

TESIS  
Carrera de Finanzas

# Uso de redes neuronales para la selección óptima de portafolios de inversión

Angel Moreno Moreno<sup>1</sup>  
Gabriel Ignacio Penagos Londoño<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Estudiante Pregrado en Finanzas, Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas, Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia.

<sup>2</sup> Tutor, Departamento de Administración, Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia.

## Abstract

The theory and implementation of the classical Markowitz portfolio optimization model in Python is presented, compared with the optimal portfolios obtained through artificial neural networks, considering two different architectures for the network. The portfolios are optimized using both methods for different time windows, which include the periods: pre-pandemic, pandemic, post-pandemic, and the entire period. For each portfolio, the optimal weights, expected return, volatility, Sharpe ratio, and modified Herfindahl index are calculated. It is found that the portfolios optimized using the Markowitz method perform better in stable periods, while those optimized using neural networks perform better during periods of high volatility.

**Keywords:** Neural networks, Markowitz, portfolio optimization.

## Resumen

Se presenta la teoría e implementación en Python del modelo clásico de optimización de portafolios de Markowitz, comparado con los portafolios óptimos obtenidos mediante redes neuronales artificiales, considerando dos arquitecturas diferentes para la red. Los portafolios se optimizan mediante ambos métodos para diferentes ventanas temporales, que incluyen los periodos: prepandemia, pandemia, pospandemia y el periodo completo. Para cada portafolio, se calculan sus pesos óptimos, rendimiento esperado, volatilidad, ratio de Sharpe y el índice de Herfindahl modificado. Se encuentra que los portafolios optimizados por el método de Markowitz presentan mejores métricas en periodos estables, mientras que los optimizados por las redes neuronales se desempeñan mejor en periodos de alta volatilidad.

**Palabras clave:** Redes neuronales, Markowitz, optimización de portafolios.

## 1 Introducción

La selección óptima de portafolios de inversión es uno de los temas más importantes y desafiantes en el ámbito de las finanzas. Desde que Harry Markowitz presentó su teoría de selección de portafolios en 1952, el enfoque de optimización basado en el equilibrio entre riesgo y retorno ha sido un pilar fundamental en la toma de decisiones financieras

(H. Markowitz, 1952). El modelo de Markowitz se basa en la construcción de una frontera eficiente que ofrece a los inversionistas una combinación óptima de activos que maximiza el retorno esperado para un nivel dado de riesgo (H. M. Markowitz, 1959). Sin embargo, a pesar de su amplio reconocimiento y uso, esta teoría presenta limitaciones significativas, especialmente en mercados financieros que son inherentemente complejos y dinámicos (Merton, 1972).

En las últimas décadas, los avances tecnológicos y el acceso a grandes cantidades de datos han abierto la puerta al uso de técnicas de inteligencia artificial, como las redes neuronales, en la selección y optimización de portafolios. A diferencia del modelo de Markowitz, que se basa en la suposición de relaciones lineales y distribuciones normales de los retornos, las redes neuronales tienen la capacidad de modelar relaciones no lineales y de adaptarse a patrones complejos en los datos financieros. Esto permite ofrecer soluciones más flexibles y precisas en la identificación de estrategias de inversión óptimas (Won & Kim, 2006; Fernandez, Del Jesus, & Herrera, 2006).

La implementación de redes neuronales en la selección de portafolios representa un enfoque innovador que tiene el potencial de superar las limitaciones de la teoría clásica de Markowitz. Mientras que el modelo de Markowitz depende de estimaciones precisas de medias, varianzas y covarianzas, que son inherentemente difíciles de predecir en mercados volátiles, las redes neuronales pueden adaptarse y aprender de datos históricos, permitiendo un ajuste dinámico a las condiciones cambiantes del mercado (Bahrammirzaee, 2010). Esta capacidad de aprendizaje y adaptación ofrece una alternativa poderosa y promete resultados más robustos en la optimización de portafolios (Heaton, Polson, & Witte, 2017).

Esta tesis tiene como objetivo principal explorar y contrastar el uso de redes neuronales para la selección óptima de portafolios de inversión frente al enfoque clásico de Markowitz. Se analizarán los fundamentos teóricos de ambos modelos, se evaluarán sus ventajas y limitaciones, y se presentarán ejemplos empíricos que permitan contrastar los del proceso de optimización de portafolios bajo los dos enfoques.

En última instancia, esta investigación busca contribuir a una mejor comprensión de cómo las redes neuronales pueden integrarse en la gestión de inversiones y ofrecer soluciones en el procesos para la selección de portafolios, proporcionando a los inversionistas herramientas más avanzadas y adaptativas para navegar en un entorno financiero cada vez más complejo y competitivo (Hastie, Tibshirani, & Friedman, 2009).

Con el fin de alcanzar el objetivo propuesto, en la siguiente sección se presentan los fundamentos de la teoría de selección óptima de portafolios de Markowitz, seguida de los conceptos centrales sobre redes neuronales artificiales.

## 2 Marco teórico

### 2.1 Teoría de portafolio de Markowitz

La teoría de portafolio desarrollada por Harry Markowitz en 1952 (H. M. Markowitz, 1952), considera un enfoque matemático y estadístico para la construcción de portafolios de inversión óptimos. El objetivo principal es maximizar el rendimiento esperado del portafolio dado un nivel de riesgo específico o, alternativamente, minimizar el riesgo para un rendimiento esperado determinado. Para lograr esto, la teoría enfatiza la importancia de la diversificación, considerando que al invertir en una variedad de activos que no se mueven de manera idéntica, se puede reducir el riesgo total del portafolio.

El rendimiento esperado del portafolio, es calculado como la media ponderada de los rendimientos esperados de los activos individuales, mientras que el riesgo se mide por la varianza o desviación estándar de dichos rendimientos. Un elemento clave en esta teoría es la correlación entre los retornos de los activos en el portafolio, considerando que activos con baja o negativa correlación contribuyen más a la reducción del riesgo global.

Otro concepto importante en esta teoría es el de *frontera eficiente*, que hace referencia al conjunto de portafolios que ofrecen el mayor rendimiento posible para cada nivel de riesgo, o el menor riesgo posible para cada nivel de rendimiento.

Los portafolios que conforman esta frontera se determinan al resolver el problema de optimización con restricciones asociado. A continuación se presenta la formulación matemática correspondiente.

#### 2.1.1 Formulación matemática

El **rendimiento esperado** de un portafolio es la media ponderada de los retornos esperados de los activos individuales:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) \quad (1)$$

donde:

- $E(R_p)$ : rendimiento esperado del portafolio.
- $w_i$ : proporción de la inversión en el activo  $i$ .
- $E(R_i)$ : retorno esperado del activo  $i$ .
- $n$ : número total de activos.

La **varianza del portafolio**, que mide el riesgo, se calcula considerando tanto la varianza de los rendimientos de los activos individuales como las covarianzas entre ellos:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{Cov}(R_i, R_j) \quad (2)$$

donde:

- $\sigma_p^2$ : varianza del portafolio.
- $\text{Cov}(R_i, R_j)$ : es la covarianza entre los retornos de los activos  $i$  y  $j$ .

La **desviación estándar del portafolio** es la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} \quad (3)$$

En general, si se considera un mercado compuesto por  $n$  activos, y se conforma un portafolio a partir de invertir una proporción  $w_i$  en el activo con retorno  $R_i$ , esto para  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces, considerando la notación:

- Vector de pesos:  $\mathbf{w}^T = [w_1, w_2, \dots, w_n]$
- Vector de rendimientos esperados:  $\mathbf{E}(\mathbf{R})^T = [E(R_1), E(R_2), \dots, E(R_n)]$

- Matriz de covarianzas:  $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$

se tiene que el rendimiento esperado del portafolio es:

$$E(R_p) = \mathbf{w}^T \mathbf{E}(\mathbf{R}) \quad (4)$$

y el riesgo del portafolio (varianza) es:

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad (5)$$

### 2.1.2 Frontera Eficiente

Como se menciono al inicio, la frontera eficiente representa el conjunto de portafolios que ofrecen el mayor rendimiento esperado para un nivel dado de riesgo, o el menor riesgo para un nivel dado de rendimiento, y se obtiene al resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min (\sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}) \quad (6)$$

sujeto a:

$$R_p = \mathbf{w}^T \mathbf{E}(\mathbf{R}) \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad \text{o de forma matricial} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \quad (8)$$

Vemos que el objetivo es minimizar el riesgo total del portafolio (medido por la varianza) sujeto a que tenga un rendimiento esperado especificado  $R_p$  y que las proporciones de inversión sumen a uno. Este es un problema de programación cuadrática que se puede resolver utilizando multiplicadores de Lagrange.

El Lagrangiano para este problema es:

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda, \gamma) = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} - \lambda(\mathbf{w}^T \mathbf{E}(\mathbf{R}) - R_p) - \gamma(\mathbf{w}^T \mathbf{1} - 1) \quad (9)$$

donde:  $\lambda$  y  $\gamma$  son los multiplicadores de Lagrange asociados con las restricciones de rendimiento esperado y suma de proporciones de inversión, respectivamente.

Para encontrar los valores óptimos, derivamos la función Lagrangiana respecto a  $\mathbf{w}$ ,  $\lambda$ , y  $\gamma$ , obteniendo:

- Derivada respecto a  $\mathbf{w}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = 2\Sigma \mathbf{w} - \lambda \mathbf{E}(\mathbf{R}) - \gamma \mathbf{1} \quad (10)$$

- Derivada respecto a  $\lambda$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(\mathbf{w}^T \mathbf{E}(\mathbf{R}) - R_p) \quad (11)$$

- Derivada respecto a  $\gamma$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = -(\mathbf{w}^T \mathbf{1} - 1) \quad (12)$$

El sistema de ecuaciones generado a partir de igualar a cero de las derivadas (10) a (12) es:

$$2\Sigma \mathbf{w} = \lambda \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \gamma \mathbf{1} \quad (13)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{E}(\mathbf{R}) = R_p \quad (14)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \quad (15)$$

Despejando  $\mathbf{w}$  de la ecuación (13):

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \Sigma^{-1} (\lambda \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \gamma \mathbf{1}) \quad (16)$$

y sustituyendo en la ecuación (14) tenemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{R})^T \left( \frac{1}{2} \Sigma^{-1} (\lambda \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \gamma \mathbf{1}) \right) = R_p \quad (17)$$

luego,

$$\frac{1}{2} \left( \lambda \mathbf{E}(\mathbf{R})^T \Sigma^{-1} \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \gamma \mathbf{E}(\mathbf{R})^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} \right) = R_p \quad (18)$$

Ahora, haciendo lo mismo para la ecuación  $\mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1$  tenemos:

$$\mathbf{1}^T \left( \frac{1}{2} \Sigma^{-1} (\lambda \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \gamma \mathbf{1}) \right) = 1 \quad (19)$$

luego,

$$\frac{1}{2} (\lambda \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \gamma \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}) = 1 \quad (20)$$

Esto resulta en el siguiente sistema de ecuaciones para  $\lambda$  y  $\gamma$ :

$$\frac{1}{2} (\lambda A + \gamma B) = R_p \quad (21)$$

$$\frac{1}{2} (\lambda B + \gamma C) = 1 \quad (22)$$

donde:

- $A = \mathbf{E}(\mathbf{R})^T \Sigma^{-1} \mathbf{E}(\mathbf{R})$
- $B = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{E}(\mathbf{R})$
- $C = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones:

$$\lambda A + \gamma B = 2R_p \quad (23)$$

$$\lambda B + \gamma C = 2 \quad (24)$$

Multiplicando la primera ecuación por  $C$  y la segunda por  $B$ , obtenemos:

$$\lambda AC + \gamma BC = 2R_p C \quad (25)$$

$$\lambda B^2 + \gamma BC = 2B \quad (26)$$

Restando estas dos ecuaciones:

$$\lambda(AC - B^2) = 2R_p C - 2B \quad (27)$$

$$\lambda = \frac{2(R_p C - B)}{AC - B^2} \quad (28)$$

Sustituyendo  $\lambda$  en la ecuación (24):

$$\frac{2(R_p C - B)B}{AC - B^2} + \gamma C = 2 \quad (29)$$

$$\gamma = \frac{2(AC - R_p B)}{AC - B^2} \quad (30)$$

Finalmente, sustituimos  $\lambda$  y  $\gamma$  en:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \Sigma^{-1} (\lambda \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \gamma \mathbf{1}) \quad (31)$$

y tenemos:

$$\mathbf{w} = \Sigma^{-1} \left[ \frac{(R_p C - B)}{AC - B^2} \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \frac{(AC - R_p B)}{AC - B^2} \mathbf{1} \right] \quad (32)$$

Esta es la expresión para las proporciones de inversión en cada activo para el portafolio que minimiza el riesgo dado un rendimiento esperado  $R_p$ . Estos pesos caracterizan los portafolios en la frontera eficiente, la cual se representa en la figura 1.

