

**MODELO TEÓRICO MIMO PARA UN SISTEMA DE ORIENTACIÓN DE 3DOF DE UN
SATÉLITE**

Trabajo de grado N° 0985

**CHRISTIAN ALEJANDRO ROSSO BAYONA
JUAN PABLO VIEIRA MARTINEZ**

**PROYECTO DE GRADO PRESENTADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO
ELECTRÓNICO**

**DIRECTOR
INGENIERO KAMILO ANDRES MELO BECERRA M.Sc**



**PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA
CARRERA DE INGENIERIA ELECTRÓNICA
BOGOTÁ D.C.
NOVIEMBRE DE 2010**

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

**FACULTAD DE INGENIERÍA
CARRERA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA**



**Rector de la Universidad:
Padre Joaquín Sánchez García S.J.**

**Decano Académico de la Facultad de Ingeniería:
Ingeniero Francisco Javier Rebolledo Muñoz**

**Decano Medio Universitario Facultad de Ingeniería:
Padre Sergio Bernal S.J.**

**Director de la Carrera de Ingeniería Electrónica:
Ingeniero Juan Manuel Cruz Bohórquez**

**Director de Departamento de Ingeniería Electrónica:
Ingeniero Jorge Luis Sánchez Téllez**

Artículo 23 de la resolución No. 13 del 6 de julio de 1964:

“La universidad no se hace responsable de los conceptos emitidos por sus alumnos en sus proyectos de grado.

Solo velará porque no se publique nada contrario al dogma y la moral católica y porque no contenga ataques o polémicas puramente personales. Antes bien, que se vean en ellos el anhelo de buscar la verdad y la justicia.”

Christian

Gracias por su apoyo Papá y Mamá, sin ustedes no estaría acá, este libro es de ustedes. Gracias a Chucho, Juancho y Daniela. Gracias a Juan Pablo por todo. Gracias ingeniero Kamilo por su colaboración a lo largo de este proceso y gracias a mis compañeros de cubículo de tesis: Jaime, Vladimir, Luke, Barrera, Luis, Pinto, Dora, Javier, Diego, Cristian y William.
Gracias

Juan Pablo

Christian hermano muchas gracias por el apoyo en este trabajo y en todos durante la carrera, gracias por ser siempre tan buen amigo.
A lucho, barreras, luke, Vladimir, tio james, familia reyes, diego, will por no dejar de trabajar nunca y por no dejarme ganar nuca! Por todas esas partidas de age que no sirvieron para nada, pero en serio muchas gracias por crear un ambiente lleno de compañerismo y tranquilidad.
A Khipa por su apoyo siempre, por ser el loco más teso que he conocido, y por apoyarme así no fuera en cosas de la tesis!
A mis hermanas y Madre por toda esa paciencia, apoyo, regaños, esperanzas y canas gastadas en mí que finalmente me hicieron la persona que soy.
Gracias

TABLA DE CONTENIDO

1	INTRODUCCIÓN	9
2	MARCO TEÓRICO	11
2.1	DINÁMICA DE CUERPOS RÍGIDOS EN TRES DIMENSIONES	11
2.1.1	CINEMÁTICA	11
2.1.2	CINÉTICA	12
2.2	ANÁLISIS DE CINEMÁTICA MEDIANTE ÁNGULOS DE EULER	14
2.2.1	MATRIZ SKEW	14
2.2.2	VELOCIDAD ANGULAR EN TÉRMINOS DE LA MATRIZ SKEW	15
2.2.3	EL JACOBIANO GEOMÉTRICO	15
3	ESPECIFICACIONES	17
3.1	REQUERIMIENTOS DEL MODELO	17
3.2	ENTRADAS	17
3.3	SALIDAS	18
3.4	VARIABLES DE DISTURBIO	19
3.4.1	TORQUE GRADIENTE DE GRAVEDAD	19
3.4.2	TORQUE AERODINÁMICO	19
3.4.3	TORQUE MAGNÉTICO	20
3.4.4	TORQUE RADIACIÓN SOLAR	20
3.4.5	EXPULSIÓN DE OBJETOS Y TORQUES INTERNOS	21
4	DESARROLLO	22
4.1	INTRODUCCIÓN	22
4.2	CINEMÁTICA DE ORIENTACIÓN PARA UN SATÉLITE	23
4.3	DINÁMICA DE ORIENTACIÓN PARA UN SATÉLITE	26
4.4	MODELO NO LINEAL DE ORIENTACIÓN PARA UN SATÉLITE	28
4.5	MODELO LINEAL DE ORIENTACIÓN PARA UN SATÉLITE	29
4.6	PARÁMETROS DEL SATÉLITE INTELSAT V	35
4.7	MODELO NO LINEAL DEL SATÉLITE INTELSAT V EN SIMULINK	36
4.8	MODELO LINEAL DEL SATÉLITE INTELSAT V EN SIMULINK	39
4.9	VALIDACIÓN DEL MODELO DINÁMICO DEL SATÉLITE	42
4.10	ANÁLISIS DE CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD	46
4.10.1	INTRODUCCIÓN	46
4.10.2	CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD DEL MODELO DINÁMICO	47
4.11	CONTROLADOR PARA EL SISTEMA DE ORIENTACIÓN	49
4.11.1	INTRODUCCIÓN	49

4.11.2	CONTROL POR RETROALIMENTACIÓN DE ESTADOS	50
5	ANÁLISIS DE RESULTADOS	56
6	CONCLUSIONES	57
7	BIBLIOGRAFÍA	59
8	ANEXOS	61
8.1	DINÁMICA DE CUERPOS RÍGIDOS EN TRES DIMENSIONES	61
8.1.1	CINEMÁTICA	61
8.1.2	CINÉTICA	64
8.2	ANÁLISIS DE CINEMÁTICA MEDIANTE ANGULOS DE EULER	73
8.2.1	MATRIZ SKEW	73
8.2.2	DERIVADA DE UNA MATRIZ DE ROTACIÓN EN TÉRMINOS DE LA MATRIZ SKEW	75
8.2.3	VELOCIDAD ANGULAR EN TÉRMINOS DE LA MATRIZ SKEW	77
8.2.4	VELOCIDAD LINEAL DE UN PUNTO ATADO A UN MARCO DE REFERENCIA EN MOVIMIENTO.....	79
8.2.5	EL JACOBIANO GEOMÉTRICO	81
8.2.6	EL JACOBIANO ANALÍTICO	86
8.3	CONTROL PASIVO DE ORIENTACIÓN	89
8.4	CONTROL ACTIVO DE ORIENTACIÓN	90

TABLA DE FIGURAS

Figura 1. Translación del marco de referencia (Meriam & Kraige, 1975)	11
Figura 2. Rotación del marco de referencia (Meriam & Kraige, 1975).....	12
Figura 3. Centro de masa (Meriam & Kraige, 1975)	12
Figura 4. Momento angular (Meriam & Kraige, 1975).....	12
Figura 5. Configuración del satélite, tomada del trabajo de grado “implementación de un sistema de actuación y adquisición de datos de orientación en 3DOF para pico satélites”	17
Figura 6. Configuración ortogonal de las ruedas de reacción(Jingyang Zhou, 2007)	18
Figura 7. Ángulos de rotación (Spong, Hutchinson, & Vidyasagar, 2006)	18
Figura 8. Representación del satélite en el espacio mediante vectores unitarios; vectores del cuerpo y configuración de las tres ruedas de reacción (Jafarov, 2006)	23
Figura 9. Definición de de los marcos de referencia (SIDI, 1997)	24
Figura 10. Esquema del satélite con las tres ruedas de reacción (Shahin S. Nudehi, 2008).....	28
Figura 11. Parámetros del satélite IntelsatV (Wie, 1952)	35
Figura 12. Modelo no lineal de la Ecuación 4-23 (aceleración en el eje x).....	36
Figura 13. Modelo no lineal de la Ecuación 4-23 (aceleración en el eje y).....	36
Figura 14. Modelo no lineal de la Ecuación 4-23 (aceleración en el eje z).....	37
Figura 15. Respuesta paso al modelo no lineal de la Ecuación 4-23 (gráfica de posición)	37
Figura 16. Respuesta paso al modelo no lineal de la Ecuación 4-23 (gráfica de velocidad)	38
Figura 17. Respuesta paso al modelo no lineal de la Ecuación 4-23 (gráfica de aceleración)	38
Figura 18. Modelo lineal de la Ecuación 4-29 en espacio de estados	39
Figura 19. Respuesta paso al modelo lineal de la Ecuación 4-29	39
Figura 20. Definición del vector de entrada al modelo lineal de la Ecuación 4-29	40
Figura 21. Definición del bloque modelo en espacio de estados de Simulink	40
Figura 22. Respuesta paso al modelo lineal de la Figura 17 (gráfica de posición)	41
Figura 23. Respuesta paso al modelo lineal de la Figura 17 (gráfica de velocidad)	41
Figura 24. Respuesta paso al modelo lineal de la Figura 17 (gráfica de aceleración)	42
Figura 25. Error de inclinación entre el modelo no lineal (arriba) y el modelo lineal (abajo)	44
Figura 26. Modelo lineal de la Ecuación 4-29 en espacio de estados	47
Figura 27. Matriz de controlabilidad del sistema definido en Figura 27 y su rango.....	48
Figura 28. Matriz de observabilidad del sistema definido en Figura 27 y su rango	49
Figura 29. Valores propios deseados por (Jafarov, 2006)	50
Figura 30. Código que calcula las ganancias de retroalimentación	51
Figura 31. Matriz de ganancia K	51
Figura 32. Control en lazo cerrado del sistema $u=-Kx$ (Ogata, 2002) (Ogata, 2002)	52
Figura 33. Diagrama de bloques del modelo MIMO del satélite	52
Figura 34. Definición del bloque A del sistema de control por retroalimentación de estados	52
Figura 35. Torques de control $K*u$	53
Figura 36. Posiciones angulares.....	54

