por*

$$u(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^m (I_{b-}^{m-\alpha} v)(x), \tag{3.13}$$

donde $m \in \mathbb{N}$, $m \geq \alpha$.

Demostración. Por la propiedad de semigrupo (3.5) obtenemos

$$I_{b-}^{m-\alpha} v = I_{b-}^{m-\alpha} I_{b-}^{\alpha} u = I_{b-}^{m} u,$$

en consecuencia

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{d}{dx}\right)^m (I_{b-}^{m-\alpha} v)(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^m I_{b-}^{m} u \\
&= \left(-\frac{d}{dx}\right)^m \left(\frac{1}{(m-1)!} \int_x^b \frac{u(y)dy}{(y-x)^{1-m}}\right) \\
&= \left(-\frac{d}{dx}\right) \left(\frac{1}{(m-1)!} \int_x^b u(y)(-d/dx)^m((y-x)^{m-1})dy\right) \\
&= \left(-\frac{d}{dx}\right) \int_x^b u(y)dy. \\
&= u(x).
\end{aligned}$$

Esto termina la prueba. □

Ahora consideremos la ecuación

$$(I_{-}^{\alpha} u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{u(y)dy}{(y-x)^{1-\alpha}} \equiv v(x),$$

si tomamos límite cuando $b \to \infty$ en (3.13) obtenemos la solución

$$u(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^m (I_{-}^{m-\alpha} v)(x), \tag{3.14}$$

la fórmula (3.14) será usada en la solución al problema de inversión para la transformada de Radon. Continuemos con la ecuación

$$(I_{a+}^{\alpha} u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{u(y)dy}{(x-y)^{1-\alpha}} = v(x). \tag{3.15}$$

(3.15) es conocida como la *ecuación integral de Abel*, escribiremos la solución a (3.15) usando convolución.

Ejemplo 3.2.3. *Sea $0 < s < 1$ y $a > 0$, sea $g \in C^1(\mathbb{R})$ una función de clase C^1 con $g(0) = 0$. Queremos resolver la siguiente ecuación para $x \in [0, a]$ y $f : [0, a] \to \mathbb{R}$*

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^s} dt, \tag{3.16}$$

note que en términos de la ecuación de Abel (3.15) esta ecuación es $g = \Gamma(1-s) I_+^{1-s} f$. Multipliquemos la ecuación (3.16) por $(y-x)^{s-1}$ e integremos desde 0 a y. Cambiando el orden de integración obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{g(x)}{(y-x)^{1-s}} dx &= \int_0^y \frac{dx}{(y-x)^{1-s}} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^s} dt \\ &= \int_0^y f(t) dt \int_t^y \frac{dx}{(x-t)^s (y-x)^{1-s}}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

para la integral interna hagamos el cambio de variable $x - t = u(y-t)$, entonces de (2.16) y la fórmula de complemento para la función Gamma (2.17) se sigue que

$$\int_t^y \frac{dx}{(x-t)^s (y-x)^{1-s}} = \int_0^1 (1-u)^{s-1} u^{-s} = B(1-s, s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}, \tag{3.18}$$

reemplazando (3.18) en (3.17) y derivando respecto a la variable y, tenemos

$$\frac{d}{dy} \int_0^y \frac{g(x)}{(y-x)^{1-s}} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \frac{d}{dy} \int_0^y f(t) dt = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} f(y). \tag{3.19}$$

Del cambio de variable $x = yt$ y de la regla de Leibniz se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{g(x)}{(y-x)^{1-s}} dx &= \frac{d}{dy} \int_0^1 \frac{y^s g(yt)}{(1-t)^{1-s}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{s y^{s-1} g(yt) + t y^s g'(yt)}{(1-t)^{1-s}} dt \\ &= \int_0^y \frac{s g(x) + x g'(x)}{y(y-x)^{1-s}} dx, \end{aligned} \tag{3.20}$$

por otra parte, mostraremos que

$$\frac{1}{y} \int_0^y \frac{s g(x)}{(y-x)^{1-s}} dx = \int_0^y \frac{g'(x)}{(y-x)^{1-s}} - \int_0^y \frac{x g'(x)}{y(y-x)^{1-s}} dx. \tag{3.21}$$

Note que $\int_0^y \frac{yg'(x)}{(y-x)^{1-s}}dy - \int_0^y \frac{xg'(x)}{(y-x)^{1-s}}dx = \int_0^y g'(x)(y-x)^s dx$. *Realizando integración por partes en esta última integral obtenemos*

$$\int_0^y g'(x)(y-x)^s dx = (y-x)^s g(x)|_0^y + \int_0^y sg(x)(y-x)^{s-1}dx = \int_0^y \frac{sg(x)}{(y-x)^{1-s}}dx,$$

esto nos muestra que $\int_0^y \frac{yg'(x)}{(y-x)^{1-s}} - \int_0^y \frac{xg'(x)}{(y-x)^{1-s}}dx = \int_0^y \frac{sg(x)}{(y-x)^{1-s}}dx$. *Multiplicando por* $\frac{1}{y}$ *obtenemos* (3.21).
La igualdad (3.21) *es equivalente a*

$$\int_0^y \frac{sg(x)+xg'(x)}{y(y-x)^{1-s}}dx = \int_0^y \frac{g'(x)}{(y-x)^{1-s}}dx, \tag{3.22}$$

reemplazando (3.22) *en* (3.20) *tenemos*

$$\frac{d}{dy}\int_0^y \frac{g(x)}{(y-x)^{1-s}}dx = \int_0^y \frac{g'(x)}{(y-x)^{1-s}}dx, \tag{3.23}$$

reemplazando (3.23) *en* (3.19) *concluimos que*

$$\int_0^y \frac{g'(x)}{(y-x)^{1-s}}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}f(y),$$

finalmente, la solución a (3.16) *viene dada por*

$$f(y) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi}\int_0^y \frac{g'(x)}{(y-x)^{1-s}}dx. \tag{3.24}$$

Nuestro objetivo era solucionar la ecuación de Abel (3.15) *usando la convolución, así que, sea* $0 < s < 1$ *y definamos*

$$\psi_s(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}, & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Note que $(f*\psi_s)(x) = \dfrac{1}{\Gamma(s)}\displaystyle\int_0^x \frac{f(y)}{(y-x)^{1-s}}dy$. *Para* $0 < k < 1$ *la ecuación* $g = f*\psi_k$ *con* $g(0) = 0$ *tiene como solución* $f = g' * \psi_{1-k}$. *Esto se sigue de la solución a* (3.16) *dada por* (3.24) *tomando* f *como* $\frac{f}{\Gamma(s)}$ *y* s *como* $1-s$.

4 Potenciales de Riesz

4.1. Motivación

Los potenciales de Riesz nos permitirán escribir explicitamente la transformada inversa de Radon en términos de estos. Necesitaremos las propiedades básicas de la transformada de Fourier.

Definición 4.1.1. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos la transformada de Fourier de f en el punto ξ como*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx, \tag{4.1}$$

donde $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i$. Por simplicidad, usualmente escribiremos $\hat{f}(\xi)$ en lugar de $\mathcal{F}(f)(\xi)$.

Dada una función f definida en $\mathbb{R}^n$ podríamos fijar $n-1$ variables y tomar la transformada de Fourier respecto a una variable específica, esto será denotado por $\widehat{f}_{x_i}(\xi)$. Ver (5.3).

La función $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$ es un punto fijo de la transformada de Fourier, es decir, $\mathcal{F}(f) = f$, este simple hecho será de gran utilidad posteriormente. Para una demostración de esto ver por ejemplo [10].