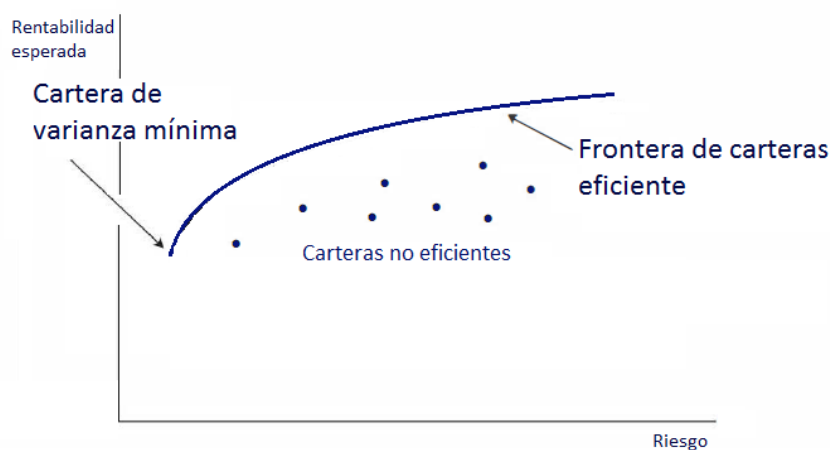


Figura 1: Representación de la frontera eficiente.

A partir de los trabajos de H. M. Markowitz (1952), Chong and Phillips (2013), Heaton et al. (2017) y Zhang, Zohren, and Roberts (2019), queda claro que el modelo propuesto por Markowitz representa un avance fundamental en la teoría de la selección de portafolios. Sin embargo, la evolución de los mercados financieros y la creciente disponibilidad de datos han puesto de manifiesto algunas limitaciones de la teoría clásica. En la práctica, los mercados son complejos, volátiles, y presentan comportamientos no lineales, lo que hace que los supuestos de Markowitz a menudo resulten insuficientes para capturar la dinámica real del mercado. Como respuesta a estas limitaciones, las redes neuronales artificiales emergen como una herramienta poderosa que puede mejorar significativamente el proceso de optimización de portafolios. A continuación se presentan los conceptos básicos sobre redes neuronales artificiales y su potencial aplicación en el proceso de conformación óptima de portafolios.

## 2.2 Redes Neuronales artificiales

Las redes neuronales artificiales (RNA) son modelos computacionales inspirados en la estructura y funcionamiento del cerebro humano, diseñados para identificar patrones y relaciones complejas en grandes volúmenes de datos. En el contexto financiero, las RNA han demostrado ser herramientas poderosas para analizar y predecir comportamientos del mercado, debido a su capacidad para capturar interacciones no lineales y aprender de datos históricos de manera adaptativa (Goodfellow, Bengio, & Courville, 2016).

El bloque fundamental de una red neuronal es la neurona artificial, que es un modelo matemático inspirado en la estructura y funcionamiento de las neuronas biológicas. La neurona artificial recibe varias entradas, las procesa y genera una salida en función de una activación, simulando cómo operan las neuronas en el cerebro. Específicamente, una neurona artificial realiza tres pasos fundamentales:

1. **Entrada ponderada:** recibe varias entradas, cada una de las cuales tiene un peso asociado que indica la importancia de esa entrada.
2. **Suma ponderada:** suma las entradas ponderadas para obtener un valor neto.
3. **Función de activación:** aplica una función de activación no lineal al valor neto para producir la salida de la neurona.

De esta forma, la neurona tiene  $n$  entradas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  con sus correspondientes pesos  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , y un término de **sesgo**  $b$ , que es un término adicional para ajustar la salida, entonces:

1. **Cálculo de la suma ponderada:**

$$z = \sum_{i=1}^n w_i x_i + b \quad (33)$$

Este valor,  $z$ , es conocido como la *entrada neta* de la neurona.

2. **Función de activación:** Después de obtener  $z$ , se pasa por una *función de activación*  $f(z)$  que introduce no linealidad. Algunas funciones de activación comunes son:

- **Sigmoide:**

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} \quad (34)$$

- **Tangente hiperbólica:**

$$f(z) = \tanh(z) \quad (35)$$

- **Rectified Linear Unit (ReLU):**

$$f(z) = \max(0, z) \quad (36)$$



3. **Salida de la neurona:** La salida final de la neurona es:

$$y = f(z) \quad (37)$$

La figura 2 representa la estructura básica de una neurona artificial.

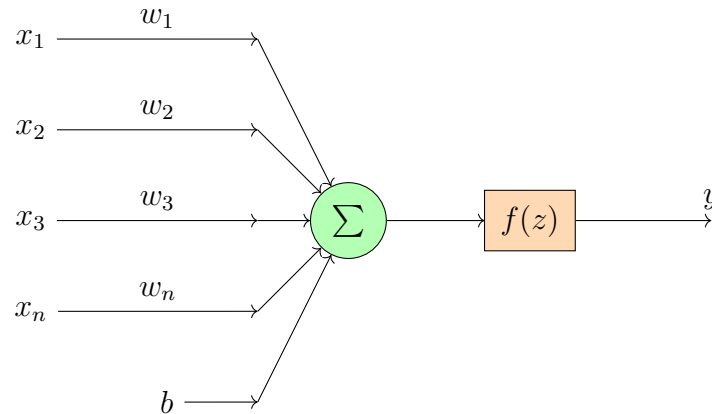


Figura 2: Representación de neurona artificial.

El *entrenamiento* de una neurona artificial consiste en ajustar los pesos  $w_i$  y el sesgo  $b$  para que la salida  $y$  se ajuste a un valor objetivo  $y_{\text{real}}$ . Este ajuste se hace mediante técnicas de optimización (minimización) como el gradiente descendente, aplicadas sobre una función de costo o error que mide la diferencia entre la salida y el valor objetivo como, por ejemplo, el error cuadrático medio (MSE):

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{\text{real}} - y)^2 \quad (38)$$

Los pesos se ajustan gradualmente para minimizar el error. Este proceso se repite sobre muchas iteraciones y ejemplos, permitiendo que la neurona aprenda a hacer predicciones correctas.

### 2.2.1 Estructura de las Redes Neuronales Artificiales

Una red neuronal artificial está compuesta por un conjunto de neuronas organizadas en capas. La estructura básica de una RNA incluye tres tipos principales de capas:

- **Capa de Entrada (Input Layer):** Recibe la información de entrada, que en el caso de aplicaciones financieras puede incluir variables como precios históricos, volúmenes de negociación, indicadores técnicos o datos macroeconómicos. Cada nodo (neurona) de esta capa representa una característica o variable del conjunto de datos.
- **Capas Ocultas (Hidden Layers):** Son capas intermedias entre la capa de entrada y la capa de salida. Las neuronas en estas capas realizan cálculos y transformaciones sobre los datos de entrada. El número de capas ocultas y de neuronas en

cada capa puede variar, y es una de las decisiones más importantes al diseñar una RNA (Goodfellow et al., 2016). Estas capas permiten a la red modelar y aprender relaciones complejas y no lineales presentes en los datos financieros.

- **Capa de Salida (Output Layer):** Proporciona el resultado final de la red neuronal. En aplicaciones financieras, esta capa podría predecir el retorno esperado de un portafolio, la probabilidad de que el precio de un activo suba o baje, o el riesgo asociado con una inversión.

Cada neurona de una capa está conectada a las neuronas de la capa siguiente a través de conexiones ponderadas. Estas ponderaciones determinan la importancia de cada conexión y se ajustan durante el proceso de entrenamiento para que la red neuronal aprenda a realizar predicciones precisas (Heaton et al., 2017). La figura 3 muestra el esquema básico de una red neuronal.

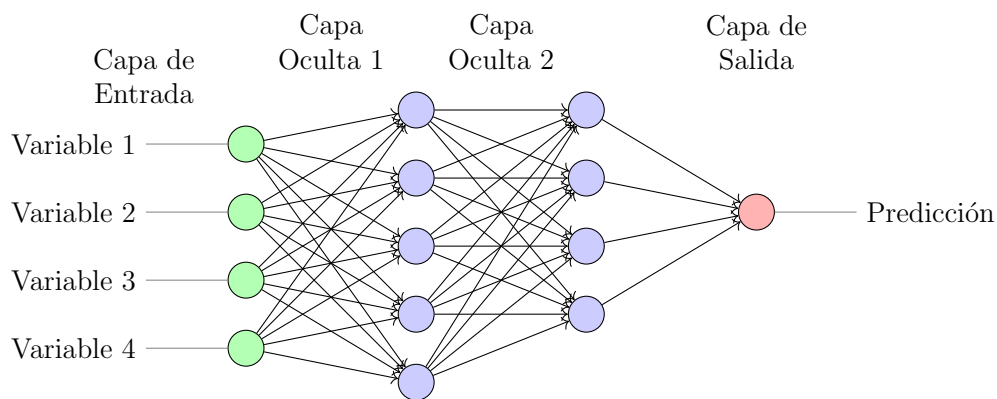


Figura 3: Estructura de una Red Neuronal Artificial

### 2.2.2 Funcionamiento de las Redes Neuronales Artificiales

El funcionamiento de las RNA se puede describir a través de dos procesos principales: la propagación hacia adelante (forward propagation) y la retropropagación del error (backpropagation).

- **Propagación hacia Adelante:** En esta fase, los datos de entrada pasan a través de la red, capa por capa, hasta llegar a la capa de salida. Cada neurona recibe una suma ponderada de las entradas de la capa anterior y aplica una función de activación para introducir no linealidad (Goodfellow et al., 2016). Esta capacidad de incorporar no linealidad es lo que permite a las RNA modelar relaciones complejas entre las variables financieras.
- **Retropropagación del Error:** La retropropagación es un algoritmo de aprendizaje supervisado que ajusta los pesos de las conexiones en función del error entre la predicción de la red y el valor real observado. A través de un proceso iterativo que utiliza el descenso del gradiente, la red ajusta sus pesos para minimizar el error de predicción (Heaton et al., 2017). Esto permite que la RNA aprenda a realizar predicciones cada vez más precisas a medida que procesa más datos.