Figura 37. Velocidades angulares	54
Figura 38. Aceleraciones angulares	55
Figura 39. Translación del marco de referencia.....	61
Figura 40. Rotación del marco de referencia.....	62
Figura 41. Centro de masa de un cuerpo rígido.....	64
Figura 42. Momento angular.....	65
Figura 43. Momento lineal	68
Figura 44. Velocidad lineal de un punto atado a un marco de referencia en movimiento	80
Figura 45. Satélite de un grado de libertad (French, 1995)	89
Figura 46. Diagrama de bloques del sistema de control de orientación para un grado de libertad	90
Figura 47. Sistema de control completo para un grado de libertad	91
Figura 48. Diseño del sistema de control de orientación 1DOF.....	93
Figura 49. Respuesta paso (posición) al sistema de control con entrada 0.1Nm.....	94
Figura 50. Respuesta paso (posición) al sistema de control con entrada 0.05Nm.....	94
Figura 51. Respuesta paso (velocidad angular) al sistema de control con entrada 0.1Nm.....	95
Figura 52. Respuesta paso (aceleración angular) al sistema de control con entrada 0.1Nm.....	95

1 INTRODUCCIÓN

Un modelo es una representación matemática de la realidad mostrada como un sistema, su importancia se concentra en que proporciona un medio más simple (desde el punto de vista de la simulación) para conocer el comportamiento del sistema. Es decir, es consecuente del proceso para el análisis en relación tanto a los efectos que el medio ejerza sobre éste, como también de aquellos derivados de las modificaciones de sus características internas. En otras palabras, el modelo es una herramienta usada para el análisis de los procesos a través de análisis de sistemas.

El modelo a desarrollar se centra en la dinámica que condiciona el comportamiento de los estados de un sistema de orientación genérico de 3DOF de un satélite, tales como interrelaciones entre sus variables de entrada y salida, el efecto de las perturbaciones, los rangos de estabilidad, el efecto de la variación de parámetros, etc.; las perturbaciones variables se incluirán como un factor importante que también actúa desde el exterior y cuyo efecto sobre el sistema siempre es conocido, dichas perturbaciones pueden llegar a introducir variaciones en los parámetros que determinan el comportamiento del modelo, generando así una componente de incertidumbre en el estudio. Un modelamiento completo se obtiene mediante experimentación y simulaciones, que permitan conocer todas las características involucradas haciendo que se pueda validar el modelo, para así lograr un acercamiento bastante significativo en comparación a la planta real y declarar entonces su veracidad.

El trabajo de grado se justifica en la necesidad de determinar un modelo matemático totalmente analítico, capaz de describir el comportamiento de un sistema de orientación genérico de 3DOF, definiendo este como un sistema en donde se puede ver con claridad el comportamiento de cada una de las variables que afectan el movimiento del sistema y por lo tanto la orientación, de tal manera que se puedan obtener desde ese modelo, modelos más sencillos, lineales y así poder realizar un respectivo análisis de controlabilidad, para posteriormente establecer las especificaciones mínimas para la síntesis de un posible controlador simulado para este sistema. Adicionalmente, quedará como resultado de este trabajo, un modelo que puede ser base para futuras investigaciones, adiciones y complementos de un sistema MIMO de orientación de 3DOF. El modelo que se va a determinar permitirá estudiar la dinámica de satélites en general de 3DOF. La investigación en el campo aeroespacial tiene pocos avances en la Universidad Javeriana y la escasa información en el país justificaría el desarrollo del proyecto, y así aportar ingeniería en este tema a la sociedad local.

Para la realización de este modelo se evaluarán los espacios de estados del sistema, basados en un sistema de orientación 3DOF de un satélite, sobre el cual se realizarán los análisis que permitan describir la dinámica del sistema. El sistema tiene como entradas los 3 momentos angulares de los motores (comandantes de ruedas inerciales), estos momentos angulares son proporcionales a la señal de voltaje aplicado a cada uno de estos; las 3 salidas del sistema (que son los 3 grados de libertad de orientación) se dan gracias al desbalance entre las velocidades de los motores que mediante la conservación del momento angular permiten el gobierno de la rotación de la planta. El análisis dinámico se basa en formulaciones de Newton-Euler, posteriormente esta formulación se evaluará y se analizará para llevar a cabo la simulación del comportamiento del satélite.

Continuando con el modelo determinado, se establecerán los efectos externos, tales como señales de disturbio o ruido que pueden llegar a afectar al sistema, de manera que se puedan sumar al modelo inicial con el fin de generar un acercamiento más próximo a la realidad. De esta manera, conociendo las variables que se obviaron o bien el cambio de los posibles parámetros dentro del modelo ya establecido, se planteará un modelo aun más completo teniendo en cuenta los disturbios. Seguidamente se linealizará este modelo de manera que se obtenga la validación de éste alrededor de un punto de operación.

Se realiza una validación mediante una comparación entre el modelo no lineal que se determinó en los pasos anteriores y el modelo linealizado del mismo, este procedimiento se realiza por intermedio de

simulaciones hechas en MatLab®, en las que se espera un comportamiento similar en un punto de operación seleccionado. El siguiente paso, utiliza el modelo linealizado para así determinar su controlabilidad; este proceso empieza con la selección del método que se va a utilizar para llevar a cabo el análisis de controlabilidad del modelo lineal, para posteriormente utilizarlo y determinar si el sistema es controlable o no. En el caso en el que el sistema sea controlable, se procederá a justificar el tipo de control que necesitaría la planta junto con sus parámetros y se sintetizará un controlador sencillo únicamente simulado, abarcando así la estrategia de control para dicho modelo lineal.

En resumen, el objetivo principal de este trabajo de grado es determinar un modelo teórico MIMO (simbólico) para un sistema de orientación genérico de 3DOF de un satélite realizando el análisis de controlabilidad de un modelo lineal extraído de éste, para dar las especificaciones mínimas para la síntesis de un posible controlador. Asimismo, determinar un modelo teórico en espacio de estados de un sistema de orientación genérico de 3DOF de un satélite basado en análisis de su dinámica (Newton-Euler). Definir señales de disturbios, ruido, así como las incertidumbres para complementar el modelo anterior. Linealizar el modelo en espacio de estados anterior alrededor de un punto de operación. Analizar la controlabilidad del modelo linealizado. Y por último, sintetizar y simular un posible controlador sencillo, dados los resultados del anterior análisis.

2 MARCO TEÓRICO

2.1 DINÁMICA DE CUERPOS RÍGIDOS EN TRES DIMENSIONES

2.1.1 CINEMÁTICA

La velocidad v y la aceleración a de cualquier punto A en el cuerpo rígido vistas desde un marco inercial están dadas por las siguientes expresiones relativas:

$$v_A = v_B + v_{A/B}$$

Ecuación 2-1

$$a_A = a_B + a_{A/B}$$

Ecuación 2-2

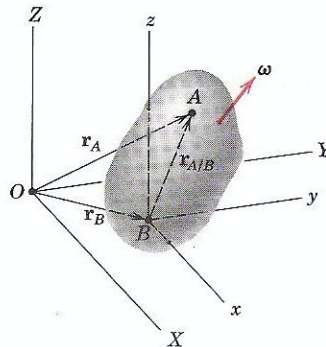


Figura 1. Translación del marco de referencia (Meriam & Kraige, 1975)

La expresión para la velocidad del punto A vista en el marco inercial cuando el marco del cuerpo rota con una velocidad angular Ω mientras el punto A tiene una velocidad lineal con respecto al origen del marco del cuerpo B es:

$$v_A = v_B + (\Omega \times r_{A/B}) + v_{rel}$$

Ecuación 2-3

Donde v_B es la velocidad del marco fijo al cuerpo respecto al marco inercial, $r_{A/B}$ es el vector desde el origen del marco del cuerpo hasta el punto A y v_{rel} es la velocidad relativa que existe dentro del cuerpo entre el origen del marco del cuerpo y el punto A . Respectivamente la aceleración del punto A es:

$$a_A = a_B + \Omega' \times r_{A/B} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + 2\Omega \times v_{rel} + a_{rel}$$