Definición 4.1.2. *Sea $h \in \mathbb{R}^n$ fijo y $a \in \mathbb{R}$. Definimos el operador traslación τ_h por $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$. Definimos el operador δ_a por $(\delta_a f)(x) = f(ax)$.*

Enunciaremos las propiedades básicas de (4.1)

Teorema 4.1.1. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces*

a) $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\xi) = \alpha\mathcal{F}(f)(\xi) + \beta\mathcal{F}(g)(\xi)$.

b) $\mathcal{F}(\tau_h f)(\xi) = e^{-2\pi i \xi \cdot h}\mathcal{F}(f)(\xi)$.

c) $\mathcal{F}(e^{2\pi i x \cdot h} f)(\xi) = \hat{f}(\xi + h) = (\tau_{-h}\hat{f})(\xi)$.

d) $\mathcal{F}(\delta_a f)(\xi) = |a|^{-n}\hat{f}(\frac{\xi}{a}) = |a|^{-n}(\delta_{a^{-1}}\hat{f})(\xi)$.

e) $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) \cdot \mathcal{F}(g)(\xi)$.

f) *Si* $\rho \in O(n)$ *entonces* $\mathcal{F}(f \circ \rho)(\xi) = \hat{f}(\rho\xi)$.

Decimos que f es una *función radial* si $f \circ \rho = f$ para todo $\rho \in O(n)$, es decir, si $|x| = |y|$ implica $f(x) = f(y)$. Del Teorema (4.1.1)(f) notamos que si f es una función radial entonces $\hat{f}$ es también una función radial. Estableceremos más propiedades de (4.1).

Teorema 4.1.2. *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *entonces*

a) *Las derivadas parciales de* $\hat{f}$ *existen y satisfacen la relación*

$$\mathcal{F}(-2\pi i x_k f(x))(\xi) = \frac{\partial \hat{f}(\xi)}{\partial \xi_k},$$

más aún, si $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ *entonces para* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *con* $|\alpha| \leq k$ *es válido que*

$$\mathcal{F}((-2\pi x i)^\alpha f(x))(\xi) = \partial^\alpha \hat{f}(\xi).$$

b) *Supongamos que* $\frac{\partial \hat{f}(\xi)}{\partial x_k} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *entonces*

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}\right)(\xi) = 2\pi i \xi_k \hat{f}(\xi), \tag{4.2}$$

más aún, si $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ *entonces para* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *con* $|\alpha| \leq k$ *se cumple que*

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi).$$

El siguiente resultado será de gran importancia en lo que sigue, el cuál es una consecuencia del teorema de Fubini.

Teorema 4.1.3. *Sean* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x) dx. \tag{4.3}$$

La relación (4.3) es conocida como la *Fórmula de multiplicación para la transformada de Fourier*. Definamos la inversa del operador (4.1).

Definición 4.1.3. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La transformada inversa de Fourier de la función f en el punto ξ, denotada por $\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$ o $\check{f}(\xi)$ se define por*

$$\check{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2\pi i x \cdot \xi} dx. \tag{4.4}$$

Finalizaremos enunciando la conocida fórmula de inversión de Fourier.

Teorema 4.1.4. *Sea $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi. \tag{4.5}$$

Para más detalles sobre la transformada de Fourier y las demostraciones correspondientes a todos los resultados aquí mencionados, ver por ejemplo [10].

Sea $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ el *Laplaciano* de f, de (4.2) tenemos

$$-\widehat{\Delta f}(\xi) = -\sum_{i=1}^n \widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}}(\xi) = 4\pi^2 \sum_{i=1}^n \xi_k^2 \widehat{f}(\xi) = 4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{f}(\xi),$$

esta última expresión nos motiva a definir, formalmente, el Laplaciano fraccionario como

$$\widehat{-\Delta^{\frac{\beta}{2}} f}(\xi) = (2\pi|x|)^\beta \widehat{f}(\xi). \tag{4.6}$$

Tomando $\beta = -\alpha$ podemos escribir (4.6) usando convolución como $\widehat{k_\alpha * f}$ donde $k_\alpha = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha}(2\pi)^{-\alpha})$. Nuestro objetivo será hallar k_α y para esto procederemos de una manera puramente formal dejando el rigor para secciones posteriores (note que $|x|^{-\alpha} \notin L^1(\mathbb{R}^n)$). Del Teorema (4.1.1)(d) obtenemos

$$\mathcal{F}(|\cdot|^{-\alpha})(t\xi) = |t|^{\alpha-n} \mathcal{F}(|\cdot|^{-\alpha})(\xi),$$

usando esto tenemos

$$\mathcal{F}(|\cdot|^{-\alpha})(\xi) = |\xi|^{\alpha-n} \mathcal{F}(|\cdot|^{-\alpha}) \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) =: |\xi|^{\alpha-n} C(n,\alpha). \tag{4.7}$$

Notemos que $C(n,\alpha)$ no depende de ξ pues $\mathcal{F}(|\cdot|^{-\alpha})$ es constante sobre S^{n-1} al ser una función radial. Para hallar $C(n,\alpha)$ usaremos la fórmula de multiplicación para la transformada de Fourier (4.3) junto con el hecho de que la función $e^{-\pi|x|^2}$ es un punto fijo de (4.1), es decir, $\mathcal{F}(e^{-\pi|\cdot|^2})(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$. Más concretamente

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}|x|^{-\alpha}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}C(n,\alpha)|x|^{\alpha-n}dx,$$

usando coordenadas polares (2.3)

$$\sigma_{n-1}\int\limits_0^\infty e^{-\pi r^2}r^{n-\alpha-1}dr = \sigma_{n-1}C(n,\alpha)\int\limits_0^\infty e^{-\pi r^2}r^{\alpha-1}dr,$$

del cambio de variable $s = \pi r^2$ estas integrales pueden ser escritas en términos de la función Gamma (2.11), por lo tanto

$$C(n,\alpha) = \frac{\pi^{\alpha-\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}. \tag{4.8}$$

La función $|\cdot|^{-\alpha}$ es una función par y así $\mathcal{F}(|\cdot|^{-\alpha}) = \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^{-\alpha})$. Como $k_\alpha = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha}(2\pi)^{-\alpha})$, de (4.7) y (4.8) obtenemos

$$k_\alpha(x) = (2\pi)^{-\alpha}|x|^{\alpha-n}\frac{\pi^{\alpha-\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} = \frac{|x|^{\alpha-n}}{\gamma_n(\alpha)},$$

donde

$$\gamma_n(\alpha) = \frac{2^\alpha\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}. \tag{4.9}$$

Note que los valores $n, n+2, n+4, \ldots$ son polos para $\gamma_n(\alpha)$. Finalmente, podemos escribir (Tomando $\beta = -\alpha$)

$$-\widehat{\Delta^{-\frac{\alpha}{2}}f}(x) = (\widehat{k_\alpha * f})(x).$$

4.2. Operador de Riesz

Nuestro objeto de estudio en este capítulo será el operador potencial de Riesz

Definición 4.2.1 (Potencial de Riesz). *Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función suficientemente buena, $n \geq 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha < n$.*
Definimos el operador potencial de Riesz como

$$(I^\alpha f)(x) := (k_\alpha * f)(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy, \tag{4.10}$$

donde $k_\alpha(x) = \frac{|x|^{\alpha-n}}{\gamma_n(\alpha)}$ *y* $\gamma_n(\alpha) = \frac{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}$.

En la definición anterior no somos muy claros con el término "suficientemente buena", así que, queremos encontrar un espacio adecuado para que el potencial (4.10) tenga sentido.