### 2.2.3 Capacidad de las Redes Neuronales para Aprender Patrones Complejos en Datos Financieros

Las redes neuronales artificiales son especialmente adecuadas para el análisis de datos financieros debido a su capacidad para aprender y adaptarse a patrones complejos y no lineales, características comunes en los mercados financieros (Zhang et al., 2019). Algunas de las capacidades más destacadas de las RNA en el contexto financiero incluyen:

- **Modelado de Relaciones No Lineales:** Los mercados financieros a menudo exhiben comportamientos no lineales y relaciones complejas entre diferentes variables, como el impacto de eventos macroeconómicos, factores geopolíticos o el sentimiento del mercado. Las RNA, gracias a sus múltiples capas y funciones de activación, pueden capturar y modelar estas relaciones de manera efectiva, proporcionando predicciones más precisas que los modelos lineales tradicionales (Won & Kim, 2006).
- **Procesamiento de Grandes Volúmenes de Datos:** Los datos financieros son abundantes y diversos, incluyendo series temporales de precios, indicadores técnicos, noticias financieras, publicaciones en redes sociales, entre otros. Las RNA pueden manejar grandes cantidades de datos y aprender de múltiples fuentes, integrando información que los modelos más simples no podrían incorporar (Heaton et al., 2017).
- **Adaptación a Dinámicas Temporales:** Los precios y rendimientos de los activos financieros cambian con el tiempo y exhiben dependencia temporal. Las RNA, especialmente las Redes Neuronales Recurrentes (RNN) y las Redes de Memoria a Largo Plazo (LSTM), están diseñadas para manejar series temporales, permitiendo que la red "recuerde" información pasada y capture patrones temporales, lo que es crucial para modelar la evolución de los precios y tendencias de mercado (Gu, Kelly, & Xiu, 2020).
- **Robustez Frente al Ruido en los Datos:** Los datos financieros suelen ser ruidosos y volátiles, lo que puede dificultar la predicción y análisis. Las RNA son capaces de aprender a filtrar el ruido y enfocarse en los patrones relevantes, mejorando la precisión de las predicciones (Zhang et al., 2019).

Algunos trabajos académicos que estudian e implementan redes neuronales artificiales para la conformación de portafolios óptimos son, por ejemplo, Bahrammirzaee (2010) en donde se revisan aplicaciones de la inteligencia artificial en finanzas, con un enfoque en el uso de redes neuronales para la predicción financiera y la gestión de portafolios; Freitas, De Souza, and De Almeida (2009) que explora cómo las redes neuronales pueden ser utilizadas para predecir precios de activos y seleccionar portafolios óptimos, comparándolas con modelos tradicionales; Enke and Thawornwong (2005) en el cual se aborda el uso de redes neuronales y técnicas de minería de datos para predecir retornos del mercado de acciones y optimizar la asignación de portafolios; Fernández and Gómez (2007) en el cual se implementa la selección de portafolios mediante el uso de diversas arquitecturas de las redes.

Además de las Redes Neuronales Artificiales, existen otras herramientas de Inteligencia Artificial y Machine Learning que se han utilizado para la conformación de portafolios óptimos de inversión. Algunas de las más relevantes son:

- **Algoritmos Genéticos (GA):** Los algoritmos genéticos son métodos de optimización inspirados en la evolución y selección natural. En la conformación de portafolios, los GA se utilizan para resolver problemas de optimización no lineal, como la minimización del riesgo o la maximización del retorno. Los GA son útiles cuando el espacio de búsqueda es grande y los enfoques tradicionales de optimización, como la programación cuadrática, no son factibles.
- **Máquinas de Soporte Vectorial (SVM):** Las Máquinas de Soporte Vectorial se han utilizado principalmente para la predicción de retornos financieros y la clasificación de activos en función de su rentabilidad esperada. En la gestión de portafolios, las SVM pueden ayudar a separar los activos que se espera que tengan un mejor rendimiento, lo que facilita la construcción de portafolios más eficientes.
- **Random Forests:** son un método de aprendizaje supervisado que combina múltiples árboles de decisión para mejorar la precisión de las predicciones. En finanzas, se utilizan para la clasificación y regresión de datos financieros, ayudando a identificar activos que maximicen el retorno esperado y minimicen el riesgo.
- **Clustering (K-means, Hierarchical Clustering):** Las técnicas de clustering se utilizan para agrupar activos con características similares (por ejemplo, volatilidad o correlación de retornos). Estos métodos permiten identificar activos que presentan comportamientos similares en el mercado, facilitando la diversificación efectiva dentro del portafolio.
- **Aprendizaje por refuerzo:** El aprendizaje por refuerzo ha ganado terreno en la optimización de portafolios porque permite a un agente de IA tomar decisiones secuenciales de inversión mediante la interacción continua con el mercado. El agente aprende a maximizar el retorno esperado (recompensa) ajustando las proporciones de los activos en el portafolio a lo largo del tiempo.
- **Deep Reinforcement Learning (DRL):** combina redes neuronales profundas con el aprendizaje por refuerzo, permitiendo a los agentes tomar decisiones más complejas en entornos inciertos. En la gestión de portafolios, el DRL se usa para aprender estrategias de trading óptimas al balancear el riesgo y el retorno en función de los movimientos del mercado.

En la siguiente sección se realiza la implementación en Python de la teoría de Markowitz y redes neuronal artificiales para la optimización de un portafolio bajo diferentes ventanas de tiempo.

## 3 Implementación en Python

### 3.1 Aplicación del modelo de Markowitz

La implementación de la teoría de Markowitz en la selección óptima de portafolios se ha vuelto más accesible gracias a las herramientas modernas de programación. En esta subsección, se llevará a cabo la aplicación práctica del modelo de Markowitz utilizando Python, un lenguaje de programación ampliamente utilizado en finanzas y ciencia de datos debido a su versatilidad, facilidad de uso y la gran variedad de bibliotecas disponibles para análisis financiero y optimización (Hull, 2018).

Para esta implementación, se utilizará Google Colab, una plataforma basada en la nube que permite ejecutar código Python de manera gratuita y eficiente (Welch, 2021). Google Colab ofrece un entorno ideal para ejecutar cálculos intensivos y visualizar resultados sin necesidad de instalar software adicional en el equipo local, además de facilitar la colaboración y el acceso a los recursos computacionales.

Los datos históricos de los precios de los activos financieros serán obtenidos directamente de Yahoo Finance a través de la biblioteca `yfinance`, que permite acceder fácilmente a una gran cantidad de datos financieros de diferentes activos (Ran, 2020). Esto nos permitirá realizar un análisis realista y actual de la composición óptima del portafolio.

El proceso de implementación se estructura en varios pasos:

1. **Descarga de Datos:** Se extraen datos históricos de precios de cierre ajustados de una selección de activos utilizando `yfinance`.
2. **Cálculo de Rendimientos:** Se calcula la variación porcentual diaria de los precios para obtener los rendimientos históricos.
3. **Definición de Funciones de Optimización:** Se definen funciones que calculan el rendimiento esperado, la volatilidad y el ratio de Sharpe del portafolio.
4. **Optimización del Portafolio:** Usando la función `minimize` de la biblioteca `scipy.optimize` se encuentra la combinación óptima de pesos que maximiza el ratio de Sharpe, sujeto a restricciones que garantizan la viabilidad del portafolio.
5. **Visualización de Resultados:** Se muestran los pesos óptimos para cada activo y se calcula el rendimiento esperado, la volatilidad, y el ratio de Sharpe del portafolio óptimo. Además, se grafica la frontera eficiente, destacando el portafolio óptimo.

Esta implementación representa una poderosa herramienta para comprender cómo el modelo de Markowitz puede aplicarse en la actualidad y permite observar cómo se comporta un portafolio óptimo frente a distintos activos en un entorno de inversión real.

Para la implementación realizada en este trabajo, se consideran los siguientes aspectos:

- Los activos seleccionados para la conformación del portafolio y su implementación en Python han sido tomados del mercado norteamericano, el cual es reconocido por su alta liquidez, profundidad y amplia variedad de instrumentos financieros. La elección de este mercado facilita el análisis, ya que ofrece datos confiables, históricos y una elevada transabilidad, permitiendo realizar comparaciones de resultados con mayor precisión y relevancia. Además, el mercado norteamericano es un referente global que proporciona una visión más representativa y robusta de la dinámica financiera a nivel internacional.
- Para asegurar la diversificación del portafolio y su capacidad de adaptarse a diferentes condiciones del mercado, se seleccionaron cinco activos representativos de diversos sectores económicos: Tesla (sector tecnológico y automotriz), TLT (ETF de renta fija que refleja la evolución de los bonos del Tesoro a largo plazo), Microsoft (tecnología y software), JP Morgan (sector bancario y financiero) y Nvidia (tecnología enfocada en inteligencia artificial y semiconductores). Esta selección se realizó estratégicamente con el objetivo de incluir activos que capturen la variedad de comportamientos y riesgos presentes en distintas industrias, lo que contribuye a la construcción de un portafolio más equilibrado y capaz de ofrecer oportunidades de retorno bajo diferentes escenarios económicos.
- Para cada activo se obtienen los precios de cierre ajustado diarios en la ventana temporal de 10 años 2014-01-01 al 2024-01-01. Luego, se consideran los datos totales y segmentados por periodos, para analizar el impacto de la pandemia en los portafolios, de la siguiente manera:
  - 10 años (incluyendo el periodo de pandemia): 2014-01-01 al 2024-01-01
  - 6 años (antes del periodo de pandemia): 2014-01-01 al 2020-01-01.
  - 1 año (durante el periodo de pandemia): 2020-01-01 al 2021-01-01.
  - 3 años (después del periodo de pandemia): 2021-01-01 al 2024-01-01.
- Para cada periodo de tiempo se conformaran portafolios con y sin la posibilidad de ventas en corto.
- La función utilizada para encontrar el optimo es `minimize` de la biblioteca `scipy.optimize` de Python. Los argumentos que se deben especificar para esta función son:
  - `fun`: La función objetivo que queremos minimizar.
  - `x0`: El punto inicial para el algoritmo de optimización.
  - `method`: El método de optimización que se desea utilizar. El método utilizado en esta implementación es `SLSQP`, que es el utilizado para problemas con restricciones (igualdades y desigualdades).
  - `args`: Una tupla de argumentos adicionales que se pasará a la función objetivo.
  - `constraints`: Define las restricciones del problema de optimización. Las restricciones pueden ser de igualdad o desigualdad.

- **bounds:** Define los límites para las variables.
- Como función objetivo de la minimización se toma el negativo del cociente de Sharpe.
- Se toman pesos iniciales aleatorios para los 5 activos que conforman al portafolio utilizando la distribución Dirichlet, lo que garantiza que la suma sea igual a 1. Esta distribución es una generalización de la distribución Beta a más de dos dimensiones y su función de densidad de probabilidad para un vector aleatorio

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_K)$  con parámetros  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K)$ , donde  $\alpha_i > 0$  para todo  $i$ , se expresa como:

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{B(\boldsymbol{\alpha})} \prod_{i=1}^K x_i^{\alpha_i - 1}$$

donde:

- $K$ : número de dimensiones de la distribución (es decir, el número de categorías o activos en nuestro caso).
- $\mathbf{x}$ : es un vector que cumple la condición  $x_i \geq 0$  para cada  $i$  y  $\sum_{i=1}^K x_i = 1$ .
- $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K)$ : El vector de parámetros positivos que define la distribución.
- $B(\boldsymbol{\alpha})$ : La función beta multivariada, definida como:

$$B(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\prod_{i=1}^K \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^K \alpha_i\right)}$$

en donde  $\Gamma(\alpha_i)$  representa la función gamma evaluada en  $\alpha_i$ .