Ecuación 2-4

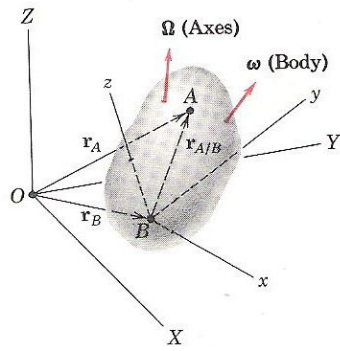


Figura 2. Rotación del marco de referencia (Meriam & Kraige, 1975)

2.1.2 CINÉTICA

2.1.2.1 MOMENTO ANGULAR

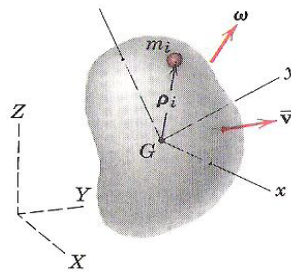


Figura 3. Centro de masa (Meriam & Kraige, 1975)

El momento angular del cuerpo en relación con el centro de masa G , es la suma de los momentos lineales de todos los elementos del cuerpo que ocurren sobre G y se expresa como:

$$H = \sum (\rho_i \times m_i v) + \sum [\rho_i \times m_i (\omega \times \rho_i)] \quad \text{Ecuación 2-5}$$

ρ_i es el vector desde el centro de masa del cuerpo hasta la masa m_i , v_i es la velocidad del elemento de masa m_i y ω es la velocidad angular con la que gira el cuerpo con respecto al marco inercial.

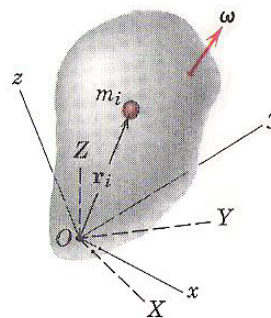


Figura 4. Momento angular (Meriam & Kraige, 1975)

Si el centro de masa G del cuerpo coincide con los marcos de referencia XYZ y xyz , entonces el primer término del momento angular H se anula y el momento angular sobre el punto O sería:

$$H = \int (r \times [\omega \times r]) \cdot dm \quad \text{Ecuación 2-6}$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior y que la magnitud del momento angular $|H| = I\omega$, el momento angular y la matriz de momento de inercia de un cuerpo rígido se pueden escribir como:

$$H = i \left[I_{xx} \omega_x \quad -I_{xy} \omega_y \quad -I_{xz} \omega_z \right] \\ + j \left[-I_{yx} \omega_x \quad +I_{yy} \omega_y \quad -I_{yz} \omega_z \right] \\ + k \left[-I_{zx} \omega_x \quad -I_{zy} \omega_y \quad +I_{zz} \omega_z \right]$$

$$I_{xx} = \int y^2 + z^2 dm \quad I_{xy} = \int xy dm$$

$$I_{yy} = \int x^2 + z^2 dm \quad I_{yz} = \int yz dm$$

$$I_{zz} = \int x^2 + y^2 dm \quad I_{zx} = \int xz dm$$

Los momentos de inercia correspondientes a I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} son los momentos de inercia del cuerpo que giran en su respectivo eje, mientras que los demás momentos de inercia son los productos de inercia respecto al eje de coordenadas. Estas cantidades nos muestran la manera en la que está distribuida la masa de un cuerpo rígido con respecto al marco de referencia.

2.1.2.2 ENERGÍA CINÉTICA

La energía cinética total de un sistema de masas se define como:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \sum \frac{1}{2} m_i |\rho_i'|^2 \quad \text{Ecuación 2-7}$$

Donde v es la velocidad del centro de masas y ρ_i es el vector posición de un elemento de masa m_i con respecto al centro de masa. Se identifica el primer término de la ecuación como la energía cinética debida a la translación del sistema y el segundo término es la energía cinética asociada al movimiento relativo al centro de masas ó energía cinética debida a la rotación respecto al centro de masa. Entonces la expresión general para la energía cinética de un cuerpo rígido moviéndose con una velocidad de centro de masa v y una velocidad angular ω es:

$$T = \frac{1}{2} v \bullet G + \frac{1}{2} \omega \bullet H \quad \text{Ecuación 2-8}$$

Si los ejes coinciden con el eje principal de inercia, la energía cinética es solamente:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2)$$

2.1.2.3 ECUACIONES DE MOVIMIENTO ECUACIONES DE MOMENTO

Cuando H es expresado en términos de componentes relativos medidos respecto a un sistema de coordenadas en movimientos xyz , donde se tiene una velocidad angular Ω , luego en la ecuación la relación de momentos es:

$$\sum M = \left(\frac{dH}{dt} \right)_{xyz} + \Omega \times H$$

Expandiendo el producto cruz y arreglando términos, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum M = & i \left[H'_x - H_y \Omega_z + H_z \Omega_y \right] \\ & + j \left[H'_y - H_z \Omega_x + H_x \Omega_z \right] \\ & + k \left[H'_z - H_x \Omega_y + H_y \Omega_x \right] \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2-9}$$

Esta ecuación es la forma más general de la ecuación de momento respecto a un punto fijado O ó respecto al centro de masa G . La Ω son las componentes de la velocidad angular de rotación de los ejes de referencia

2.2 ANÁLISIS DE CINEMÁTICA MEDIANTE ÁNGULOS DE EULER

2.2.1 MATRIZ SKEW

La matriz skew anti simétrica S contiene solo 3 entradas independientes y cada matriz anti simétrica skew de 3×3 es de la forma:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 2-10}$$

Si existe un vector de la forma $a = (a_x, a_y, a_z)^T$, se define la matriz anti simétrica skew $S(a)$ como (Spong, Hutchinson, & Vidyasagar, 2006):

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 2-11}$$

La derivada de una matriz de rotación en términos de la matriz skew es:

$$\begin{aligned} S & := \frac{dR(\theta)}{d\theta} R(\theta)^T \\ \frac{dR(\theta)}{d\theta} & = SR(\theta) \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2-12}$$

Donde $R(\theta)$ es la matriz de rotación con respecto a un marco inercial.

2.2.2 VELOCIDAD ANGULAR EN TÉRMINOS DE LA MATRIZ SKEW

La matriz anti simétrica del vector velocidad angular denotado como $\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ es:

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 2-13}$$

Y por lo tanto la derivada de la matriz de rotación aplicada a la velocidad angular es:

$$R(t)' = S(\omega(t))R(t) \quad \text{Ecuación 2-14}$$

2.2.2.1 SUMA DE VELOCIDADES ANGULARES EN TÉRMINOS DE LA MATRIZ SKEW

La velocidad angular resultante generada por la rotación relativa de marcos de referencia es:

$$\begin{aligned} \omega_{0,n}^0 &= \omega_{0,1}^0 + R_1^0 \omega_{1,2}^1 + R_2^0 \omega_{2,3}^2 + R_3^0 \omega_{3,4}^3 + \dots + R_{n-1}^0 \omega_{n-1,n}^{n-1} \\ \omega_{0,n}^0 &= \omega_{0,1}^0 + \omega_{1,2}^0 + \omega_{2,3}^0 + \omega_{3,4}^0 + \dots + \omega_{n-1,n}^0 \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2-15}$$

2.2.3 EL JACOBIANO GEOMÉTRICO

2.2.3.1 INTRODUCCIÓN

La relación entre las velocidades angulares y lineales y el conjunto de velocidades $\dot{q}(t)$ de la forma:

$$v_n^0 = J_v \dot{q} \quad \text{Ecuación 2-16}$$

$$\omega_n^0 = J_\omega \dot{q} \quad \text{Ecuación 2-17}$$

Es el vector ξ velocidad de cuerpo. Se pueden escribir las dos ecuaciones anteriores juntas de la siguiente manera:

$$\xi = J \dot{q} \quad \text{Ecuación 2-18}$$

En donde ξ y J vienen dados por:

$$\begin{aligned} \xi &= \begin{bmatrix} v_n^0 \\ \omega_n^0 \end{bmatrix} \\ J &= \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2-19}$$

2.2.3.2 OPERADOR JACOBIANO DE VELOCIDAD ANGULAR

Si el punto i únicamente presenta movimiento de translación (prismático), la velocidad angular del efector final no depende de q_i . La velocidad angular total del efector final ω_n^0 vista en el marco inercial es determinada por:

$$\omega_n^0 = \rho_1 \dot{q}_1 k + \rho_2 \dot{q}_2 R_1^0 k + \dots + \rho_n \dot{q}_n R_{n-1}^0 k = \sum_{i=1}^n \rho_i \dot{q}_i z_{i-1}^0 \quad \text{Ecuación 2-20}$$

En donde ρ_i es igual a 1 si la junta i rota y 0 si la junta i tiene movimiento de translación, entonces:

$$z_{i-1}^0 = R_{i-1}^0 k \quad \text{Ecuación 2-21}$$

Tomando la parte baja del Jacobiano J_ω , se tiene como resultado:

$$J_\omega = [\rho_1 z_0, \dots, \rho_n z_{n-1}] \quad \text{Ecuación 2-22}$$

3 ESPECIFICACIONES

3.1 REQUERIMIENTOS DEL MODELO

Para la realización de este modelo se evalúan los espacios de estados del sistema. Basados en un sistema de orientación de 3DOF de un satélite, se realizan los análisis pertinentes que permitan describir la dinámica del sistema. Para ello se deberá tener en cuenta todas las partes que conforman el satélite, las cuales involucran los soportes, tres motores DC, tres ruedas de reacción, driver de potencia, micro controlador, batería, giróscopo, acelerómetro y posiblemente una brújula magnética; el conocimiento adecuado del funcionamiento correcto de todos los componentes que conforman el sistema será de gran ayuda para determinar el modelo de la planta. Dado que el proyecto se basa en un análisis únicamente matemático, el trabajo se centrará en un aspecto muy importante como son las ruedas de reacción.