Lema 4.2.1. *Sea* $0 < \alpha < n$ *y* $\beta > 0$*. Supongamos que* $f \in C_\beta(\mathbb{R}^n)$*, si* $\beta > \alpha$ *entonces* $(I^\alpha f)(x)$ *es finito para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*. En particular si* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $(I^\alpha f)(x)$ *es finito para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *con* $0 < \alpha < n$*.*

Demostración. Supongamos que $\beta > \alpha$ y $|x| < R$, veamos que $|(I^\alpha f)(x)| < \infty$.

$$|(I^\alpha f)(x)| \leq \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \left(\int\limits_{|y|\leq 2R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy + \int\limits_{|y|>2R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \right) =: I + J,$$

para ver que I es finito, notemos que si realizamos el cambio de variable $z = x - y$ entonces $|z| = |x-y| \leq |x| + |y| \leq 3R$ para $|y| \leq 2R$. Como $|f(y)| \leq A$ para $|y| < 2R$ tenemos

$$|I| \leq \frac{A}{\gamma_n(\alpha)} \int\limits_{|y|\leq 2R} \frac{dy}{|x-y|^{n-\alpha}} = \frac{A}{\gamma_n(\alpha)} \int\limits_{|z|\leq 3R} \frac{dz}{|z|^{n-\alpha}} < \infty,$$

la última integral es finita pues $0 < n - \alpha < n$. Veamos que J es finito, como $f(y) = O(|y|^{-\beta})$ existe una constante $C > 0$ tal que $|f(y)| \leq C|y|^{-\beta}$. Además, para $|y| \geq 2R$ tenemos

$$|x-y| \geq |y| - |x| \geq |y| - R \geq |y| - \frac{|y|}{2} = \frac{|y|}{2},$$

así

$$|J| \leq C \int\limits_{|y|>2R} \frac{dy}{|y|^\beta |x-y|^{n-\alpha}} \leq C' \int\limits_{|y|>2R} \frac{dy}{|y|^{n+\beta-\alpha}} < \infty,$$

esta última integral existe pues $\beta - \alpha > 0$. Esto finaliza la prueba. $\square$

4.3. Transformada de Fourier del potencial de Riesz

En nuestra motivación al estudio de los potenciales de Riesz (Sección 3.1) definimos formalmente el Laplaciano fraccionario mediante la ecuación

$$\widehat{-\Delta^{-\frac{\alpha}{2}}}f(\xi) = (2\pi|\xi|)^{-\alpha}\widehat{f}(\xi),$$

además hallamos una función k_α tal que $I^\alpha = k_\alpha * f$ cumplía que

$$\widehat{(I^\alpha f)}(\xi) = (2\pi|\xi|)^{-\alpha}\widehat{f}(\xi). \tag{4.11}$$

Todo esto se hizo de una manera formal y nuestro objetivo en esta sección será mostrar rigurosamente (4.11). Esto se entenderá en el sentido distribucional como veremos pronto.

Dado un $a > 0$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ recordemos que el operador δ_a es definido por $(\delta_a f)(x) = f(ax)$. Sabemos que la función $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$ es un punto fijo de (4.1), entonces si definimos $g(x) = e^{-\pi a|x|^2} = (\delta_{\sqrt{a}}f)(x)$ del Teorema (4.1.1)(d) se sigue que

$$\widehat{g}(\xi) = a^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{a}} = a^{-\frac{n}{2}}g\left(\frac{\xi}{a}\right). \tag{4.12}$$

Teorema 4.3.1. *Sea $0 < \alpha < n$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Schwartz de $\mathbb{R}^n$. Entonces*

(a) La transformada de Fourier de $|x|^{\alpha-n}$ es $(2\pi)^{-\alpha}\gamma_n(\alpha)|x|^{-\alpha}$, la cuál se entiende en el sentido distribucional, i.e. si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n}(2\pi)^{-\alpha}\gamma_n(\alpha)|x|^{-\alpha}\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}|x|^{n-\alpha}\widehat{\varphi}(x)dx.$$

(b) Se cumple que $\widehat{I^\alpha f}(x) = (2\pi|x|)^{-\alpha}\widehat{f}(x)$ la cuál se entiende en el sentido distribucional, i.e. si $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n}(I^\alpha f)(x)\widehat{\varphi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}(2\pi)^{-\alpha}|x|^{-\alpha}\widehat{f}(x)\varphi(x)dx.$$

Demostración. (a) De (4.12) y la fórmula de multiplicación para la transformada de Fourier (4.3) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\pi a|x|^2}\widehat{\varphi}(x)dx = a^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{\frac{-\pi|x|^2}{a}}\varphi(x)dx, \tag{4.13}$$

si multiplicamos (4.13) por $a^{\frac{n-\alpha}{2}-1}$ e integramos con respecto a a sobre el semieje positivo, del teorema de Fubini se sigue que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_0^\infty e^{-\pi a|x|^2}a^{\frac{n-\alpha}{2}-1}da\right)\widehat{\varphi}(x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_0^\infty e^{\frac{-\pi|x|^2}{a}}a^{-\frac{\alpha}{2}-1}da\right)\varphi(x)dx.$$

Notemos que, realizando un cambio de variable podemos escribir las integrales internas como

$$\int\limits_0^\infty e^{-\pi a|x|^2}a^{\frac{n-\alpha}{2}-1}da=(\pi|x|^2)^{\frac{\alpha-n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right),$$

$$\int\limits_0^\infty e^{\frac{-\pi|x|^2}{a}}a^{-\frac{\alpha}{2}-1}da=\pi^{-\frac{\alpha}{2}}|x|^{-\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

en consecuencia

$$\pi^{\frac{\alpha-n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x|^{\alpha-n}\widehat{\varphi}(x)dx=\pi^{-\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x|^{-\alpha}\varphi(x)dx,$$

por lo tanto

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x|^{\alpha-n}\widehat{\varphi}(x)dx=(2\pi)^{-\alpha}\gamma_n(\alpha)\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x|^{-\alpha}\varphi(x)dx.$$

Note que esto implica que $\widehat{k_\alpha}(x)=(2\pi)^{-\alpha}|x|^{-\alpha}$.

(b) De (a) se sigue que

$$\frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|y|^{\alpha-n}f(x-y)dy=\frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{\psi}(y)|y|^{\alpha-n}dy=(2\pi)^{-\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(y)|y|^{-\alpha}dy,$$

donde $\widehat{\psi}(y)=f(x-y)$. De la definición de la transformada inversa de Fourier (4.4) obtenemos $\psi(y)=e^{2\pi ix\cdot y}\widehat{f}(y)$. Entonces

$$(I^\alpha f)(x)=\frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(x-y)|y|^{\alpha-n}dy=(2\pi)^{-\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi ix\cdot y}\widehat{f}(y)|y|^{-\alpha}dy,$$

multiplicando por $\widehat{\varphi}(x)$ e integrando sobre $\mathbb{R}^n$ con respecto a x, del teorema de Fubini y la fórmula de inversión de Fourier (4.4) tenemos

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(I^\alpha f)(x)\widehat{\varphi}(x)dx&=(2\pi)^{-\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi ix\cdot y}\widehat{f}(y)|y|^{-\alpha}\widehat{\varphi}(x)dydx\\&=(2\pi)^{-\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)|y|^{-\alpha}dy\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi ix\cdot y}\widehat{\varphi}(x)dx\\&=(2\pi)^{-\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)|y|^{-\alpha}\varphi(y)dy,\end{aligned}$$

esto nos muestra que $\widehat{I^\alpha f}(x) = (2\pi)^{-\alpha}|x|^{-\alpha}\widehat{f}(x)$.