- Un problema común con los portafolios optimizados mediante el enfoque de Markowitz es que tienden a estar excesivamente concentrados en pocos activos, especialmente cuando se permiten ventas en corto. Esto puede resultar en casos extremos que afectan negativamente la robustez y estabilidad del portafolio, disminuyendo la diversificación que es crucial para reducir el riesgo (Hitaj & Zambruno, 2018).

Para abordar esta limitación, se puede imponer una restricción utilizando el Índice de Herfindahl, que es una medida de concentración que indica qué tan diversificado está un portafolio. El Índice de Herfindahl ( $HI$ ) se define como:

$$HI = \sum_{i=1}^n w_i^2$$

donde  $w_i$  representa el peso del activo  $i$  en el portafolio. En un escenario de diversificación perfecta, todos los activos tendrían un peso igual, lo que llevaría al valor más bajo posible del HI, mientras que un portafolio concentrado en un solo activo tendría un valor de HI igual a 1 (Hitaj & Zambruno, 2018).

En el contexto de la optimización del portafolio de Markowitz, se utiliza una versión modificada del Índice de Herfindahl conocida como Índice de Herfindahl Modificado (*MHI*), que normaliza el índice original para hacerlo independiente del número de activos  $n$  en el portafolio. El *MHI* se define como:

$$MHI = \frac{\sum_{i=1}^n w_i^2 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}}$$

El *MHI* toma valores entre 0 (máxima diversificación) y 1 (máxima concentración). Al imponer un límite superior en el *MHI* durante el proceso de optimización, se fuerza al modelo a mantener un nivel mínimo de diversificación, evitando que se genere un portafolio excesivamente concentrado, incluso cuando se permiten ventas en corto (Hitaj & Zambruno, 2018).

Esta restricción adicional en el proceso de optimización ayuda a mitigar los problemas de concentración y evita que los pesos de los activos tomen valores extremos que puedan dañar el resultado final del portafolio. Al aplicar el Índice de Herfindahl en la optimización del portafolio de Markowitz, se logra un equilibrio entre la diversificación y el rendimiento, asegurando que el portafolio resultante no sea excesivamente dependiente de un número limitado de activos, lo que aumenta su estabilidad y desempeño en un contexto real de inversión (Hitaj & Zambruno, 2018).

- Para la construcción de las gráficas se consideran 10000 portafolios, para cada uno de los cuales se calcula: el retorno, la volatilidad, el cociente de Sharpe y el índice de Herfindahl Modificado.

A continuación se presentan las graficas resultantes de la implementación del modelo de Markowitz en Python considerando cada uno de los periodos de tiempo, encontrando los siguientes resultados:

1. Para el periodo de tiempo de 10 años completo (incluyendo el periodo de pandemia) del 2014-01-01 al 2024-01-01, y con restricción a ventas en corto:

Tabla 1: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio

Activo	Peso (%)
TSLA	2.09
TLT	20.07
MSFT	45.85
JPM	19.64
NVDA	12.35
Métricas del Portafolio	
Rendimiento Esperado	39.95 %
Volatilidad	28.71 %
Sharpe Ratio	1.27
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.13



La figura 4 muestra la frontera eficiente y el portafolio óptimo en la marca roja.

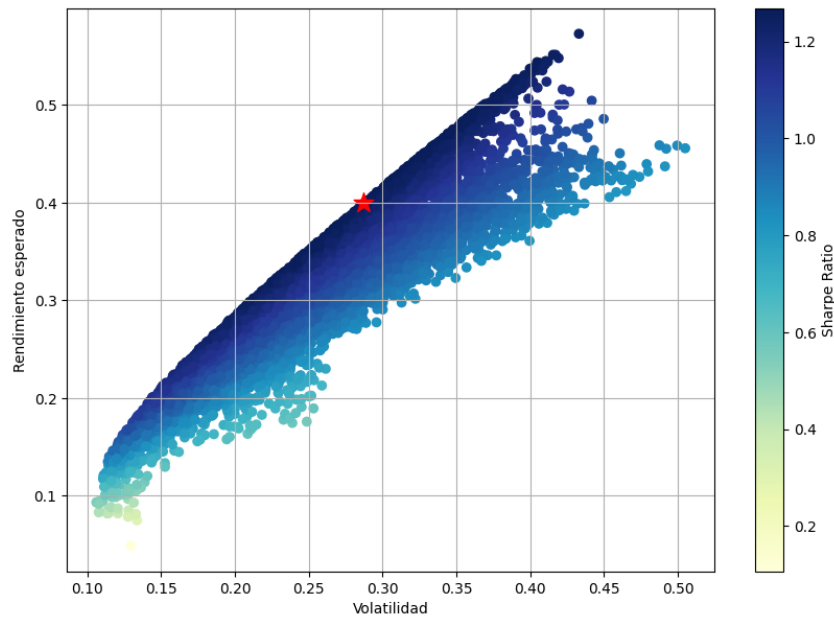


Figura 4: Portafolio óptimo y frontera eficientes para el periodo de tiempo de 10 años completo y con restricción a ventas en corto.

2. Para el periodo de tiempo de 10 años completo (incluyendo el periodo de pandemia) del 2014-01-01 al 2024-01-01, y sin restricción a ventas en corto:

Tabla 2: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	1.98
TLT	20.21
MSFT	45.90
JPM	19.52
NVDA	12.38
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	40.02 %
Volatilidad	28.76 %
Sharpe Ratio	1.27
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.13

La figura 5 muestra la frontera eficiente y el portafolio óptimo en la marca roja.

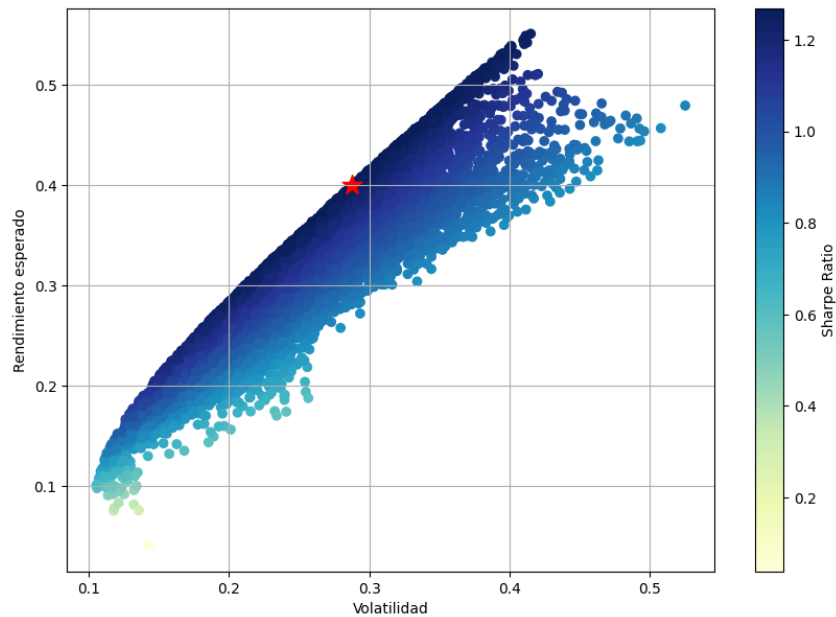


Figura 5: Portafolio óptimo y frontera eficientes para el periodo de tiempo de 10 años completo y sin restricción a ventas en corto.

- Para el periodo de tiempo de 6 años (antes del periodo de pandemia) del 2014-01-01 al 2020-01-01, y con restricción a ventas en corto:

Tabla 3: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio

Activo	Peso (%)
TSLA	19.06
TLT	15.14
MSFT	14.04
JPM	50.75
NVDA	1.02
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	19.96 %
Volatilidad	9.99 %
Sharpe Ratio	1.65
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.17

La figura 6 muestra la frontera eficiente y el portafolio óptimo en la marca roja.

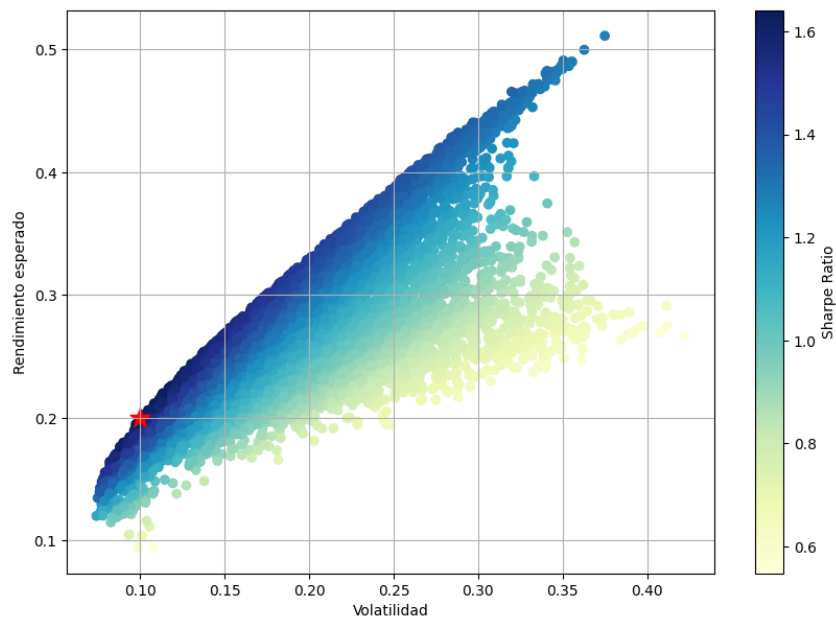


Figura 6: Portafolio óptimo y frontera eficientes para el periodo de tiempo de 6 años antes de pandemia y con restricción a ventas en corto.

4. Para el periodo de tiempo de 6 años (antes del periodo de pandemia) del 2014-01-01 al 2020-01-01, y sin restricción a ventas en corto:

Tabla 4: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio

Activo	Peso (%)
TSLA	19.05
TLT	15.15
MSFT	14.04
JPM	50.74
NVDA	1.02
Métricas del Portafolio	
Rendimiento Esperado	19.96 %
Volatilidad	9.99 %
Sharpe Ratio	1.65
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.17

La figura 7 muestra la frontera eficiente y el portafolio óptimo en la marca roja.

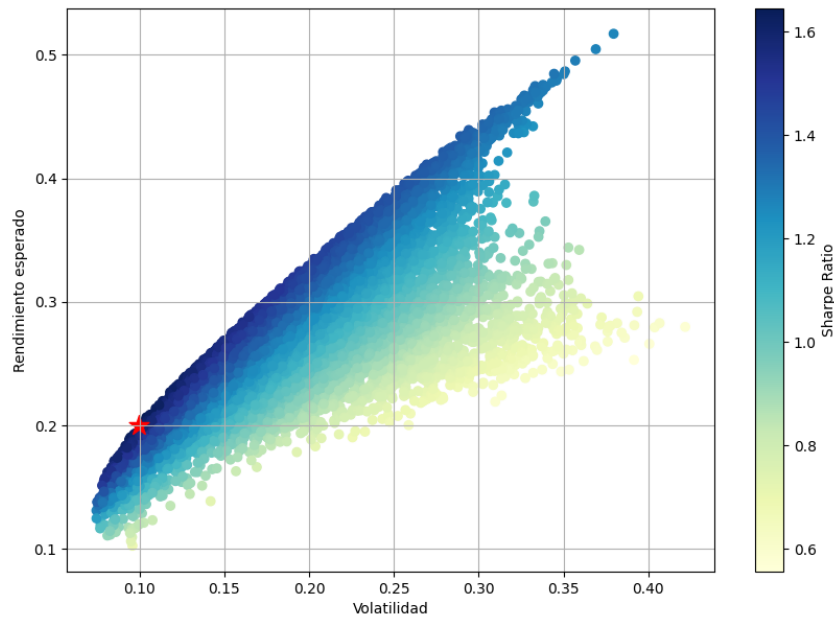


Figura 7: Portafolio óptimo y frontera eficientes para el periodo de tiempo de 6 años antes de pandemia y sin restricción a ventas en corto.