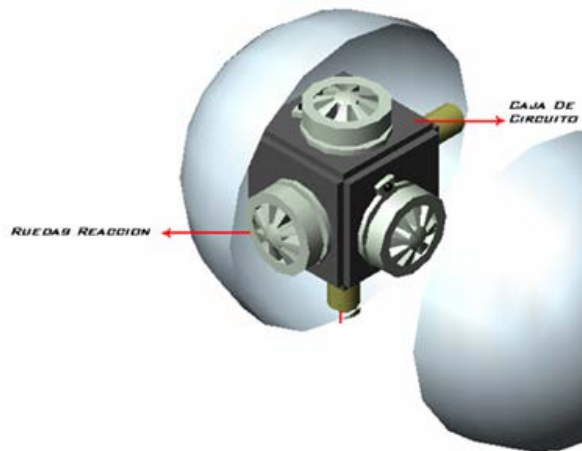


Figura 5. Configuración del satélite, tomada del trabajo de grado “implementación de un sistema de actuación y adquisición de datos de orientación en 3DOF para pico satélites”

Las ruedas de reacción le proporcionan movimiento al satélite en diversas direcciones, este movimiento (los cuales son los tres grados de libertad) se da gracias al desbalance entre las velocidades de los motores que mediante la conservación del momento angular permite la rotación de la planta. El movimiento de las ruedas será proporcionado por motores DC, los cuales aplicarán un torque capaz de mover las ruedas de reacción.

3.2 ENTRADAS

El modelo utiliza como variables de entrada los torques generados por la carga de los motores, en otras palabras las entradas son el cambio del momento angular en el tiempo de cada una de las ruedas de reacción $T = H'$, estos torques son generados por la interacción entre la carga de cada motor y su respectiva aceleración angular; la carga en nuestro dispositivo es la rueda, las cuales se encuentran ubicadas en cada extremo de los ejes del satélite.

$$H' = \frac{dH_o}{dt} = \frac{d(r \times mv)}{dt} = r \times ma = r \times F = M_o$$

Ecuación 3-1

La cantidad al lado derecho de la ecuación es el momento de las fuerzas externas resultantes alrededor del punto O , $M_O = r \times F$. La tasa de cambio del momento angular de una partícula en un punto es igual al momento aplicado en ese punto. Para este caso de estudio, la ecuación tiene mayor uso cuando se trata de un sistema de partículas (cuerpo rígido).

3.3 SALIDAS

La salida del modelo es la posición del sistema, la cual incluye el cabeceo (ψ), la orientación (θ) y la inclinación (ϕ); como variables de salida del modelo también se incluyen las velocidades angulares ω_1 (pitch), ω_2 (roll) y ω_3 (yaw); y como consecuencia de lo anterior se tienen también como variables de salida las tres correspondientes aceleraciones angulares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ del modelo.

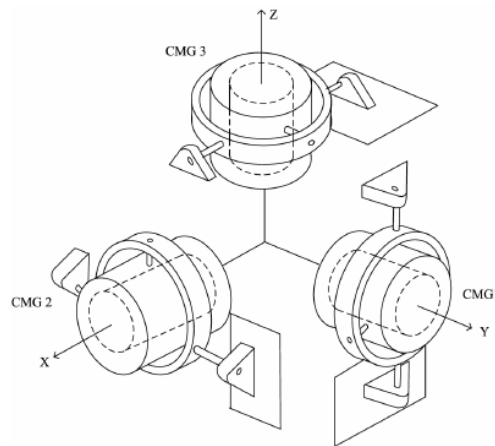


Figura 6. Configuración ortogonal de las ruedas de reacción (Jingyang Zhou, 2007)

Las variables anteriormente mencionadas se describen mediante ángulos de rotación, los cuales son definidos como el producto de rotaciones sucesivas que se generan en cada una de las ruedas de reacción ubicadas en los extremos de cada eje, y que se toman en un orden específico en las coordenadas principales $X_0Y_0Z_0$, a dichas rotaciones se les llama de igual manera matrices de rotación, descrita con más detalle a lo largo del documento. Para entender con más claridad como dichos ángulos influyen en el movimiento de cada uno de los ejes del satélite, se muestra la Figura 7:

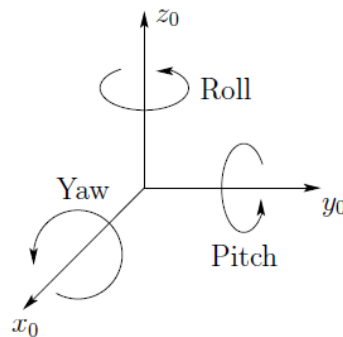


Figura 7. Ángulos de rotación (Spong, Hutchinson, & Vidyasagar, 2006)

3.4 VARIABLES DE DISTURBIO

A continuación se realiza una breve descripción de los posibles disturbios involucrados en el ambiente físico en el cual se desenvuelven los satélites, estas variables de disturbio se mencionan a manera de ejemplo:

3.4.1 TORQUE GRADIENTE DE GRAVEDAD

Este es un fenómeno que afecta a cuerpos como planetas y satélites debido a que la gravedad que incide sobre estos cuerpos no es uniforme. Podemos ver un claro ejemplo de esto en la interacción entre la tierra y la luna, las cuales están sometidas cada una a la gravedad de la otra, provocando la existencia de las mareas, esto debido a que la distancia entre la luna y la tierra no siempre es la misma (Hollister, 1997).

El torque del Gradiente de Gravedad en general será entonces:

$$T \cong 3n^2 \begin{bmatrix} \phi(I_{zz} - I_{yy}) \\ \theta(I_{zz} - I_{xx}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 3-2}$$

Donde n es la órbita terrestre (Orbital Rate), según trabajo del MIT que se tomo como referencia (Hollister, 1997) $n = 0.001 \text{ s}^{-1}$, I son los momentos de inercia con respecto a cada eje del satélite $I = 1000 \text{ kgm}^2$. Generándose un torque de $T = 6.7 \times 10^{-5} \text{ Nm / deg}$.

3.4.2 TORQUE AERODINÁMICO

El torque aerodinámico viene dado por:

$$T = r \times F_a \quad \text{Ecuación 3-3}$$

Donde r es el vector desde el centro de masa del cuerpo hasta el punto en donde la presión produce un mayor arrastre. F_a es el vector que representa la fuerza de arrastre aerodinámico que se encuentra afectando al dispositivo y viene definido como:

$$F_a = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D \quad \text{Ecuación 3-4}$$

Donde:

ρ = Densidad atmosférica

C_D = Coeficiente de arrastre aerodinámico

S = Area frontal proyectada

V = Velocidad del dispositivo en orbita

ρ variará entre 5-10 dependiendo de la altitud en la que se encuentre y C_D será un valor con una incertidumbre de aproximadamente el 50 %. Los valores usados en referencia (Hollister, 1997) del MIT como ejemplo son:

$$r = 4 \times 10^{-12} \text{ kg} / \text{m}^3 (400 \text{ km})$$

$$C_D = 2$$

$$S = 5 \text{ m}^2$$

$$T = 1.2 \times 10^{-4} \text{ Nm}$$

3.4.3 TORQUE MAGNÉTICO

El torque magnético viene dado por:

$$T = M \times B$$

Ecuación 3-5

Donde B es el vector que representa el campo magnético de la tierra con respecto al marco de referencia del satélite. M es el momento dipolar magnético del dispositivo expresado en Tesla (SI) o Gauss (CGS); M es debido a los lazos de corriente y al dipolo magnético, este momento dipolar magnético será del orden de 100 Pole cm.¹ o más para las naves espaciales pequeñas (Hollister, 1997).

Los compuestos de los diferentes metales utilizados en los dispositivos como los satélites presentan diversos momentos magnéticos, pero es posible encontrar un intervalo típico para cada metal en cada estado de oxidación, teniendo en cuenta, por supuesto, si es de espín alto o bajo.