$\square$

Este teorema nos demuestra de una manera rigurosa que

$$\widehat{k_\alpha}(x) = (2\pi)^{-\alpha}|x|^{-\alpha}, \qquad \widehat{I^\alpha f}(x) = (2\pi|x|)^{-\alpha}\widehat{f}(x). \tag{4.14}$$

El operador I^α tiene la propiedad de semigrupo, es decir, $I^\alpha I^\beta f = I^{\alpha+\beta} f$ para $\alpha, \beta > 0$ con $\alpha + \beta < n$. Esto se sigue fácilmente de (4.14), si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{I^\alpha(I^\beta f)}(x) &= (2\pi|x|)^{-\alpha}\widehat{I^\beta f}(x) \\
&= (2\pi|x|)^{-\alpha}(2\pi|x|)^{-\beta}\widehat{f}(x) \\
&= \widehat{I^{\alpha+\beta} f}(x).
\end{aligned}$$

4.4. Espacio de Lizorkin

Como la transformada de Fourier es un isomorfismo en el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nos surge la siguiente pregunta, ¿Existe algún subespacio de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ donde el operador I^α sea un automorfismo?.

Definición 4.4.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $X \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ un subespacio vectorial, decimos que f es un multiplicador si para todo $\varphi \in X$ se cumple que $f\varphi \in X$ y la aplicación $\varphi \mapsto f\varphi$ es continua de X a X.*

Definimos

$$\Psi(\mathbb{R}^n) := \{\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : (\partial^\alpha \psi)(0) = 0 \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}.$$

Es claro que $\Psi(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, más aún es un subespacio cerrado. Para ver esto, sea φ un elemento de la clausura de $\Psi(\mathbb{R}^n)$ y $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Psi(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi_n \to \varphi$, por definición para $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ se cumple que $\partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha \varphi$ y como $(\partial^\alpha \varphi_n)(0) = 0$ tenemos $\partial^\alpha(\varphi)(0) = 0$.
Por otra parte, de la regla del producto de Leibniz y de la definición del espacio de Schwartz se sigue que todo polinomio y toda función exponencial $g(\xi) = e^{-2\pi i h\cdot\xi}$ para $h \in \mathbb{R}^n$, es un multiplicador en el espacio $\Psi(\mathbb{R}^n)$.
La función $|\xi|^\alpha$ es un multiplicador de $\Psi(\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, esto se sigue del

Teorema de Taylor, ver por ejemplo [11, Teorema 2.8.4, p 70]
Definiremos el espacio de Lizorkin, el cuál será, el subespacio de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ donde el operador I^α es un automorfismo.

Definición 4.4.2. *Sea* $\Psi(\mathbb{R}^n) = \{\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : (\partial^\alpha \psi)(0) = 0$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$. *Definimos el espacio de Lizorkin* $\Phi(\mathbb{R}^n)$ *como la imagen del espacio* $\Psi(\mathbb{R}^n)$ *bajo la Transformada de Fourier, es decir,* $\Phi(\mathbb{R}^n) = \mathcal{F}(\Psi(\mathbb{R}^n))$ *donde* $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *es la transformada de Fourier* (4.1).

Sabemos que $\Psi(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y como la Transformada de Fourier es un automorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se sigue que $\Phi(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ isomorfo a $\Psi(\mathbb{R}^n)$.

Lema 4.4.1. *El espacio de Lizorkin* $\Phi(\mathbb{R}^n)$ *es el subespacio de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *ortogonal a todos los polinomios, i.e.*

$$\Phi(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \varphi(x)dx = 0 \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}.$$

Demostración. Si $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ entonces $\widehat{\varphi} \in \Psi(\mathbb{R}^n)$. Sabemos que los polinomios son multiplicadores en el espacio $\Psi(\mathbb{R}^n)$, de $\partial^\alpha \widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}[(-2\pi i x)^\alpha f](\xi)$ se sigue que

$$0 = \frac{\partial^\alpha \widehat{\varphi}(0)}{(-2\pi i)^\alpha} = \mathcal{F}(x^\alpha \varphi)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \varphi(x)dx,$$

esto demuestra el lema. □

Lema 4.4.2. *El espacio* $\Phi(\mathbb{R}^n)$ *no contiene funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto diferentes a* $\varphi(x) \equiv 0$.

Demostración. Si φ es una función infinitamente diferenciable con soporte compacto entonces $\widehat{\varphi}$ es una función analítica real y por tanto puede ser representada por su serie de Taylor, de hecho

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \frac{\xi^\beta}{\beta!}(\partial^\beta \widehat{\varphi})(0).$$

Si $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ entonces $\widehat{\varphi} \in \Psi(\mathbb{R}^n)$ y por definición $\partial^\beta \widehat{\varphi}(0) = 0$. En consecuencia $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y por lo tanto $\varphi(x) \equiv 0$. □

Veamos que el operador de Riesz I^α (4.2.1) es un automorfismo del espacio de Lizorkin $\Phi(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.4.1. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha < n$. El potencial de Riesz* (4.10) *es un automorfismo del espacio $\Phi(\mathbb{R}^n)$. Si $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ se cumple que*

$$\widehat{(I^\alpha \varphi)}(\xi) = |\xi|^{-\alpha}\widehat{\varphi}(\xi).$$

Demostración. Sea $\psi \in \Psi(\mathbb{R}^n)$, de (4.14) tenemos que $\widehat{(k_\alpha)}(\xi) = (2\pi|\xi|)^{-\alpha}$ en el sentido de distribuciones, es decir

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} k_\alpha(y)\widehat{\psi}(y)dy = (2\pi)^{-\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-\alpha}\psi(\xi)d\xi. \tag{4.15}$$

Sabemos que la función $g_h(x) = e^{2\pi i h\cdot x}$ es un multiplicador de $\Psi(\mathbb{R}^n)$ y así, del teorema (4.1.1)(c) se deduce que el espacio de Lizorkin es invariante bajo translaciones. Para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, sea $\widehat{\psi}(y) = \varphi(x-y)$, notemos que si $\psi \in \Psi(\mathbb{R}^n)$ entonces $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^n)$. Por definición de la transformada inversa de Fourier (4.4) $\psi(y) = e^{2\pi i x\cdot y}\widehat{\varphi}(y)$ y reemplazando en (4.15) tenemos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} k_\alpha(y)\varphi(x-y)dy = (2\pi)^{-\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |y|^{-\alpha}e^{2\pi i x\cdot y}\widehat{\varphi}(y)dy,$$

de (4.10) y la definición de Transformada inversa de Fourier obtenemos

$$(I^\alpha\varphi)(x) = \mathcal{F}^{-1}(|2\pi\xi|^{-\alpha}\widehat{\varphi}(\xi))(x). \tag{4.16}$$