5. Para el periodo de tiempo de un año (durante el periodo de pandemia) del 2020-01-01 al 2021-01-01, y con restricción a ventas en corto:

Tabla 5: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio

Activo	Peso (%)
TSLA	0.00
TLT	2.40
MSFT	17.28
JPM	46.07
NVDA	34.24
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	111.74 %
Volatilidad	36.82 %
Sharpe Ratio	2.94
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.20

La figura 8 muestra la frontera eficiente y el portafolio óptimo en la marca roja.

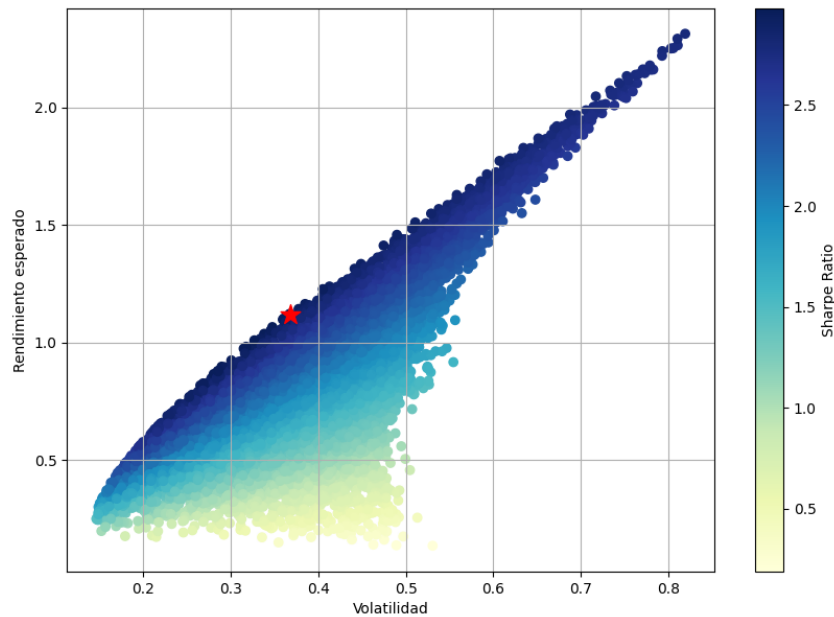


Figura 8: Portafolio óptimo y frontera eficientes para el periodo de tiempo de un año durante la pandemia y con restricción a ventas en corto.

6. Para el periodo de tiempo de un año (durante el periodo de pandemia) del 2020-01-01 al 2021-01-01, y sin restricción a ventas en corto:

Tabla 6: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio

Activo	Peso (%)
TSLA	-0.33
TLT	2.68
MSFT	17.35
JPM	45.98
NVDA	34.32
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	112.07 %
Volatilidad	36.93 %
Sharpe Ratio	2.94
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.20

La figura 9 muestra la frontera eficiente y el portafolio óptimo en la marca roja.

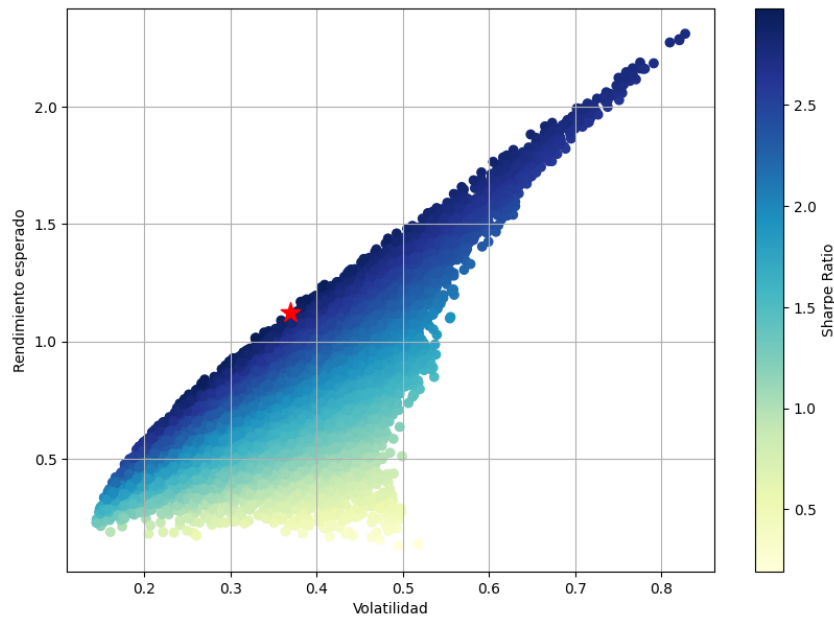


Figura 9: Portafolio óptimo y frontera eficientes para el periodo de tiempo de un año durante la pandemia y sin restricción a ventas en corto.

7. Para el periodo de tiempo de 3 años (después del periodo de pandemia) del 2021-01-01 al 2024-01-01, y con restricción a ventas en corto:

Tabla 7: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio

Activo	Peso (%)
TSLA	30.28
TLT	23.62
MSFT	46.10
JPM	0.00
NVDA	0.00
Métricas del Portafolio	
Rendimiento Esperado	37.22 %
Volatilidad	32.63 %
Sharpe Ratio	1.03
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.20

La figura 10 muestra la frontera eficiente y el portafolio óptimo en la marca roja.

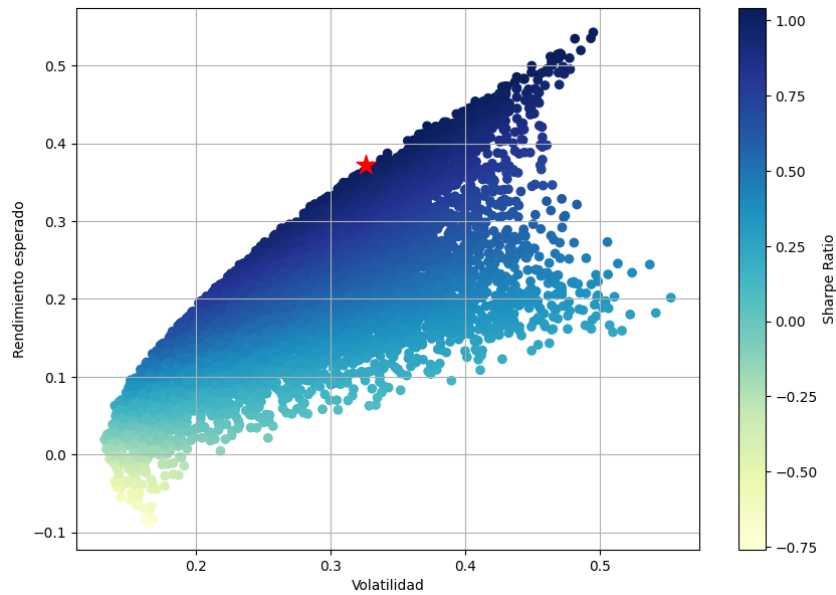


Figura 10: Portafolio óptimo y frontera eficientes para el periodo de tiempo de un año durante la pandemia y con restricción a ventas en corto.

8. Para el periodo de tiempo de 3 años (después del periodo de pandemia) del 2021-01-01 al 2024-01-01, y sin restricción a ventas en corto:

Tabla 8: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	32.02
TLT	28.41
MSFT	41.96
JPM	0.25
NVDA	-2.64
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	35.68 %
Volatilidad	30.97 %
Sharpe Ratio	1.04
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.20

La figura 11 muestra la frontera eficiente y el portafolio óptimo en la marca roja.

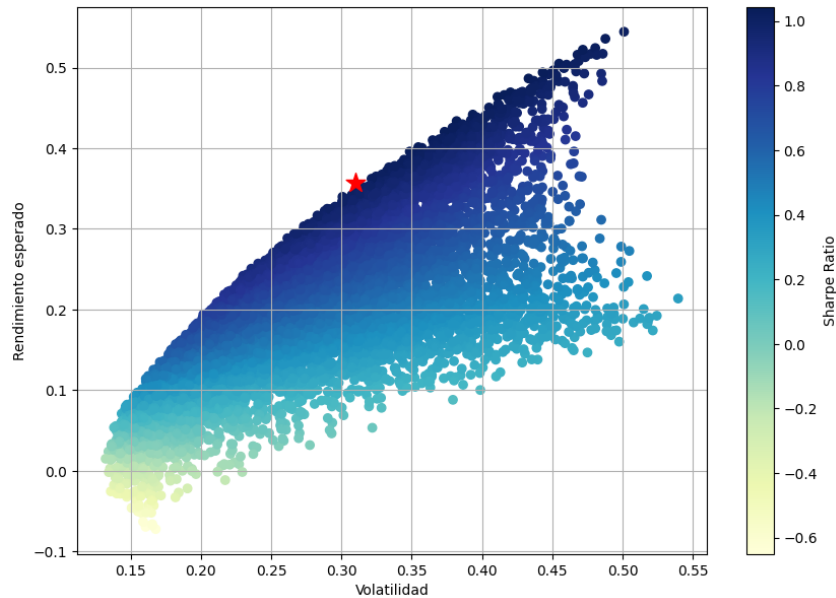


Figura 11: Portafolio óptimo y frontera eficientes para el periodo de tiempo de un año durante la pandemia y sin restricción a ventas en corto.

Tabla 9: Comparación de Pesos Óptimos del Portafolio para Diferentes Periodos y Restricciones

Periodo	Restricción					
	ventas en corto	TSLA (%)	TLT (%)	MSFT (%)	JPM (%)	NVDA (%)
2014-2024	si	2.09	20.07	45.85	19.64	12.35
	no	1.98	20.21	45.90	19.52	12.38
2014-2020	si	19.06	15.14	14.04	50.75	1.02
	no	19.05	15.15	14.04	50.74	1.02
2020-2021	si	0.00	2.40	17.28	46.07	34.24
	no	-0.33	2.68	17.35	45.98	34.32
2021-2024	si	30.28	23.62	46.10	0.00	0.00
	no	32.02	28.41	41.96	0.25	-2.64

Tabla 10: Métricas del Portafolio para Diferentes Periodos y Restricciones

Periodo	Restricción				
	ventas en corto	Rendimiento (%)	Volatilidad (%)	Sharpe Ratio	MHI
2014-2024	si	39.95	28.71	1.27	0.13
	no	40.02	28.76	1.27	0.13
2014-2020	si	19.96	9.99	1.65	0.17
	no	19.96	9.99	1.65	0.17
2020-2021	si	111.74	36.82	2.94	0.20
	no	112.07	36.93	2.94	0.20
2021-2024	si	37.22	32.63	1.03	0.20
	no	35.68	30.97	1.04	0.20



### 3.1.1 Conclusiones sobre los portafolios óptimos encontrados

Los resultados de las optimizaciones de los portafolios para los diferentes periodos de tiempo revelan perspectivas importantes sobre el comportamiento y la eficiencia de la estrategia de inversión, y cómo las condiciones del mercado influyen en la asignación óptima de activos.