Valores típicos del torque magnético y demás variables encontradas en otros dispositivos semejantes:

$$M = 0.1 \text{ atm}^2$$

$$B = 3 \times 10^{-5} \text{ Tesla}$$

$$T = 3 \times 10^{-6} \text{ Nm}$$

3.4.4 TORQUE RADIACIÓN SOLAR

El torque de radiación solar esta dado por:

$$T = r \times F_s$$

Ecuación 3-6

Donde r es el vector desde el centro de masa del satélite hasta centro óptico de presión. F_s es la presión de la radiación solar respecto a las coordenadas de cuerpo rígido (satélite) y se define como:

$$F_s = (1 + K) P_s S$$

$$P_s = I_s / c$$

$$I_s = 1400 \text{ W} / \text{m}^2 \text{ valor respecto a 1 A.U.}^2$$

Donde K es la reflectividad solar, que varía entre $0 < K < 1$, S es el área frontal expuesta del dispositivo, I_s es la constante solar.³. Este torque es inducido debido al efecto de la presión solar sobre el centro de masa. Esto se puede compensar con las ruedas de reacción. Este torque es siempre perpendicular a la línea

¹ Unidades electromagnéticas (UEM), donde $1 \text{ Atm}^2 = 1000 \text{ Pole cm}$

² Unidad astronómica (UA) es aproximadamente la distancia media del Sol a la Tierra.

³ La constante solar es la cantidad de energía recibida en la parte superior de la atmósfera de la Tierra en una superficie que se encuentra orientada perpendicularmente a los rayos del Sol. La medida de la constante solar es medida por medio de un satélite que generalmente da un valor de 1368 W/m² en promedio anual.

del sol y es independiente de la posición o velocidad, siempre y cuando se encuentre expuesto a la luz solar. Los valores usados en la referencia (Hollister, 1997) del MIT como ejemplo:

$$K = 0.5$$

$$S = 5m^2$$

$$r = 0.1m$$

$$T = 3.5 \times 10^6 Nm$$

3.4.5 EXPULSIÓN DE OBJETOS Y TORQUES INTERNOS

Expulsión de masas:

- Puede ser deliberado (venteo de gas o propulsores) o accidentales (fugas).
- Amplio valor de r o F (uno de estos puede dominar a los demás).
- Debido al movimiento de las piezas (ruedas de reacción).

Torques internos:

El cambio de momento entre el movimiento de los elementos no tiene ningún efecto sobre el sistema, pero afectan a los bucles de control de orientación. Por lo general estos torques se deben a la antena, el panel solar, el escáner en movimiento, brazos desplegable o daños después del despegue.

Todos los valores referidos a las variables de disturbio, son datos aproximados que se han obtenido de (Hollister, 1997) en anteriores experimentos espaciales en satélites, y con los cuales se pretende dar una referencia clara que se pueda tener en cuenta al momento de realizar un análisis más completo enfocado a sistemas espaciales.

4 DESARROLLO

4.1 INTRODUCCIÓN

La descripción analítica de la orientación de un satélite se puede desarrollar mediante cuatro métodos diferentes: ángulos de Euler (ϕ, θ, ψ) , cosenos direccionales $C_{ij} = a_i \cdot b_j$, velocidad angular ω y cuaterniones $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T$. A continuación se realiza una breve descripción de cada uno de estos métodos incluyendo sus respectivas ventajas y desventajas en la determinación de la orientación.

Los ángulos de Euler describen una secuencia de tres rotaciones alrededor de diferentes ejes con el fin de alinear un sistema de coordenadas en rotación con otro sistema de coordenadas fijo inercial; se pueden utilizar como una matriz de transformación desde el marco coordinado en movimiento hasta el marco mundo y tienen una secuencia exacta. Igualmente, los ángulos de Euler pueden presentar alguna singularidad ya que estos no son únicos. Este método es ideal para trabajos de diseño y determinación de orientación y control (Hollister, 1997).

Con el método de los cosenos direccionales, la orientación está definida como una única matriz, pero se deben cumplir 6 limitaciones las cuales no son intuitivas. La matriz de los cosenos direccionados involucra 9 términos que son los ángulos cosenos entre el vector de orientación y los tres ejes coordinados. La matriz de cosenos direccionados expresa un grupo de vectores básicos orto-normales en términos de otro grupo diferente de vectores básicos (Hollister, 1997).

Para el caso de la velocidad angular, este método posee un grupo de propiedades físicas y matemáticas en tres dimensiones que permiten sumar los vectores resultantes en el marco inercial. Sin embargo, al incluir la variable del tiempo en el marco inercial, no se obtiene la orientación del cuerpo. Para determinar la orientación del cuerpo se necesita incluir un sistema de matrices de transformación. Para este caso, se deben almacenar las condiciones iniciales existentes en el cuerpo (Hollister, 1997).

Por último, el método de los cuaterniones consigue una apariencia muy compacta y eficiente pero puede presentar alguna discontinuidad, esto complicaría el desarrollo computacional del modelo, estas discontinuidades se pueden evitar mediante la aplicación del teorema de Euler. La orientación del cuerpo se especifica mediante un vector que indica la dirección de un eje atado al cuerpo y un escalar que indica el ángulo de rotación alrededor del eje del cuerpo. La definición introduce un cuarto elemento redundante, el cual elimina las singularidades. Los cuaterniones no poseen un significado interpretable intuitivamente a la mente humana, pero computacionalmente es muy conveniente (Hollister, 1997).

Teniendo como base la anterior argumentación, el método que se escoge para describir el análisis de la orientación de un satélite son los ángulos de Euler. Se escoge este método ya que se puede expresar la rotación de un marco de referencia con respecto a un marco fijo para luego determinar la velocidad y la aceleración del cuerpo en rotación. Este método es muy utilizado en este aspecto porque proporciona un análisis matemático sencillo respecto a métodos como el de los cosenos direccionales o los cuaterniones.

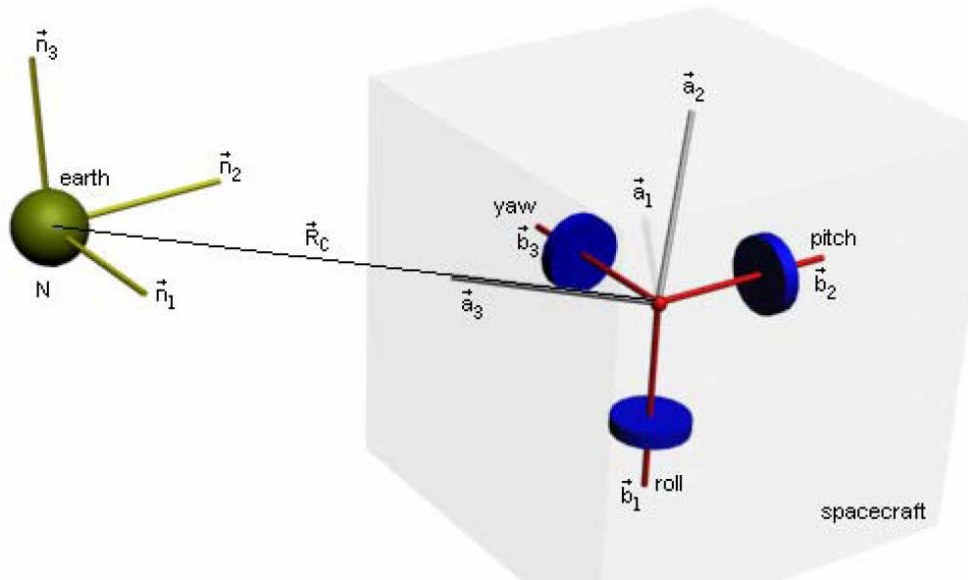


Figura 8. Representación del satélite en el espacio mediante vectores unitarios; vectores del cuerpo y configuración de las tres ruedas de reacción (Jafarov, 2006)

4.2 CINEMATICA DE ORIENTACIÓN PARA UN SATÉLITE

Se escoge el orden de transformación de los ejes como $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$ (con el orden de rotación de los ejes $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$), $R_{z,\psi}$ es la primera matriz de rotación angular alrededor del eje Z_B (el prefijo B indica que es el marco de referencia del cuerpo). La siguiente rotación se genera sobre el eje Y_B en el marco de referencia del satélite con un ángulo de θ , finalmente la matriz de rotación angular $R_{x,\phi}$ describe un giro en el eje X_B del cuerpo rígido. Por lo tanto la matriz de de multiplicación se escribe como:

$$R_{321} = R_{x,\phi} R_{y,\theta} R_{z,\psi}$$

$$R_{321} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 4-1}$$

$$R_{321} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\theta s\phi c\psi - c\phi s\psi & s\theta s\phi s\psi + c\phi c\psi & c\theta s\phi \\ s\theta c\phi c\psi + s\phi s\psi & s\theta c\phi s\psi - s\phi c\psi & c\theta c\phi \end{bmatrix}$$

Donde la letra c representa la función trigonométrica coseno mientras que la letra s es la función seno del ángulo determinado. Esta ecuación es la matriz de los cosenos directores expresada en ángulos de Euler, y muestra la rotación de los ejes del satélite respecto al marco de referencia del cuerpo $X_R Y_R Z_R$. Con el propósito de describir aún mejor el proceso de rotación angular del cuerpo, se tiene como ejemplo la rotación en el eje Z_B . Donde la derivada del ángulo ψ denotada como $d\psi/dt$ se censa sobre el mismo marco de referencia del cuerpo y en el mismo eje coordenado.