La función $|\xi|^{-\alpha}$ es un multiplicador en el espacio $\Psi(\mathbb{R}^n)$ y además $\mathcal{F}^{-1}$ es un isomorfismo entre $\Psi(\mathbb{R}^n)$ y $\Phi(\mathbb{R}^n)$. De esta observación se sigue que la asignación $\varphi \mapsto \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha}\widehat{\varphi}(\xi))$ es un operador continuo de $\Phi(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo, en otras palabras, el operador de Riesz I^α es un operador lineal continuo del espacio de Lizorkin en sí mismo.
Veamos que I^α es sobreyectivo, sea $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ y defina $\phi = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{\alpha}\widehat{\varphi}(\xi))$. Nuevamente al ser $|\xi|^\alpha$ un multiplicador en $\Phi(\mathbb{R}^n)$ tenemos que $\phi \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, de (4.16) concluimos

$$I^\alpha\psi = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha}\widehat{\psi}(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi}) = \varphi,$$

esto concluye la prueba. □

Podemos considerar a (4.16) como la definición del potencial de Riesz (4.10) para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, incluso para los valores $n, n+2, n+4, \ldots$ los cuáles son polos del

coeficiente $\gamma_n(\alpha)$ (4.9).
Si consideramos la ecuación $(I^\alpha f)(x) = \varphi(x)$ y aplicamos formalmente la transformada de Fourier obtenemos $|2\pi\xi|^{-\alpha}\widehat{f}(\xi) = \widehat{\varphi}$ o equivalentemente $\widehat{f}(\xi) = |2\pi\xi|^{\alpha}\widehat{\varphi}$, aplicando la transformada inversa de Fourier concluimos de (4.16) que

$$f = \mathbb{D}^\alpha \varphi = I^{-\alpha}\varphi,$$

donde $\mathbb{D}^\alpha$ se define mediante la relación

$$\widehat{\mathbb{D}^\alpha \varphi}(\xi) = |\xi|^\alpha \widehat{\varphi}. \tag{4.17}$$

El operador $\mathbb{D}^\alpha$ es conocido como la *derivada fraccionaria de Riesz* de φ de orden α. Todo esto está bien justificado si tomamos a la función φ en el espacio de Lizorkin $\Phi(\mathbb{R}^n)$.
Para concluir este capítulo, recordemos que el Laplaciano fraccionario (4.6) se definió como

$$\widehat{-\Delta^{-\frac{\alpha}{2}}} f(\xi) = (2\pi|\xi|)^{-\alpha}\widehat{f}(\xi). \tag{4.18}$$

Como $(\widehat{I^\alpha f})(\xi) = (2\pi|\xi|)^{-\alpha}\widehat{f}$, formalmente de (4.18) tenemos

$$I^\alpha = -(\Delta^{-\frac{\alpha}{2}}). \tag{4.19}$$

5 Transformada de Radon

5.1. Motivación

Sea $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, pensaremos a $\mathcal{O}$ como una sección transversal de un organo humano. Supongamos que $\mathcal{O}$ es homogéneo y es recorrido por un haz de rayos X tal como se muestra en la siguiente figura.

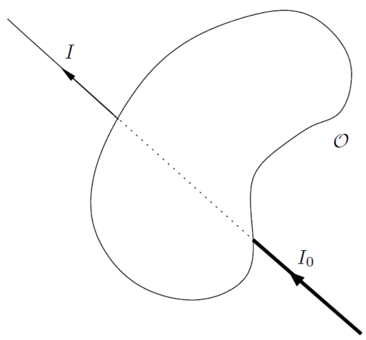

Figura 5.1: Haz de rayos X

Si I_0 e I denotan la intensidad del rayo antes y después de pasar por $\mathcal{O}$, entonces la siguiente relación entre ellos se satisface

$$I = I_0 e^{-\rho d},$$

donde d es la distancia recorrida por el rayo en el objeto y ρ es el coeficiente de atenuación (esté depende de la densidad y otras características físicas del objeto) de $\mathcal{O}$, para más detalles ver por ejemplo [12] y [13].
Más generalmente, si $\mathcal{O}$ es cualquier objeto cuya densidad y características físicas varían punto a punto, entonces el coeficiente de atenuación será una función definida en $\mathbb{R}^2$ y obtendríamos la relación

$$I = I_0 e^{\int_L \rho},$$

donde L es la recta realizada por la trayectoria del rayo y $\int_L \rho$ se entiende como la integral de línea de ρ sobre L. Como podríamos enviar el rayo X en cualquier dirección, la cantidad $\int_L \rho$ está definida para cualquier recta L, así definimos la *Transformada de Radon* de ρ como

$$(R\rho)(L) = \int_L \rho.$$

Nuestro objetivo es conocer la función ρ, así, estamos interesados en hallar una fórmula de inversión para R, es decir, escribir a ρ en términos de su transformada $R\rho$.
Primeramente trabajaremos por completo el caso tridimensional para posteriormente tratar el caso general, nos centraremos en el espacio de tres dimensiones por razones que serán claras más adelante, ver (5.4.2).

Pasemos a los detalles, dados $\gamma \in S^2$ y $t \in \mathbb{R}$, definimos el plano $P_{\gamma,t}$ como

$$P_{\gamma,t} := \{x \in \mathbb{R}^3 : x \cdot \gamma = t\}.$$

Así, parametrizamos un plano en $\mathbb{R}^3$ por un vector unitario γ ortogonal a el y por $t \in \mathbb{R}$, podemos pensar al parámetro t como la distancia del origen al plano.

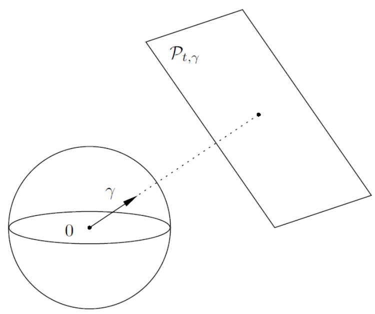

Figura 5.2: Plano en $\mathbb{R}^3$

Sean $E_1, E_2 \in S^2$ tal que $\{E_1, E_2, \gamma\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. Dado $x \in P_{\gamma,t}$ existen $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ con $x = t\gamma + u_1E_1 + u_2E_2$. Entonces para $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definimos

$$\int_{P_{\gamma,t}} f(x)dx := \int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1E_1 + u_2E_2)du_1du_2. \tag{5.1}$$

Notemos que esta definición es independiente de la elección de E_1, E_2, es decir, sean $E_1', E_2' \in S^2$ con $\{E_1', E_2', \gamma\}$ una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$, sea $A \in SO(3)$

con $A(E_1) = E_1'$ y $A(E_2) = E_2'$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1E_1' + u_2E_2')du_1du_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + A(u_1E_1 + u_2E_2))du_1du_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1E_1 + u_2E_2)du_1du_2,\end{aligned}$$

con base en lo anterior, definiremos la Transformada de Radon.

Definición 5.1.1. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ y $P_{\gamma,t}$ es un plano en $\mathbb{R}^3$, definimos su Transformada de Radon como*

$$(Rf)(P_{\gamma,t}) = \int_{P_{\gamma,t}} f(x)dx. \tag{5.2}$$

Entendemos (5.2) como (5.1).

Lema 5.1.1. *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $\gamma \in S^2$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{P_{\gamma,t}} f \right) dt.$$

Demostración. Sea $A \in SO(3)$ la rotación que envía la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a $\{\gamma, E_1, E_2\}$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^3} f(Ax)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x_1\gamma + x_2E_1 + x_3E_2)dx_1dx_2dx_3 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{P_{\gamma,x_1}} f \right) dx_1.\end{aligned}$$

□

Dado un plano $P_{\gamma,t}$ denotamos

$$(Rf)(\gamma, t) := (Rf)(P_{\gamma,t}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u)du,$$

así, podemos pensar a $R(f)$ como una función definida en el cilindro $S^2 \times \mathbb{R}$. Para hallar una fórmula de inversión para la transformada de Radon haremos uso de la transformada de Fourier (4.1), más concretamente.