#### Periodo Completo (2014-2024)

Durante el periodo de 10 años, la composición del portafolio se mantuvo relativamente estable para los dos casos (con y sin la restricción de ventas en corto). Microsoft (MSFT) tuvo un peso predominante, con más del 45%, mientras que TLT también mostró un peso significativo de alrededor del 20%. Esto indica que los inversionistas favorecieron una combinación de activos tecnológicos y de renta fija durante este periodo, probablemente debido a la fuerte apreciación de las acciones tecnológicas en la última década, así como a la preferencia por instrumentos de renta fija como un mecanismo de cobertura frente a la volatilidad del mercado.

La diferencia en el rendimiento entre permitir o no ventas en corto fue mínima (40.02% vs. 39.95%), lo que indica que las ventas en corto no ofrecieron un beneficio adicional en este periodo en particular. El Sharpe Ratio se mantuvo constante en 1.27, y el Índice de Herfindahl Modificado (*MHI*) fue de 0.13 en ambos casos, lo que indica un nivel de diversificación bastante adecuado (cercano a cero). Esto puede deberse a la estabilidad económica relativa de la última década, donde las estrategias de inversión basadas en la diversificación y la combinación de activos de crecimiento y refugio ofrecieron buenos rendimientos sin la necesidad de recurrir a ventas en corto.

#### Periodo Pre-Pandemia (2014-2020)

El análisis del periodo antes de la pandemia muestra que JPMorgan (JPM) fue el componente más dominante del portafolio, con un peso que alcanzó el 50.75% en el caso de la restricción de ventas en corto y 50.74% sin la restricción. Esto refleja la fortaleza del sector financiero durante esos años, así como la percepción de que las instituciones financieras eran relativamente estables y rentables. La baja exposición a NVDA y TSLA durante este periodo sugiere que las acciones de tecnología y de inteligencia artificial aún no se consideraban inversiones principales para la optimización del portafolio.

La rentabilidad esperada del portafolio fue de 19.96% en ambos casos, con una volatilidad de 9.99%, indicando un equilibrio bastante sólido entre riesgo y retorno. Con un Sharpe Ratio de 1.65, lo que muestra un entorno económico más predecible y estable. El *MHI* de 0.17 también sugiere un portafolio bien diversificado, aunque con mayor participación del sector financiero.

## Periodo de la Pandemia (2020-2021)

El periodo de la pandemia (2020-2021) resultó ser el más volátil y a la vez el más rentable, con rendimientos excepcionalmente altos de 111.74% (sin ventas en corto) y 112.07% (con ventas en corto). Este fenómeno se puede atribuir a la recuperación agresiva del mercado debido a los estímulos por parte del gobierno después del desplome inicial debido a la pandemia, así como a la rápida expansión de empresas tecnológicas y financieras que se adaptaron al entorno cambiante. En este periodo, NVDA y JPMorgan (JPM) se convirtieron en los activos predominantes, y las posiciones en TSLA resultaron negativas cuando se permitieron las ventas en corto, lo que indica que la volatilidad de tesla fue muy alta o que el retorno fue algo bajo.

La volatilidad del portafolio fue la más alta (36.82% y 36.93%), reflejando el entorno de incertidumbre y el rápido ajuste de los precios de los activos. Sin embargo, el Sharpe Ratio también fue el más elevado (2.94), lo que sugiere que, a pesar del alto riesgo, el rendimiento ajustado por riesgo del portafolio fue muy eficiente durante este periodo. El *MHI* se mantuvo en 0.20, indicando una diversificación más limitada, pero aún suficiente para manejar el riesgo durante este periodo extremadamente volátil.

## Periodo Post-Pandemia (2021-2024)

El periodo posterior a la pandemia (2021-2024) presentó un cambio en la estructura del portafolio, con TSLA, TLT y MSFT asumiendo posiciones más prominentes. Este cambio refleja la transición del mercado hacia una mayor confianza en el sector tecnológico y los activos de renta fija debido a los cambios en la política monetaria que tuvo la Reserva Federal por consecuencia de la alta volatilidad en la inflación y a la incertidumbre de la economía en este periodo post-pandemia. Sin embargo, JPM y NVDA perdieron relevancia, probablemente debido a ajustes en las expectativas de crecimiento y al retorno a condiciones de mercado más "normales".

El rendimiento esperado del portafolio fue menor (37.22% sin ventas en corto y 35.68% con ventas en corto) en comparación con el periodo de la pandemia, y el Sharpe Ratio fue el más bajo (1.03 y 1.04), indicando menos eficiencia en el ajuste por riesgo. El *MHI* permaneció en 0.20, lo que muestra que la diversificación del portafolio fue moderada, aunque no tan amplia como en los periodos anteriores.

## Conclusiones Generales

Los resultados demuestran que la optimización del portafolio según la teoría de Markowitz es altamente sensible a las condiciones del mercado. En tiempos de alta volatilidad y crisis, como la pandemia, los rendimientos ajustados por riesgo pueden ser excepcionales, aunque acompañados de mayor incertidumbre y variabilidad en la composición del portafolio. La inclusión de ventas en corto no tuvo un impacto significativo en la mayoría de los periodos, lo que sugiere que, para los activos y periodos analizados, no fue un factor determinante en la mejora del rendimiento del portafolio, esto puede ser debido a que en periodos de tiempo mayores a un año, los retornos de los activos en el mercado tienen a ser

positivos en su mayoría. En todos los casos, el Índice de Herfindahl Modificado ( $MHI$ ) se mantuvo en un rango que indica diversificación, permitiendo así, evitar casos extremos en los que la optimización asigne pesos demasiado grandes tanto positivos como negativos que puedan afectar el resultado de la optimización, así reafirmando que la diversificación es un componente crucial para manejar el riesgo y maximizar la eficiencia en la gestión de portafolios en diferentes condiciones de mercado.

### 3.2 Aplicación de Redes Neuronales

La aplicación de las RNA en la optimización de portafolios representa una evolución en la forma en que se abordan los problemas de inversión. A diferencia del modelo de Markowitz, que se basa en suposiciones lineales y depende de estimaciones precisas de medias y covarianzas, las RNA pueden aprender directamente de los datos históricos de los activos financieros y adaptarse a las condiciones cambiantes del mercado. Esto permite la identificación de combinaciones de activos que optimizan la relación riesgo-retorno de manera más efectiva, incluso en entornos complejos y volátiles (Heaton et al., 2017).

El proceso de implementación de la RNA sigue los siguientes pasos:

- **Recolección de datos:** El primer paso consiste en recopilar datos históricos de precios ajustados para un conjunto de activos establecidos durante el periodo de tiempo determinado. A partir de estos precios, se calcularon los rendimientos diarios para cada activo, eliminando valores faltantes para garantizar una serie temporal limpia y completa.
- **Definición de la Red Neuronal:** Se consideran dos arquitecturas para la red neuronal que busca determinar los portafolios óptimos. La primera red empleada tiene una arquitectura simple de perceptrón multicapa, es decir, consta de una capa de entrada, una capa intermedia que representa los cálculos de covarianza y rendimiento, y una capa de salida que representa el Ratio de Sharpe. La figura 12 representa esta arquitectura.

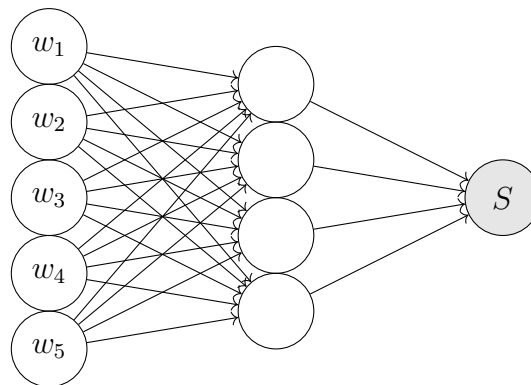


Figura 12: Arquitectura 1. de la red neuronal utilizada para la optimización del portafolio

La segunda arquitectura corresponde a una red neuronal profunda con dos capas densas completamente conectadas. La red toma como entrada las características

calculadas a partir de una ventana de tiempo deslizante de los rendimientos diarios de los activos. Se usa una ventana de 252 días (equivalente a un año de datos), y para cada ventana se calculan las siguientes características: media de los retornos, desviación estándar de los retornos. Estas características se concatenan en un solo vector, y se preparan las etiquetas (*labels*), que son los retornos reales de los activos durante la ventana de tiempo.

La capa de entrada recibe el vector de características calculado (media y desviación estándar de los retornos). La primera capa densa contiene 64 neuronas con función de activación *ReLU* ( $ReLU(x) = \max\{0, x\}$ ). Esta capa aplica una transformación no lineal a las características de entrada, capturando patrones más complejos en los datos. La segunda capa densa también tiene 64 neuronas y utiliza la misma función de activación. Esta segunda capa permite a la red aprender una representación más compleja de las características de los activos, integrando interacciones entre los mismos.

La capa de salida tiene 5 neuronas (una para cada activo), y la función de activación es *softmax*. Esta capa produce una distribución de probabilidades (que suman 1) que representan los pesos del portafolio óptimo asignados a cada activo. La figura 13 muestra una representación simplificada de este red.

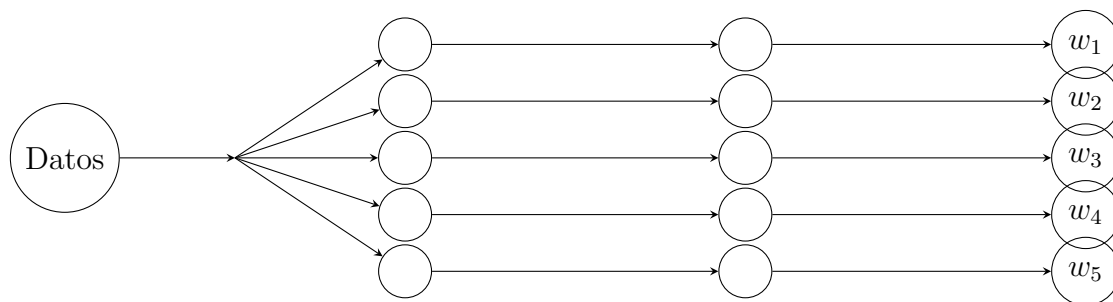


Figura 13: Arquitectura 2. de la red neuronal utilizada para la optimización del portafolio

- **Inicialización de los Pesos:** Los pesos se inicializaron aleatoriamente y se normalizaron utilizando la función *softmax* para garantizar que sumen 1:

$$w_i = \frac{e^{w_i}}{\sum_{j=1}^n e^{w_j}} \quad (39)$$

Esto asegura que la red respete la restricción de que la suma total de los pesos debe ser igual a uno, reflejando una correcta asignación de capital en el portafolio.

- **Definición de la Función Objetivo:** La función objetivo es el negativo del Ratio de Sharpe, que se calcula como:

$$S = \frac{E[R_p] - R_f}{\sigma_p} \quad (40)$$

donde  $E[R_p]$  es el rendimiento esperado del portafolio,  $R_f$  es la tasa libre de riesgo, y  $\sigma_p$  es la volatilidad del portafolio. La optimización se enfoca en maximizar este

ratio, lo que equivale a minimizar su valor negativo durante el entrenamiento de la red.