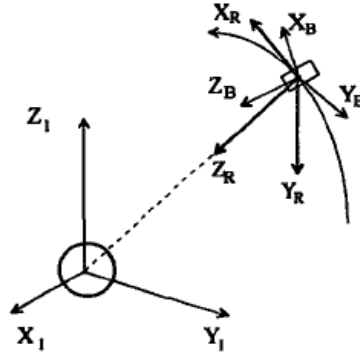


Figura 9. Definición de de los marcos de referencia (SIDI, 1997)

Se debe encontrar una relación entre los ángulos de Euler y sus derivadas para luego obtener el vector velocidad angular del satélite (marco de referencia del cuerpo) en su movimiento rotacional. La primera rotación es alrededor del eje Z_B (eje número 3 según la secuencia de rotación $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$) y conlleva a la derivada $d\psi/dt$ en el mismo eje de rotación; esta derivada está sujeta a tres transformaciones sucesivas angulares: la primera en el eje Z_B por un ángulo de rotación de ψ , la segunda sobre el eje Y_B por un ángulo θ y finalmente alrededor del eje X_B mediante un ángulo ϕ .

La segunda transformación se produce en el eje Y_B (segundo eje según la secuencia de rotación anteriormente mencionada) con un ángulo θ , causa la derivada $d\theta/dt$; esta derivada está sujeta a dos rotaciones angulares: la primera en el eje Y_B con un ángulo θ y la segunda alrededor del eje X_B con el ángulo ϕ . La tercera y última rotación, sobre el eje X_B (eje número 1) produce la derivada $d\phi/dt$; esta derivada es causa de una única matriz de transformación de orientación: alrededor del eje X_B por un ángulo ϕ . Por lo tanto, se calcula el vector velocidad angular del satélite en el marco atado al centro de masa del cuerpo rígido $X_R Y_R Z_R$ relativo al marco de referencia del cuerpo $X_B Y_B Z_B$ de la siguiente manera:

$$\omega_B = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = R_{x,\phi} R_{y,\theta} R_{z,\psi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi' \end{bmatrix} + R_{x,\phi} R_{y,\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ \theta' \\ 0 \end{bmatrix} + R_{x,\phi} \begin{bmatrix} \phi' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 4-2}$$

Reemplazando las respectivas matrices de transformación de orientación en la anterior ecuación:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \theta' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 4-3}$$

Realizando las multiplicaciones correspondientes, se tiene el vector velocidad angular en términos de los ángulos y de las derivadas de los ángulos en cada uno de los ejes del marco del cuerpo respecto al marco de referencia:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi' - \psi' s\theta \\ \theta' c\phi + \psi' c\theta s\phi \\ \psi' c\theta c\phi - \theta' s\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\theta & 0 & 1 \\ c\theta s\phi & c\phi & 0 \\ c\theta c\phi & -s\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi' \\ \theta' \\ \phi' \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 4-4}$$

Las anteriores ecuaciones se pueden resolver para ψ', θ', ϕ' . La matriz que acompaña al vector de las posiciones derivadas se conoce en dinámica espacial como la matriz B; debido a que la matriz B es no singular (su determinante es diferente de cero) entonces pasa al otro lado de la igualdad mediante su inversa (Baruh, 1999). Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \psi' \\ \theta' \\ \phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\theta & 0 & 1 \\ c\theta s\phi & c\phi & 0 \\ c\theta c\phi & -s\phi & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi' \\ \theta' \\ \phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{s\phi}{c\theta} & \frac{c\phi}{c\theta} \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 1 & \frac{s\theta s\phi}{c\theta} & \frac{s\theta c\phi}{c\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s\phi}{c\theta} \omega_y - \frac{c\phi}{c\theta} \omega_z \\ c\phi \omega_y - s\phi \omega_z \\ \omega_x + \frac{s\theta s\phi}{c\theta} \omega_y + \frac{s\theta c\phi}{c\theta} \omega_z \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 4-5}$$

Estas ecuaciones representan la cinemática de orientación del satélite en secuencia de rotación $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$; estas ecuaciones dan información de roll, pitch y yaw en términos de la velocidad angular del satélite en el marco atado al centro de masa del cuerpo rígido relativo al marco de referencia del cuerpo y muestran una singularidad a 90° . Esta es la razón por la cual en algunas situaciones de ingeniería se prefiere un orden especial de rotación. En algunos sistemas inerciales, por ejemplo, esta singularidad puede causar un fenómeno llamado *gimbal lock* (SIDI, 1997).

Las medidas de las velocidades angulares $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ del cuerpo en cada uno de los ejes respecto al marco de referencia fijo junto con las condiciones iniciales de cada uno de los ángulos de Euler permiten integrar con respecto al tiempo las anteriores ecuaciones, y de tal modo obtener los ángulos de Euler cuando el marco del cuerpo rota respecto al marco de referencia del mismo.

Al conocer los elementos de la matriz de cosenos directores se conoce la orientación del satélite relativo al marco de referencia del cuerpo, la matriz de transformación R_{321} se definió anteriormente. Para un cuerpo en rotación, los elementos de esta matriz pueden variar con el tiempo:

$$\frac{d}{dt} R_{321} = \tilde{\omega} R_{321}$$

$$\frac{d}{dt} R_{321} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\theta s\phi c\psi - c\phi s\psi & s\theta s\phi s\psi + c\phi c\psi & c\theta s\phi \\ s\theta c\phi c\psi + s\phi s\psi & s\theta c\phi s\psi - s\phi c\psi & c\theta c\phi \end{bmatrix}$$

Ecuación 4-6

Donde los términos $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ son las velocidades angulares que componen el vector velocidad angular del cuerpo respecto al marco de referencia del satélite. Las anteriores ecuaciones se utilizan cuando el vector velocidad angular se puede censar mediante instrumentación de medición, para luego encontrar las componentes de la matriz de cosenos directores; sin embargo al resolver las anteriores ecuaciones se necesitan las condiciones iniciales de la matriz $R_{321}(0)$.

Ahora bien, teniendo las velocidades angulares en cada uno de los ejes del marco del cuerpo, se calculan las aceleraciones angulares mediante sus correspondientes derivadas en el tiempo (mediante la regla de la cadena), estas aceleraciones son vistas en el cuerpo:

$$\begin{bmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi'(t) - \psi'(t)s\theta(t) \\ \theta'(t)c\phi(t) + \psi'(t)c\theta(t)s\phi(t) \\ \psi'(t)c\theta(t)c\phi(t) - \theta'(t)s\phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi''s\theta - \psi'\theta'c\theta + \phi'' \\ \psi''c\theta s\phi - \psi'\theta's\theta s\phi + \psi'\phi'c\theta c\phi + \theta''c\phi - \theta'\phi's\phi \\ \psi''c\theta c\phi - \psi'\theta's\theta c\phi - \psi'\phi'c\theta s\phi - \theta''s\phi - \theta'\phi'c\phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\theta & 0 & 1 \\ c\theta s\phi & c\phi & 0 \\ c\theta c\phi & -s\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi'' \\ \theta'' \\ \phi'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\theta'c\theta & 0 & 0 \\ \phi'c\theta c\phi & -\psi's\theta s\phi & -\phi's\phi \\ -\phi'c\theta s\phi & -\psi's\theta c\phi & -\theta'c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi' \\ \theta' \\ \phi' \end{bmatrix}$$

Ecuación 4-7

4.3 DINÁMICA DE ORIENTACIÓN PARA UN SATÉLITE

Desde una perspectiva histórica, Newton desarrolló las leyes que describen el movimiento de cuerpos rígidos, incluso antes de que se estudiara desde el contexto de partícula. Definiendo la fuerza inercial que actúa sobre un cuerpo como $dp/dt = m\overline{a}_G = F$ (donde a_G es el vector aceleración del centro de masas del cuerpo rígido), la segunda ley de Newton se puede describir como la fuerza inercial siendo igual y opuesta a la fuerza aplicada sobre él. La ley que gobierna el movimiento rotacional (tanto para partículas como para cuerpos rígidos) fue formalmente establecida por Euler en 1775, al mismo tiempo que con la ecuación clásica de Newton. La ley de Euler dice que la tasa de cambio del momento angular alrededor del centro de masa de un cuerpo rígido es igual a la suma de todos los momentos aplicados sobre el centro de masa, o lo que es lo mismo (Baruh, 1999):

$$\frac{d}{dt} H_G = M_G$$

Ecuación 4-8

El conjunto de la segunda ley de Newton y la ley de Euler proveen una completa descripción del movimiento de un cuerpo; estas en su conjunto constituyen las bases de la mecánica de Newton, la cual se conoce también como la formulación de Newton-Euler. La ley de Euler incluso se puede obtener de la

segunda ley de Newton usando un elemento diferencial o la formulación para una partícula. De lo anterior nace la ecuación en su forma más general que describe el balance del momento; cuando el punto B está atado al cuerpo, se puede mostrar que (Baruh, 1999):

$$\frac{d}{dt} H_B = M_B + m(\omega \times r_{G/B}) \times v_B \quad \text{Ecuación 4-9}$$