Teorema 5.1.1. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ entonces $(Rf)(\gamma, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para cada $\gamma \in S^2$ fijo. Más aún*
$$\widehat{R}(f)_t(\gamma, s) = \widehat{f}(s\gamma). \tag{5.3}$$

La transformada de Fourier en el lado izquierdo de (5.3) es la transformada unidimensional para γ fijo y la transformada del lado derecho de (5.3) es la transformada tridimensional de la función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, por definición para cada $N \in \mathbb{N}$ existe una constante $C_N < \infty$ tal que

$$(1 + |t|)^N (1 + |u|)^N |f(t\gamma + u)| \leq C_N,$$

donde $u = u_1 E_1 + u_2 E_2$ y $\{\gamma, E_1, E_2\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$, es decir, u es ortogonal a γ. Integrando con respecto a u para $N \geq 3$ se sigue que

$$(1 + |t|)^N (Rf)(\gamma, t) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{C_N du}{(1 + |u|)^N} < \infty.$$

Usando que las derivadas de f cumplen la condición (5.1) por un argumento similar a este para las derivadas con respecto a t de $(Rf)(\gamma, t)$ obtenemos que $(Rf)(\gamma, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Mostremos (5.3), por definición

$$\widehat{R}(f)_t(\gamma, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1 E_1 + u_2 E_2) e^{-2\pi i s t} du_1 du_2 dt,$$

como $\gamma \cdot u = 0$ y $|\gamma| = 1$ podemos escribir (recordemos que $\{\gamma, E_1, E_2\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$)
$$e^{-2\pi i s t} = e^{-2\pi i s \gamma \cdot (t\gamma + u)},$$

en consecuencia

$$\begin{aligned}
\widehat{R}(f)(\gamma, s) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1 E_1 + u_2 E_2) e^{-2\pi i s \gamma \cdot (t\gamma + u_1 E_1 + u_2 E_2)} du_1 du_2 dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-2\pi i s \gamma \cdot x} dx \\
&= \widehat{f}(s\gamma),
\end{aligned}$$

de la igualdad uno a la dos se aplicó una rotación que lleva los vectores $\{\gamma, E_1, E_2\}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Esto finaliza la prueba. $\square$

Para obtener una fórmula de inversión para la transformada de Radon necesitaremos introducir la *Transformada dual de Radon*. La transformada de Radon toma una función definida en $\mathbb{R}^3$ y nos devuelve la función (Rf) que esta definida en el conjunto de planos en $\mathbb{R}^3$, la transformada dual de Radon tomará una función definida en el conjunto de planos (equivalentemente $S^2 \times \mathbb{R}$) y nos devolverá una función definida en $\mathbb{R}^3$.

Definición 5.1.2. *Si $\varphi : S^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definimos la Transformada dual de Radon de φ mediante la relación*

$$(R^*\varphi)(x) = \int\limits_{S^2} \varphi(\gamma, x \cdot \gamma) d\gamma. \tag{5.4}$$

Notemos que $x \in P_{\gamma,t}$ si y sólo si $x \cdot \gamma = t$, así podemos escribir a (5.4) como

$$(R^*\varphi)(x) = \int\limits_{x \in P_{\gamma,t}} \varphi(\gamma, t) d\gamma,$$

la razón del término dual será explicada en la sección 4.4, con esta definición procederemos a mostrar la fórmula de inversión.

Teorema 5.1.2. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, entonces*

$$\Delta(R^*R(f)) = -8\pi^2 f,$$

donde $\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ es el operador Laplaciano.

Demostración. De la fórmula de inversión para la transformada de Fourier (4.5) y (5.3), para $\gamma \in S^2$ fijo tenemos

$$(Rf)(\gamma, t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(s\gamma) e^{2\pi i t s} ds, \tag{5.5}$$

De (5.4) y (5.5) se sigue que

$$(R^*R)(f)(x) = \int\limits_{S^2} (Rf)(\gamma, x \cdot \gamma) d\gamma = \int\limits_{S^2} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(s\gamma) e^{2\pi i s x \cdot \gamma} ds d\gamma, \tag{5.6}$$

como $\gamma \in S^2$ vale que

$$\Delta(e^{2\pi i s x \cdot \gamma}) = (-4\pi^2 s^2) e^{2\pi i s x \cdot \gamma}, \tag{5.7}$$

de la regla de Leibniz para la diferenciación bajo el signo integral, (5.7) y (5.6) se sigue que

$$\Delta(R^*R(f))(x) = \int\limits_{S^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s\gamma)\Delta(e^{2\pi i x\cdot\gamma s})dsd\gamma$$
$$= -4\pi^2 \int\limits_{S^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s\gamma)s^2 e^{2\pi i x\cdot\gamma s}dsd\gamma,$$

la relación $\int_{S^2}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s\gamma)s^2e^{2\pi ix\cdot\gamma s}dsd\gamma = 2\int_{S^2}\int_0^{\infty}\widehat{f}(s\gamma)s^2e^{2\pi ix\cdot\gamma s}dsd\gamma$ implica

$$\Delta(R^*R(f))(x) = -8\pi^2 \int\limits_{S^2}\int\limits_{0}^{\infty} \widehat{f}(s\gamma)e^{2\pi i x\cdot\gamma s}s^2dsd\gamma$$
$$= -8\pi^2 f(x),$$

esta última igualdad se sigue de (2.3) y de la fórmula de inversión para la transformada de Fourier (4.5), más concretamente

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \widehat{f}(y)e^{2\pi i x\cdot y}dy = \int\limits_{S^2}\int\limits_{0}^{\infty} \widehat{f}(s\gamma)e^{-2\pi i x\cdot s\gamma}s^2dsd\gamma,$$

lo que finaliza la prueba. □

5.2. Transformada de Radon

Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Schwartz de $\mathbb{R}^n$, dado un $\theta \in S^{n-1}$ y $t \in \mathbb{R}$ un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ es de la forma $\xi = \{y \in \mathbb{R}^n : y\cdot\theta = t\}$.

Definición 5.2.1. *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y ξ un hiperplano en $\mathbb{R}^n$. Definimos la Transformada de Radon de f en ξ como*

$$(Rf)(\xi) = \int\limits_{\xi} f(x)dx. \tag{5.8}$$

Del cambio de variable $x = t\theta + u$ podemos escribir a (5.8) como

$$(Rf)(\theta,t) := \int\limits_{\theta^{\perp}} f(t\theta+u)du, \tag{5.9}$$

donde $\theta^{\perp}$ es el complemento ortogonal a θ bajo el producto interno estándar. Inmediatamente notamos que $(Rf)(\theta,t) = (Rf)(-\theta,-t)$. En el estudio de la transformada de Fourier se demuestra que $\mathcal{F}(f \circ \rho)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\rho\xi)$ para $\rho \in O(n)$ (4.1.1)(f), la transformada de Radon cumplirá la misma propiedad.