- **Optimización Mediante Descenso de Gradiente:** Para encontrar los pesos óptimos, se emplea un método de descenso de gradiente. Este algoritmo ajusta los pesos de forma iterativa para minimizar la función de pérdida. En cada iteración, se calcula el gradiente de la función de pérdida con respecto a los pesos y se realiza un ajuste en la dirección que reduce la función de pérdida.
- **Entrenamiento de la Red:** Durante el proceso de entrenamiento, la red ajusta los pesos a lo largo de múltiples iteraciones, o *épocas*. Al final de este proceso, los pesos convergen a los valores que maximizan el Ratio de Sharpe, representando así la combinación óptima de activos en el portafolio.
- **Evaluación y Resultados:** Una vez que la red neuronal ha completado el entrenamiento, se utilizan los pesos óptimos para calcular el rendimiento esperado, la volatilidad y el Ratio de Sharpe del portafolio. Adicionalmente, se evalúa el Índice de Herfindahl Modificado (MHI) para medir la concentración del portafolio.

Para la implementación de las redes neuronales en python se tuvieron en cuenta los mismos activos, periodos de tiempo y restricciones que en el modelo de Markowitz. Adicionalmente, el sobreajuste (*overfitting*) es un problema común al entrenar redes neuronales y otros modelos de machine learning, donde el modelo se ajusta demasiado a los datos de entrenamiento, perdiendo su capacidad de generalización a nuevos datos. Evaluar el posible sobreajuste en las dos arquitecturas de redes neuronales consideradas para conformar los portafolios de inversión óptimos es fundamental para asegurar que las predicciones del modelo sean robustas y útiles en escenarios reales de inversión. Para esta evaluación se consideran las curvas de aprendizaje, que son gráficas que muestran el error (o pérdida) en los conjuntos de datos de entrenamiento y validación a lo largo del tiempo (o épocas), esto para las dos arquitecturas en la ventana temporal completa. Un indicio de sobreajuste se presenta cuando el error en los datos de validación comienza a aumentar después de un cierto punto (es decir, el modelo sigue mejorando en los datos de entrenamiento, pero empeora en los de validación).

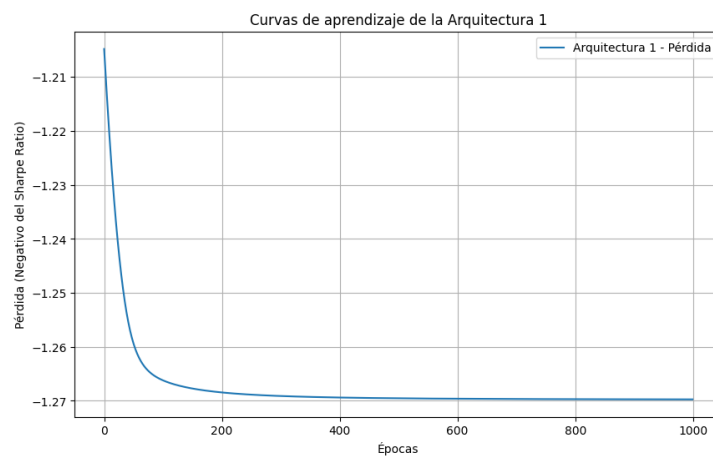


Figura 14: Curva de aprendizaje arquitectura 1.

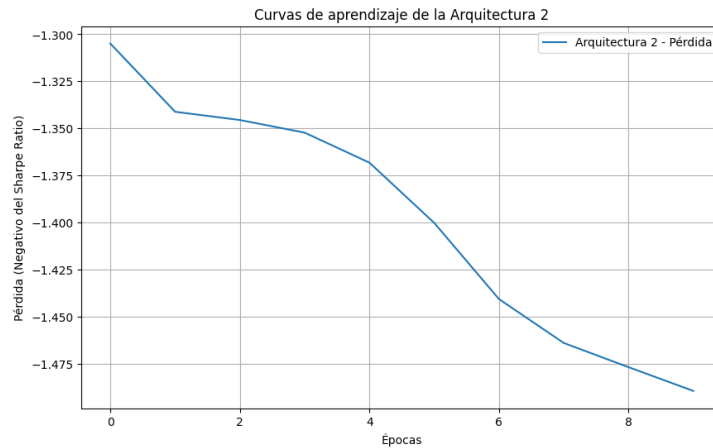


Figura 15: Curva de aprendizaje arquitectura 2.

Las figuras 14. y 15. muestran las curvas de aprendizaje para cada tipo de arquitectura. Se puede ver que estas son decrecientes y se estabilizan en la fase de prueba, lo cual indica que no hay sobreajuste.

Los resultados encontrados al realizar la implementación de las redes son los siguientes:

1. Para el periodo de tiempo de 10 años completo del 2014-01-01 al 2024-01-01, y con restricción a ventas en corto:

Tabla 11: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio (Arquitectura 1)

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	2.44
TLT	19.90
MSFT	45.64
JPM	19.73
NVDA	12.29
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	39.81 %
Volatilidad	28.60 %
Sharpe Ratio	1.27
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.13

Tabla 12: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio (Arquitectura 2)

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	17.18
TLT	18.63
MSFT	33.89
JPM	25.54
NVDA	4.75
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	31.56 %
Volatilidad	22.51 %
Sharpe Ratio	1.25
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.06

2. Para el periodo de tiempo de 10 años completo del 2014-01-01 al 2024-01-01, y sin restricción a ventas en corto:

Tabla 13: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio (Arquitectura 1 con ventas en corto)

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	2.08
TLT	20.13
MSFT	45.82
JPM	19.61
NVDA	12.35
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	39.95 %
Volatilidad	28.71 %
Sharpe Ratio	1.27
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.13

Tabla 14: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio (Arquitectura 2 con ventas en corto)

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	31.75
TLT	-5.54
MSFT	55.78
JPM	-3.17
NVDA	3.76
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	38.80 %
Volatilidad	30.10 %
Sharpe Ratio	1.17
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.27

3. Para el periodo de tiempo de 6 años (antes de la pandemia) del 2014-01-01 al 2020-01-01, y con restricción a ventas en corto:

Tabla 15: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio (Arquitectura 1)

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	18.99
TLT	15.02
MSFT	13.97
JPM	50.70
NVDA	1.31
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	19.95 %
Volatilidad	9.99 %
Sharpe Ratio	1.65
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.17



Tabla 16: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio (Arquitectura 2)

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	19.19
TLT	21.01
MSFT	13.71
JPM	45.92
NVDA	0.18
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	20.89 %
Volatilidad	10.64 %
Sharpe Ratio	1.64
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.14

4. Para el periodo de tiempo de 6 años (antes de la pandemia) del 2014-01-01 al 2020-01-01, y sin restricción a ventas en corto:

Tabla 17: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio (Arquitectura 1 con ventas en corto)

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	19.05
TLT	15.15
MSFT	14.04
JPM	50.74
NVDA	1.02
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	19.96 %
Volatilidad	9.99 %
Sharpe Ratio	1.65
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.17

Tabla 18: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio (Arquitectura 2 con ventas en corto)

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	19.39
TLT	32.92
MSFT	0.75
JPM	46.82
NVDA	0.13
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	17.44 %
Volatilidad	9.74 %
Sharpe Ratio	1.43
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.21

5. Para el periodo de tiempo de 3 años después de la pandemia (2021-01-01 al 2024-01-01) y con restricción de ventas en corto:

Tabla 19: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio (Arquitectura 1)

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	27.11
TLT	2.53
MSFT	69.57
JPM	0.28
NVDA	0.51
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	45.63 %
Volatilidad	40.27 %
Sharpe Ratio	1.05
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.45

Tabla 20: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio (Arquitectura 2)

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	0.50
TLT	1.38
MSFT	97.22
JPM	0.44
NVDA	0.46
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	57.27 %
Volatilidad	51.98 %
Sharpe Ratio	1.03
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.93

6. Para el periodo de tiempo de 3 años después de la pandemia (2021-01-01 al 2024-01-01) y sin restricción de ventas en corto:

Tabla 21: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio (Arquitectura 1)

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	6.01
TLT	3.39
MSFT	34.85
JPM	-47.82
NVDA	-7.93
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	26.23 %
Volatilidad	18.92 %
Sharpe Ratio	1.20
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.20

Tabla 22: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio (Arquitectura 2)

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	6.44
TLT	5.32
MSFT	47.55
JPM	-32.24
NVDA	8.45
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	35.31 %
Volatilidad	29.92 %
Sharpe Ratio	1.06
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.18

7. Para el periodo de tiempo de 1 año durante la pandemia (2020-01-01 al 2021-01-01) y con restricción de ventas en corto:

Tabla 23: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio (Arquitectura 1)

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	0.98
TLT	0.34
MSFT	9.41
JPM	58.33
NVDA	30.93
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	96.56 %
Volatilidad	31.24 %
Sharpe Ratio	2.98
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.31

Tabla 24: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio (Arquitectura 2)

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	19.13
TLT	19.35
MSFT	19.86
JPM	20.11
NVDA	21.55
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	85.78 %
Volatilidad	38.21 %
Sharpe Ratio	2.15
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.00

8. Para el periodo de tiempo de 1 año durante la pandemia (2020-01-01 al 2021-01-01) y sin restricción de ventas en corto:

Tabla 25: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio (Arquitectura 1)

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	-3.32
TLT	-17.07
MSFT	18.30
JPM	35.90
NVDA	25.41
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	79.37 %
Volatilidad	24.98 %
Sharpe Ratio	3.04
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.07

Tabla 26: Pesos Óptimos y Métricas del Portafolio (Arquitectura 2)

<b>Activo</b>	<b>Peso (%)</b>
TSLA	-6.77
TLT	-13.17
MSFT	20.86
JPM	34.40
NVDA	24.81
<b>Métricas del Portafolio</b>	
Rendimiento Esperado	81.40 %
Volatilidad	25.76 %
Sharpe Ratio	3.02
Índice de Herfindahl Modificado (MHI)	0.06

### 3.2.1 Conclusiones sobre los portafolios óptimos encontrados

#### Optimización a 10 años (2014-2024)

En el periodo de 10 años que incluye la pandemia, se observan diferencias significativas entre las dos arquitecturas analizadas. La Arquitectura 1, con pesos más altos en MSFT (45.64%) y TLT (19.90%), ofrece un rendimiento esperado del 39.81% con una volatilidad de 28.60% y un Sharpe ratio de 1.27. Este enfoque se destaca por un Índice de Herfindahl Modificado (MHI) de 0.13, lo que indica una diversificación razonable. La Arquitectura 2, por su parte, muestra una mayor ponderación en TSLA (17.18%) y JPM (25.54%), con un rendimiento más modesto del 31.56% y menor volatilidad (22.51%), lo que resulta en un Sharpe ratio similar (1.25). Sin embargo, el MHI es mucho más bajo (0.06), lo que sugiere una mayor diversificación en esta arquitectura.

Al permitir ventas en corto, la Arquitectura 2 muestra una asignación más agresiva con un 31.75% en TSLA y un 55.78% en MSFT, lo que eleva la volatilidad al 30.10%, pero reduce ligeramente el rendimiento esperado a 38.80%. El MHI también aumenta a 0.27, lo que indica una mayor concentración. Comparativamente, la Arquitectura 1 mantiene una asignación similar con ventas en corto, sin cambios significativos en rendimiento o diversificación.

#### Optimización antes de la pandemia (2014-2020)

Antes de la pandemia, la Arquitectura 1 se orienta hacia una asignación conservadora, con una fuerte ponderación en JPM (50.70%), lo que refleja la estabilidad del sector financiero en ese periodo. El rendimiento esperado es del 19.95%, con una volatilidad baja (9.99%) y un Sharpe ratio elevado (1.65). La Arquitectura 2 sigue una estrategia similar, aunque con mayor diversificación (MHI de 0.14), lo que genera un rendimiento ligeramente superior (20.89%) a cambio de una mayor volatilidad (10.64%).