Reescribiendo la igualdad anterior, la ecuación que describe el movimiento rotacional de un satélite se puede escribir como (B. J. Kim, 1996) (Chang-Hee, 1999) (Zhang, 1998):

$$\frac{dH}{dt} + \omega \times H = \tau \quad \text{Ecuación 4-10}$$

Donde H es el vector momento angular, y es el que rige el movimiento rotacional del cuerpo rígido; mientras que ω es el vector velocidad angular del satélite (tanto el momento angular como la velocidad angular se mueven en el marco del cuerpo, relativo al marco de referencia estático del satélite). H es el momento angular del satélite, el cual es la suma del momento angular del cuerpo denotado como H_B y el momento angular de las ruedas de reacción h_w .

$$H = H_B + h_w \quad \text{Ecuación 4-11}$$

Mientras que τ es el vector de momentos externos que actúa sobre el centro de masas del cuerpo rígido. Definiendo la matriz de inercia del satélite como I_B , donde $H = I_B \omega$; se tiene la nueva ecuación que rige el movimiento rotacional del cuerpo:

$$\begin{aligned} (H_B' + h_w') + \omega \times (H_B + h_w) &= \tau \\ I_B \omega' + h_w' + \omega \times (I_B \omega + h_w) &= \tau \end{aligned} \quad \text{Ecuación 4-12}$$

Donde

$$\omega \times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\omega} \quad \text{Ecuación 4-13}$$

El modelo dinámico que describe la orientación de un satélite se puede escribir como:

$$I_B \omega' + h_w' + \tilde{\omega}(I_B \omega + h_w) = \tau \quad \text{Ecuación 4-14}$$

Donde la velocidad angular ω del centro de masas del satélite está representada por la secuencia de rotación en ángulos de Euler anteriormente mencionada ($\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$). Finalmente se llega al modelo dinámico más general que explica el movimiento rotacional de un satélite y se escribe como (Jafarov, 2006)(Zuliana Ismail, 2009) (Ji Li, 2005):

$$I_B \omega' + h_w' + \tilde{\omega} I_B \omega + \tilde{\omega} h_w = \tau \quad \text{Ecuación 4-15}$$

4.4 MODELO NO LINEAL DE ORIENTACIÓN PARA UN SATÉLITE

El modelo completo que describe la orientación de un satélite de 3 grados de libertad incluye los torques externos; sin embargo no se añadirá el torque gradiente de gravedad por facilidad en los cálculos (para incluir el torque gradiente de gravedad en la ecuación de movimiento se debe tener en cuenta el cambio en la velocidad angular que se presenta por el efecto de la órbita terrestre). Adicionalmente, la simetría del sistema permite definir la matriz inercia del satélite como:

$$I_B = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Ecuación 4-16

La matriz inercia del cuerpo solamente posee sus componentes diagonales debido a que la masa del mismo está distribuida en cada uno de los tres ejes coordenados del satélite de la siguiente manera:

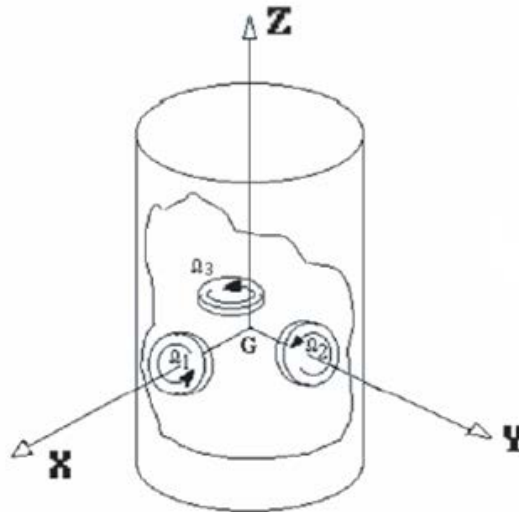


Figura 10. Esquema del satélite con las tres ruedas de reacción (Shahin S. Nudehi, 2008)

Reemplazando el vector aceleración angular, la matriz inercia del cuerpo, el vector torque, y sustituyendo los vectores velocidad angular, momento angular de las ruedas y el torque generado por las ruedas de reacción se tiene (Zuliana, 2009):

$$I_B \omega' + h_w' + \tilde{\omega} I_B \omega + \tilde{\omega} h_w = \tau$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -s\theta & 0 & 1 \\ c\theta s\phi & c\phi & 0 \\ c\theta c\phi & -s\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi'' \\ \theta'' \\ \phi'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\theta'c\theta & 0 & 0 \\ \phi'c\theta c\phi & -\psi's\theta s\phi & -\phi's\phi \\ -\phi'c\theta s\phi & -\psi's\theta c\phi & -\theta'c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi' \\ \theta' \\ \phi' \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} h_{wx}' \\ h_{wy}' \\ h_{wz}' \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & -(\psi'c\theta c\phi - \theta's\phi) & \theta'c\phi + \psi'c\theta s\phi \\ \psi'c\theta c\phi - \theta's\phi & 0 & -(\phi' - \psi's\theta) \\ -(\theta'c\phi + \psi'c\theta s\phi) & \phi' - \psi's\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s\theta & 0 & 1 \\ c\theta s\phi & c\phi & 0 \\ c\theta c\phi & -s\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi' \\ \theta' \\ \phi' \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & -(\psi'c\theta c\phi - \theta's\phi) & \theta'c\phi + \psi'c\theta s\phi \\ \psi'c\theta c\phi - \theta's\phi & 0 & -(\phi' - \psi's\theta) \\ -(\theta'c\phi + \psi'c\theta s\phi) & \phi' - \psi's\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{wx} \\ h_{wy} \\ h_{wz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ecuación 4-17

4.5 MODELO LINEAL DE ORIENTACIÓN PARA UN SATÉLITE

Por facilidad en los cálculos, todas las matrices coseno direccionales utilizadas inician en los ángulos ψ, θ, ϕ originalmente en cero, donde se puede aplicar la identidad matricial $A^{-1} = A^T$. Es importante notar que para ángulos de Euler pequeños todas las transformaciones de Euler tienen aproximadamente la misma forma; así que tomando como $\sin(\beta) \approx \beta$ y $\cos(\beta) \approx 1$ para ángulos de β pequeños (esta aproximación se aplica de igual manera cuando se trabaja con los ángulos de Euler) luego se tiene que la matriz de transformación queda:

$$R_{321} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\theta s\phi c\psi - c\phi s\psi & s\theta s\phi s\psi + c\phi c\psi & c\theta s\phi \\ s\theta c\phi c\psi + s\phi s\psi & s\theta c\phi s\psi - s\phi c\psi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ \theta\phi - \psi & \psi\theta\phi + 1 & \phi \\ \theta + \psi\phi & \psi\theta - \phi & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 4-18

Las derivadas de la rotación basadas en los ángulos de Euler necesitan un tratamiento con los 9 elementos de la matriz de cosenos directores, y cada elemento puede incluir algunas funciones trigonométricas. Así mismo, se aproxima el vector velocidad angular para ángulos pequeños:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi' - \psi's\theta \\ \theta'c\phi + \psi'c\theta s\phi \\ \psi'c\theta c\phi - \theta's\phi \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \phi' - \psi'\theta \\ \theta' + \psi'\phi \\ \psi' - \theta'\phi \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \phi' \\ \theta' \\ \psi' \end{bmatrix}$$

Ecuación 4-19

Por último, se aproxima el vector de aceleraciones angulares cuando los ángulos son muy pequeños:

$$\begin{bmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi''s\theta - \psi'\theta'c\theta + \phi'' \\ \psi''c\theta s\phi - \psi'\theta's\theta s\phi + \psi'\phi'c\theta c\phi + \theta''c\phi - \theta'\phi's\phi \\ \psi''c\theta c\phi - \psi'\theta's\theta c\phi - \psi'\phi'c\theta s\phi - \theta''s\phi - \theta'\phi'c\phi \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\psi''\theta - \psi'\theta' + \phi'' \\ \psi''\phi - \psi'\theta'\theta\phi + \psi'\phi' + \theta'' - \theta'\phi'\phi \\ \psi'' - \psi'\theta'\theta - \psi'\phi'\phi - \theta''\phi - \theta'\phi' \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \phi'' \\ \theta'' \\ \psi'' \end{bmatrix}$$