Proposición 5.2.1. *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la transformada de Radon conmuta con movimientos rígidos de $\mathbb{R}^n$. Es decir, si $A \in SO(n)$ y definimos $\rho(x) = Ax + y$ para $y \in \mathbb{R}^n$, entonces $(R(f \circ \rho))(\xi) = (Rf)(\rho\xi)$ donde $\rho\xi = \{\rho x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \theta = t\}$.*

Demostración. Si realizamos el cambio de variable $u = \rho x$ tenemos

$$\begin{aligned}(R(f \circ \rho))(\xi) &= \int_{\xi} (f(\rho x))dx \\ &= \int_{\rho\xi} f(u)du \\ &= (Rf)(\rho\xi).\end{aligned}$$

□

En particular, si tomamos $b = 0$ obtenemos $\rho(x) = Ax$ y en consecuencia

$$(R(f \circ \gamma))(\theta,t) = (Rf)(\gamma\theta,t). \tag{5.10}$$

5.3. Una fórmula de inversión usando análisis fraccionario

5.3.1. Caso radial

Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Queremos resolver la ecuación

$$Rf = \varphi,$$

es decir, escribir a la función f en términos de su transformada de Radon. Primero supongamos que f es una función radial, *i.e.* $f(x) \equiv f(|x|)$, esto significa que $f(x) = f(y)$ si $|x| = |y|$. Sea $\theta \in S^{n-1}$ y $t \in \mathbb{R}$, por (5.9)

$$(Rf)(\theta,t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(|t\theta + v|)dv = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(|t\gamma e_n + \gamma u|)du = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(|te_n + u|)du,$$

la primera igualdad se sigue del cambio de variable $v = \gamma u$ donde $\gamma \in SO(n)$ con $\gamma e_n = \theta$, la segunda igualdad es consecuencia de la propiedad $|\gamma x| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Usando coordenadas polares (2.3) podemos escribir

$$(Rf)(\theta,t) = \int_0^\infty s^{n-2} ds \int_{S^{n-2}} f(|te_n + s\theta|) d\theta,$$

estamos identificando a θ con la tupla $(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, 0)$. Como $\theta \in S^{n-2}$ se cumple que $\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i^2 = 1$ y así

$$\begin{aligned} |te_n + s\theta| &= |(s\theta_1, \ldots, s\theta_{n-1}, t)| \\ &= \sqrt{s^2\theta_1^2 + \ldots + s^2\theta_{n-1}^2 + t^2} \\ &= \sqrt{s^2 + t^2}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} (Rf)(\theta,t) &= \int_0^\infty s^{n-2} ds \int_{S^{n-2}} f(\sqrt{t^2+s^2}) d\theta \\ (Rf)(\theta,t) &= \sigma_{n-2} \int_0^\infty s^{n-2} f(\sqrt{s^2+t^2}) ds. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Proposición 5.3.1. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es una función radial, entonces $(Rf)(\theta,t) \equiv \varphi(t)$, donde φ es una función par definida por*

$$\varphi(t) = \sigma_{n-2} \int_{|t|}^\infty f(r)(r^2 - t^2)^{\frac{n-3}{2}} r dr. \tag{5.12}$$

Demostración. Haciendo el cambio de variable $r = \sqrt{s^2+t^2}$ en (5.11) obtenemos

$$\begin{aligned} (Rf)(\theta,t) &= \sigma_{n-2} \int_{|t|}^\infty f(r)(r^2 - t^2)^{\frac{n-2}{2}} \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - t^2}} \\ &= \sigma_{n-2} \int_{|t|}^\infty f(r)(r^2 - t^2)^{\frac{n-3}{2}} r dr, \end{aligned}$$

lo que termina la demostración. □

Teorema 5.3.1. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces la ecuación* (5.3.1) *tiene la solución*

$$f(r) = \pi^{\frac{(1-n)}{2}} (\mathcal{D}_-^{\frac{n-1}{2}} \varphi(\sqrt{\cdot}))(r^2), \tag{5.13}$$

donde $\mathcal{D}_-^{\frac{n-1}{2}}$ es la derivada fraccionaria (3.11).

Demostración. Note que mediante el cambio de variable $u = r^2$, (5.12) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{t^2}^{\infty} f(\sqrt{u})(u - t^2)^{\frac{n-1}{2}-1} du \\ \varphi(\sqrt{t}) &= \pi^{\frac{n-1}{2}} (I_-^{\frac{n-1}{2}} f(\sqrt{\cdot}))(t), \end{aligned} \tag{5.14}$$

en consecuencia, por (3.14) obtenemos

$$f(r) = \pi^{\frac{1-n}{2}} (\mathcal{D}_-^{\frac{n-1}{2}} \varphi(\sqrt{\cdot}))(r^2), \tag{5.15}$$

lo que finaliza la prueba. □

La fórmula (5.15) es la fórmula de inversión para la transformada de Radon cuando f es una función radial.

5.3.2. Caso arbitrario

Hallaremos una fórmula de inversión para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ arbitraria resolviendo la ecuación

$$(Rf)(\theta, t) = \varphi(\theta, t), \tag{5.16}$$

definamos para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo la función $f_x(y) = f(x + y)$. Veamos que $(Rf_x)(\theta, t) = \varphi(\theta, t + x \cdot \theta)$, en efecto

$$\begin{aligned} \varphi(\theta, t + x \cdot \theta) &= \int_{\theta^\perp} f(t\theta + (x \cdot \theta)\theta + u) du \\ &= \int_{\theta^\perp} f(t\theta + x + s) ds \\ &= \int_{\theta^\perp} f_x(t\theta + s) ds = (Rf_x)(\theta, t), \end{aligned} \tag{5.17}$$

de (2.4) y (5.17) se sigue que

$$\int_{SO(n)} (Rf_x)(\gamma\theta, t)d\gamma = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \varphi(\theta, t + x \cdot \theta)d\theta. \tag{5.18}$$

Definimos para $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$

$$(M_t^*\varphi)(x) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \varphi(\theta, t + x \cdot \theta)d\theta, \tag{5.19}$$

nótese que (5.19) es el promedio de la función φ sobre todos los hiperplanos a distancia $|t|$ de x.

Lema 5.3.1. *La expresión* $\int_{SO(n)}(Rf_x)(\gamma\theta, t)d\gamma$ *es la transformada de Radon de la función radial* $\psi(y) = \int_{SO(n)} f_x(\gamma y)d\gamma$ *.*

Demostración. Sea $\psi(y) = \int_{SO(n)} f_x(\gamma y)d\gamma$. Primero mostremos que ψ es radial, sean $z, y \in \mathbb{R}^n$ con $|z| = |y|$, entonces existe $\beta \in SO(n)$ con $\beta z = y$. Como la medida de Haar es invariante a izquierda obtenemos

$$\psi(y) = \int_{SO(n)} f_x(\gamma y)d\gamma = \int_{SO(n)} f_x(\gamma\beta z)d\gamma = \int_{SO(n)} f_x(\gamma z)d\gamma = \psi(z),$$

usando que $R(\int_D f(x, \cdot)dx)(\theta, t) = \int_D R(f(x, \cdot))(\theta, t)dx$ y (5.10) tenemos

$$(R\psi)(\theta, t) = \int_{SO(n)} (R(f_x \circ \gamma))(\theta, t)d\gamma = \int_{SO(n)} (Rf_x)(\gamma\theta, t)d\gamma,$$

esto muestra que

$$R(\psi)(\theta, t) = \int_{SO(n)} (Rf_x)(\gamma\theta, t).$$

$\square$

Si hacemos $y = ru$ con $u \in S^{n-1}$, del Teorema (2.4) se sigue que

$$\psi(y) = \int_{SO(n)} f_x(r\gamma u)d\gamma = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{S^{n-1}} f_x(r\theta)d\theta,$$

definimos para $r > 0$

$$f_0(r) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{S^{n-1}} f(x + r\theta) =: (M_x f)(r), \tag{5.20}$$

notemos que $\lim_{r\to 0}(M_x f)(r) = f(x)$. Del Teorema (5.3.1) podemos escribir a (5.18) usando (5.20) y (5.19) como
$$R(f_0) = M_t^* \varphi.$$

Teorema 5.3.2. *La solución a la ecuación* (5.16) *viene dada por*
$$f(x) = \pi^{(1-n)/2} \lim_{r\to 0} (\mathcal{D}_-^{(n-1)/2} (M_{\sqrt{\cdot}}^* Rf)(x))(r).$$