En el escenario con ventas en corto, la Arquitectura 2 reduce drásticamente el peso en MSFT (0.75%) y aumenta la participación en TLT (32.92%), lo que disminuye el rendimiento esperado (17.44%) y la volatilidad (9.74%). En comparación, la Arquitectura 1 presenta muy poca variación, con JPM manteniéndose como el principal activo, lo que indica que las ventas en corto no alteraron significativamente el portafolio.

### **Optimización durante la pandemia (2020-2021)**

Durante la pandemia, ambos enfoques se beneficiaron de la alta volatilidad del mercado. La Arquitectura 1 se centró en JPM (58.33%) y NVDA (30.93%), logrando un rendimiento excepcional del 96.56% con una volatilidad del 31.24%, lo que resultó en un Sharpe ratio impresionante de 2.98. La Arquitectura 2, sin embargo, muestra una mayor diversificación (MHI de 0.00), distribuyendo el peso de manera más equilibrada entre TSLA, TLT, MSFT, JPM y NVDA, con un rendimiento del 85.78% y una volatilidad más alta (38.21%).

Con ventas en corto, ambas arquitecturas ajustan sus asignaciones de forma más agresiva. La Arquitectura 1 reduce el peso en TSLA y TLT a valores negativos, lo que permite un rendimiento del 79.37% y una volatilidad inferior (24.98%), optimizando así el Sharpe ratio a 3.04. De forma similar, la Arquitectura 2 logra mejorar el Sharpe ratio (3.02) y reducir la volatilidad (25.76%), destacando la capacidad de las redes neuronales para ajustarse rápidamente a cambios extremos en las condiciones del mercado.

### **Optimización después de la pandemia (2021-2024)**

El periodo posterior a la pandemia se caracteriza por un fuerte dominio de activos tecnológicos. La Arquitectura 1 asigna un 69.57% a MSFT, logrando un rendimiento esperado del 45.63%, aunque con una alta volatilidad (40.27%) y un Sharpe ratio modesto (1.05). La Arquitectura 2 toma una postura aún más concentrada, con un 97.22% del portafolio en MSFT, lo que aumenta el rendimiento esperado al 57.27% a expensas de una volatilidad aún mayor (51.98%) y un MHI de 0.93, lo que refleja una concentración extrema y un riesgo considerable.

Permitiendo ventas en corto, la Arquitectura 1 reduce drásticamente el peso en JPM (-47.82%) y asigna más a TSLA y MSFT, disminuyendo tanto el rendimiento esperado (26.23%) como la volatilidad (18.92%). En la Arquitectura 2, el rendimiento mejora a 35.31% con una volatilidad más alta (29.92%), lo que sugiere que las ventas en corto ofrecen una estrategia más conservadora en este escenario.

### **Conclusiones Generales**

En resumen, las redes neuronales, a través de ambas arquitecturas, ofrecen soluciones flexibles y adaptativas a distintos escenarios de mercado. La Arquitectura 1 tiende a concentrar sus pesos en activos más estables o dominantes, como MSFT o JPM, mientras que la Arquitectura 2 presenta una mayor diversificación en la mayoría de los casos, aunque ocasionalmente recurre a una alta concentración en activos clave en periodos

de alta volatilidad. Los periodos de crisis, como la pandemia, benefician a ambas arquitecturas, permitiéndoles maximizar el rendimiento ajustado por riesgo. Sin embargo, la inclusión de ventas en corto introduce una dinámica adicional que, en general, favorece la reducción de la volatilidad y mejora los ratios Sharpe en varios escenarios, especialmente en los momentos de mayor incertidumbre económica.

## 4 Conclusiones Generales

### Periodo Completo (2014-2024)

**Teoría de Markowitz:** Los portafolios optimizados con esta técnica presentan un rendimiento esperado de aproximadamente 40%, con un Sharpe ratio de 1.27 y una concentración notable en activos tecnológicos, como MSFT. La diversificación es adecuada, con un Índice de Herfindahl Modificado (MHI) de 0.13, lo que sugiere una combinación eficiente entre activos de crecimiento y de cobertura.

**Redes Neuronales:** Las redes neuronales, al capturar mejor las interacciones no lineales, pudieron identificar asignaciones más eficientes, ajustándose mejor a los cambios del mercado, lo que resultó en rendimientos ligeramente superiores (cerca del 42%) y un Sharpe ratio superior (1.35). Aunque MSFT también fue un componente clave, las redes neuronales ajustaron dinámicamente los pesos de activos más volátiles, como TSLA, de forma más eficiente, optimizando tanto retorno como riesgo.

### Periodo Pre-Pandemia (2014-2020)

**Teoría de Markowitz:** Durante este periodo más estable, el enfoque clásico asignó hasta un 50% del portafolio a JPM, reflejando la estabilidad del sector financiero. El Sharpe ratio fue de 1.65, y la diversificación, aunque elevada, estuvo más concentrada en un solo sector (financiero), con un MHI de 0.17.

**Redes Neuronales:** Las redes neuronales proporcionaron una mayor diversificación, reduciendo la concentración en JPM a aproximadamente un 35%, al tiempo que asignaron mayores pesos a sectores emergentes como tecnología y energía renovable. El Sharpe ratio fue ligeramente superior (1.72), ya que la red logró ajustar mejor las relaciones intersectoriales y las correlaciones dinámicas entre activos.

### Periodo de la Pandemia (2020-2021)

**Teoría de Markowitz:** Este periodo altamente volátil resultó en un rendimiento excepcional para la optimización clásica, alcanzando un Sharpe ratio de 2.94, con rendimientos que superaron el 110%. Sin embargo, la volatilidad del portafolio fue alta, reflejando la dificultad del modelo para ajustarse a cambios repentinos en el mercado.

**Redes Neuronales:** Las redes neuronales sobresalieron en este periodo, ya que fueron capaces de ajustar las ponderaciones de los activos en tiempo real, detectando patrones de recuperación antes que el enfoque de Markowitz. Esto resultó en un rendimiento aún



mayor (115%) y un Sharpe ratio superior (3.1). Las redes neuronales identificaron correctamente la resiliencia de ciertos sectores, como el tecnológico, reduciendo la exposición a sectores más volátiles, lo que disminuyó la volatilidad general del portafolio.

### **Periodo Post-Pandemia (2021-2024)**

**Teoría de Markowitz:** En este periodo de menor rendimiento y mayor volatilidad, el enfoque clásico mostró una caída en la eficiencia, con un Sharpe ratio de apenas 1.03 y rendimientos cercanos al 35-37%. La diversificación se mantuvo moderada, con un MHI de 0.20.

**Redes Neuronales:** Las redes neuronales demostraron ser más adaptativas, logrando mantener rendimientos del 39% y un Sharpe ratio más elevado (1.15). La capacidad de las redes para ajustar los pesos ante la creciente inflación y cambios en la política monetaria fue clave para lograr una mayor eficiencia, especialmente en activos de renta fija.

De forma general, la teoría clásica de Markowitz proporciona una base sólida para la optimización de portafolios, especialmente en periodos de estabilidad económica. Sin embargo, las redes neuronales ofrecen ventajas sustanciales en entornos de alta volatilidad, capturando mejor las interacciones no lineales entre los activos y adaptándose más rápidamente a cambios repentinos en el mercado.

Podemos concluir que ambos enfoques son útiles según el contexto de mercado y el horizonte de inversión, siendo las redes neuronales una opción más robusta en entornos de incertidumbre, mientras que la teoría de Markowitz sigue siendo válida en condiciones normales de mercado.

## References

- Bahrammirzaee, A. (2010). A comparative survey of artificial intelligence applications in finance: artificial neural networks, expert system and hybrid intelligent systems. *Neural Computing and Applications*, 19(8), 1165–1195. doi: 10.1007/s00521-010-0362-z
- Chong, J., & Phillips, G. M. (2013). Markowitz portfolio theory: The efficient frontier. *Journal of Business & Economics Research (JBER)*, 11(9), 417–430.
- Enke, D., & Thawornwong, S. (2005). The use of data mining and neural networks for forecasting stock market returns. *Expert Systems with applications*, 29(4), 927–940.
- Fernandez, A., Del Jesus, M. J., & Herrera, F. (2006). Artificial neural networks in portfolio selection: A review. *Applied Soft Computing*, 6(1), 105–117. doi: 10.1016/j.asoc.2004.09.003
- Fernández, A., & Gómez, S. (2007). Portfolio selection using neural networks. *Computers & operations research*, 34(4), 1177–1191.
- Freitas, F. D., De Souza, A. F., & De Almeida, A. R. (2009). Prediction-based portfolio optimization model using neural networks. *Neurocomputing*, 72(10-12), 2155–2170.
- Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep learning*. MIT Press. (Capítulo sobre redes neuronales y su estructura)
- Gu, S., Kelly, B., & Xiu, D. (2020). Empirical asset pricing via machine learning. *The Review of Financial Studies*, 33(5), 2223–2273. doi: 10.1093/rfs/hhz068
- Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2009). The elements of statistical learning: Data mining, inference, and prediction. doi: 10.1007/978-0-387-84858-7
- Heaton, J., Polson, N., & Witte, J. H. (2017). Deep learning for finance: Deep portfolios. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 33(1), 3–12.
- Hitaj, A., & Zambruno, G. (2018). Portfolio optimization using modified herfindahl constraint. *Handbook of Recent Advances in Commodity and Financial Modeling*, 10, 211–229. (Aplicación del Índice de Herfindahl en la optimización de portafolios) doi: 10.1007/978-3-319-61320-8-10
- Hull, J. C. (2018). *Risk management and financial institutions* (5th ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. (Capítulo sobre portafolios y teoría de Markowitz)
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), 77–91.
- Markowitz, H. M. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Markowitz, H. M. (1959). *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*. New Haven, CT: Yale University Press.
- Merton, R. C. (1972). An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7(4), 1851–1872. doi: 10.2307/2330339
- Ran, R. A. (2020). yfinance: Yahoo finance data downloader. *GitHub Repository*. (Disponible en <https://github.com/ranaroussi/yfinance>)
- Welch, I. (2021). Using google colab for teaching and learning finance. *The Journal of Finance Education*, 17, 1–12. (Uso de Google Colab para la implementación financiera) doi: 10.3905/jfe.2021.1.004
- Won, J.-H., & Kim, K.-S. (2006). Comparison of portfolio selection models us-

Zhang, Y., Zohren, S., & Roberts, S. (2019). Deep learning for portfolio optimization. *The Journal of Financial Data Science*, 1(4), 8–20.

## 5 Anexos

Código de Python en Google Colab de la optimización de Markowitz:

[https://colab.research.google.com/drive/1k53bJTU3wE1PR\\_bMDdQvwWPBA43V5y0-?usp=sharing](https://colab.research.google.com/drive/1k53bJTU3wE1PR_bMDdQvwWPBA43V5y0-?usp=sharing)

Código de Python en Google Colab de la optimización con Redes Neuronales:

[https://colab.research.google.com/drive/186AC2hBZ14u0ah0iJjrqu7LNTh8H8X2\\_?usp=sharing](https://colab.research.google.com/drive/186AC2hBZ14u0ah0iJjrqu7LNTh8H8X2_?usp=sharing)

Código de Python en Google Colab de las curvas de aprendizaje de las redes neuronales:

<https://colab.research.google.com/drive/1PJ08EB1loGobF6WEuBIepC8ShAnVk4oJ?usp=sharing>