Demostración. Sabemos que $R(f_0)(\theta, t) = M_t^* \varphi$ donde f_0 es la función definida en (5.20) y M_t^* en (5.19). La función f_0 es radial, así de (5.12) se sigue que
$$M_t^* \varphi = \sigma_{n-2} \int_{|t|}^{\infty} f_0(r)(r^2 - t^2)^{(n-3)/2} r dr,$$

como $\varphi = Rf$, de (5.14) tenemos
$$\begin{aligned} (M_t^* Rf)(x) &= \sigma_{n-2} \int_{|t|}^{\infty} (M_x f)(r)(r^2 - t^2)^{(n-3)/2} r dr \\ &= \pi^{(n-1)/2} (I^{(n-1)/2} (M_{\sqrt{\cdot}} f))(t^2), \end{aligned} \tag{5.21}$$

en consecuencia, por (5.15) obtenemos
$$(M_x f)(r) = \pi^{(1-n)/2} (D_-^{(n-1)/2} (M_{\sqrt{\cdot}}^* Rf)(x))(r).$$

Tomando límite cuando $r \to 0$ recuperamos la función f, es decir
$$f(x) = \pi^{(1-n)/2} \lim_{r\to 0} (\mathcal{D}_-^{(n-1)/2} (M_{\sqrt{\cdot}}^* Rf)(x))(r),$$

lo que finaliza la prueba. $\square$

5.4. Una fórmula de inversión usando potenciales de Riesz

Recordemos que un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ esta dado por $\xi = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \theta = t\}$ con $\theta \in S^{n-1}$ y $t \in \mathbb{R}$.

Definición 5.4.1. *Sea φ una función definida en el cilindro $S^{n-1} \times \mathbb{R}$, haciendo $t = 0$ en (5.19) definimos la Transformada dual de Radon como*

$$(R^*\varphi)(x) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \varphi(\theta, x \cdot \theta) d\theta.$$

La transformada dual $R^*\varphi$ se puede interpretar como la integral de φ sobre todos los hiperplanos que pasan por x.

Observación 5.4.1. *El término dual se justifica del siguiente hecho, el cuál no demostraremos.*
Notemos que $R : V_1 \to V_2$, $R^* : V_2 \to V_1$ y $(Rf, g)_{V_2} = (f, R^*g)_{V_1}$, donde $V_1 = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dotado con el producto interno

$$(f, g)_{V_1} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx,$$

y $V_2 = \mathcal{S}(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ dotado con el producto interno

$$(\varphi, \psi)_{V_2} = \int_{\mathbb{R}} \int_{S^{n-1}} \varphi(\gamma, t)\psi(\gamma, t) d\gamma dt.$$

De (5.20) y tomando $t = 0$ en (5.21) se sigue que

$$\begin{aligned} (R^*Rf)(x) &= \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}} \int_0^\infty r^{n-2} dr \int_{S^{n-1}} f(x + r\theta) d\theta \\ &= \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|} dy =: (Hf)(x), \end{aligned} \tag{5.22}$$

el paso de la primera a la segunda igualdad se sigue de

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x + u)}{|u|} du = \int_0^\infty r^{n-1} dr \int_{S^{n-1}} \frac{f(x + r\theta)}{r} d\theta.$$

Definimos el operador H por $Hf = R^*Rf$, de (5.22) tenemos

$$Hf = R^*Rf = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-1} I^{n-1} f = c_n I^{n-1} f, \tag{5.23}$$

donde $c_n = \Gamma(n/2)\pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-1}$ y $I^{n-1}f$ es el operador potencial de Riesz (4.2.1).
De (4.19), $I^\alpha = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$ y así, podemos invertir los operadores R, R^* de una

manera formal en términos de la derivada fraccional de Riesz (4.17). Como $H = R^*R$ obtenemos las fórmulas de inversión

$$\begin{aligned} R^{-1} &= H^{-1}R^* = c_n^{-1}(-\Delta)^{\frac{n-1}{2}}R^*, \\ (R^*)^{-1} &= RH^{-1} = c_n^{-1}R(-\Delta)^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Observación 5.4.2. *De la fórmula de inversión para la transformada de Radon* (5.24) *es claro porque motivamos nuestro trabajo en el caso $n = 3$, ya que esta inversa queda descrita por el operador Laplaciano.*

Tabla de símbolos

Símbolo	**Definición**	**Página**
S^{n-1}	Esfera n-dimensional	1
$O(n)$	Grupo de matrices ortogonales	1
$SO(n)$	Grupo especial ortogonal	1
$(x)_n$	Símbolo de Pochhammer	1
$\mathbb{R}_+$	Números positivos	1
$f * g$	Convolución de las funciones f y g	1
$C^k(\mathbb{R}^n)$	Funciones de clase C^k	1
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	Espacio de Schwartz de $\mathbb{R}^n$	1
$\mathbb{N}_0^n$	Multi-índices	1
$C_\beta(\mathbb{R}^n)$		1
$B(a,b)$	Función Beta de parámetro a,b	6
$\Gamma(a)$	Función Gamma	7
σ_{n-1}	Areá superficial de la esfera n-dimensional	10
I_{a+}^α, I_{b-}^α	Integrales fraccionarias de Riemann-Liouville	12
$\mathcal{D}_{a+}^\alpha, \mathcal{D}_{b-}^\alpha$	Derivadas fraccionarias de Riemann-Liouvile	14, 16
I_-^α, I_+^α	Integrales fraccionarias de Riemann-Liouville	16
$\widehat{f}$, $\mathcal{F}(f)$	Transformada de Fourier de f	21
$\check{f}$, $\mathcal{F}^{-1}(f)$	Transformada Inversa de Fourier de f	23
Δf	Laplaciano de f	23
k_α	Kernel de Riesz	24
$I^\alpha f$	Potencial de Riesz	24
$\Psi(\mathbb{R}^n)$		28

Símbolo	**Definición**	**Página**
$\Phi(\mathbb{R}^n)$	Espacio de Lizorkin	29
$\mathbb{D}^\alpha$	Derivada fraccionaria de Riesz	31
Rf	Transformada de Radon de f	35,38
R^*f	Transformada Dual de Radon de f	37,44

Índice alfabético

Bibliografía

[1] S. R. Deans, *The Radon transform and some of its applications.* Courier Corporation, 2007.

[2] E. M. Stein and R. Shakarchi, *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces.* Princeton University Press, 2009.

[3] G. B. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications.* John Wiley & Sons, 2013.

[4] J. Faraut, *Analysis on Lie groups: an introduction*, vol. 110. Cambridge University Press, 2008.

[5] S. Sternberg, *Group theory and physics.* Cambridge University Press, 1995.

[6] R. E. Castillo and H. Rafeiro, *An introductory course in Lebesgue spaces.* Springer, 2016.

[7] G. Grubb, *Distributions and operators*, vol. 252. Springer Science & Business Media, 2008.

[8] J. Lukeš, H. Malý, Jan (Trad) Rafeiro, and V. Andres, *Medidas e integrales.* Editorial PUJ, 2017.

[9] B. Rubin, *Introduction to Radon transforms*, vol. 160. Cambridge University Press, 2015.

[10] G. Chacón, H. Rafeiro, and J. C. Vallejo, *Functional Analysis: A Terse Introduction.* Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2016.

[11] J. J. Duistermaat and J. A. Kolk, *Multidimensional real analysis I: differentiation*, vol. 86. Cambridge University Press, 2004.

[12] D. R. McAlister, "Gamma ray attenuation properties of common shielding materials," *PG Research Foundation, University Lane Lisle, IL*, vol. 60532, 2012.

[13] G. Nelson and D. Reilly, "Gamma-ray interactions with matter," *Passive non-destructive analysis of nuclear materials*, pp. 27–42, 1991.