Ecuación 4-20

Reemplazando en la ecuación de movimiento las aproximaciones de la aceleración angular y la velocidad angular:

$$I_B \omega' + h_w' + \tilde{\omega} I_B \omega + \tilde{\omega} h_w = \tau$$

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'' \\ \theta'' \\ \psi'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{wx}' \\ h_{wy}' \\ h_{wz}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\psi' & \theta' \\ \psi' & 0 & -\phi' \\ -\theta' & \phi' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi' \\ \theta' \\ \psi' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\psi' & \theta' \\ \psi' & 0 & -\phi' \\ -\theta' & \phi' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{wx} \\ h_{wy} \\ h_{wz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix}$$

Ecuación 4-21

Resolviendo las respectivas multiplicaciones se tienen las ecuaciones que describen la dinámica del satélite en tres grados de libertad.

$$I_{xx} \phi'' + \theta' \psi' (I_{zz} - I_{yy}) + h_{wz} \theta' - h_{wy} \psi' + h_{wx}' = \tau_x$$

$$I_{yy} \theta'' + \phi' \psi' (I_{xx} - I_{zz}) + h_{wx} \psi' - h_{wz} \phi' + h_{wy}' = \tau_y$$

$$I_{zz} \psi'' + \phi' \theta' (I_{yy} - I_{xx}) + h_{wy} \phi' - h_{wx} \theta' + h_{wz}' = \tau_z$$

Ecuación 4-22

Reorganizando términos y despreciando los torques externos se llega a:

$$\phi'' = \frac{-\theta' \psi' (I_{zz} - I_{yy}) - h_{wx}' - h_{wz} \theta' + h_{wy} \psi'}{I_{xx}}$$

$$\theta'' = \frac{-\phi' \psi' (I_{xx} - I_{zz}) - h_{wy}' - h_{wx} \psi' + h_{wz} \phi'}{I_{yy}}$$

$$\psi'' = \frac{-\phi' \theta' (I_{yy} - I_{xx}) - h_{wz}' - h_{wy} \phi' + h_{wx} \theta'}{I_{zz}}$$

Ecuación 4-23

En las anteriores ecuaciones h_{wx}, h_{wy}, h_{wz} son las componentes del vector momento angular de las ruedas con los ejes de rotación a lo largo de X_B, Y_B, Z_B respectivamente. Los términos $h_{wx}', h_{wy}', h_{wz}'$ son las derivadas del vector momento angular que las ruedas ejercen sobre los ejes del cuerpo. Si Ω_x' es la aceleración angular sobre el eje X_B de la rueda, por lo tanto $h_{wx}' = J_x \Omega_x'$ es el momento angular negativo que el eje X_B de la rueda ejerce sobre el satélite. El mismo principio aplica para las

componentes de los ejes Y_B, Z_B . Por lo tanto y teniendo como fundamento lo anterior, el control de orientación se puede lograr controlando estas aceleraciones angulares, las cuales son torques internos ejercidos sobre el satélite. Si se llegan a adicionar torques internos o externos dentro del modelo dinámico (como el gradiente de gravedad, el torque magnético o torques de reacción que son aplicados al satélite), estos deben ser incorporados en el vector torque de control (SIDI, 1997).

Ahora bien, la **ecuación 4-12** representa la ecuación de movimiento rotacional de Euler; esta ecuación se puede escribir únicamente para el cuerpo (considerando las velocidades y las aceleraciones de las ruedas de reacción en cero) en su forma vectorial como:

$$I\omega' + \omega \times (I\omega) = \tau \quad \text{Ecuación 4-24}$$

Donde ω es la velocidad angular del centro de masas del satélite y τ es el vector de momentos externos que actúa sobre el centro de masas del cuerpo. Para los ejes principales del marco de referencia, las ecuaciones de movimiento rotacional de Euler para el cuerpo son:

$$\begin{aligned} I_{xx}\omega'_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z &= \tau_x \\ I_{yy}\omega'_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x &= \tau_y \\ I_{zz}\omega'_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y &= \tau_z \end{aligned} \quad \text{Ecuación 4-25}$$

Estas son tres ecuaciones acopladas, diferenciales no lineales para las variables de estado $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; la **ecuación 4-25** junto con las ecuaciones diferenciales de la cinética describen completamente el movimiento rotacional del cuerpo con los tres grados de libertad. Asumiendo que la magnitud de los momentos de inercia son diferentes entre sí, las ecuaciones de movimiento en estado estable (velocidad rotacional constante) se convierten en (Wie, 1952):

$$\begin{aligned} -(I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z &= \tau_x \\ -(I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x &= \tau_y \\ -(I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y &= \tau_z \end{aligned} \quad \text{Ecuación 4-26}$$

Donde $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ es un punto de equilibrio. Combinando las tres ecuaciones se tiene:

$$(I_{yy} - I_{zz})(I_{xx} - I_{zz})(I_{xx} - I_{yy})\omega_x^2\omega_y^2\omega_z^2 = \tau_x\tau_y\tau_z \quad \text{Ecuación 4-27}$$

Esta ecuación indica que los puntos de equilibrio existen solo si $\tau_x\tau_y\tau_z \geq 0$. Proporcionando unas constantes de torque (τ_x, τ_y, τ_z) , con $\tau_x\tau_y\tau_z > 0$ se obtienen seis puntos de equilibrio $(\pm\omega_x, \pm\omega_y, \pm\omega_z)$:

$$\omega_x = \sqrt{\frac{I_{yy} - I_{zz}}{(I_{xx} - I_{yy})(I_{xx} - I_{zz})} \frac{\tau_y \tau_z}{\tau_x}}$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{I_{xx} - I_{zz}}{(I_{xx} - I_{yy})(I_{yy} - I_{zz})} \frac{\tau_z \tau_x}{\tau_y}}$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{I_{xx} - I_{yy}}{(I_{xx} - I_{zz})(I_{yy} - I_{zz})} \frac{\tau_x \tau_y}{\tau_z}}$$

Ecuación 4-28

Los puntos de equilibrio asociados al vector de torque (τ_x, τ_y, τ_z) con $\tau_x \tau_y \tau_z = 0$ son:

$$(\tau_x, 0, 0) \Rightarrow \left\{ (0, \omega_y, \omega_z) : -(I_{yy} - I_{zz}) \omega_y \omega_z = \tau_x \right\}$$

$$(0, \tau_y, 0) \Rightarrow \left\{ (\omega_x, 0, \omega_z) : +(I_{xx} - I_{zz}) \omega_x \omega_z = \tau_y \right\}$$

$$(0, 0, \tau_z) \Rightarrow \left\{ (\omega_x, \omega_y, 0) : -(I_{xx} - I_{yy}) \omega_x \omega_y = \tau_z \right\}$$

$$(0, 0, 0) \Rightarrow \left\{ (0, 0, 0), (\omega_x, 0, 0), (0, \omega_y, 0), (0, 0, \omega_z) \right\}$$

Para los demás puntos no existen puntos de equilibrio (todo el análisis del punto de equilibrio se realiza en estado estable, es decir, no se consideran las entradas del sistema) (Wie, 1952). Si se asumen pequeñas variaciones para el marco coordenado de referencia atado al centro de masas del cuerpo y respecto al marco que gira con el satélite (esto incluye las ruedas de reacción para la consecución de todo el modelo), la **ecuación 4-23** se puede linealizar en el espacio de estados alrededor del punto certero de equilibrio anteriormente fundamentado como (Won, 1999):

$$x' = \left(\frac{df}{dx} \right) x + \left(\frac{df}{du} \right) u$$

Ecuación 4-29

Donde

$$x = [\phi', \theta', \psi', \phi, \theta, \psi]^T$$

$$u = [h_{wx}', h_{wy}', h_{wz}']^T$$

En donde el vector x son las seis variables de estado del sistema y u es el vector de entradas. Para tener condiciones iniciales en cero encontramos la ecuación lineal para cualquier torque nulo capaz de mantener el sistema en equilibrio. Por simplicidad se asume el caso en el cual la posición se mantiene estable, donde los valores de los torques que mantienen en equilibrio el sistema están fijos a:

$$x_0 = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$$

Por lo tanto, las siguientes ecuaciones se pueden definir derivando cada una de las componentes de las ecuaciones en términos de cada una de las variables y de las entradas como (Won, 1999):

$$\begin{aligned}\phi'' &\approx \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \theta' + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \psi' - \frac{h_{wx}'}{I_{xx}} + \frac{h_{wy}}{I_{xx}} - \frac{h_{wz}}{I_{xx}} \\ \theta'' &\approx \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \phi' + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \psi' - \frac{h_{wy}'}{I_{yy}} - \frac{h_{wx}}{I_{yy}} + \frac{h_{wz}}{I_{yy}} \\ \psi'' &\approx \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \phi' + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \theta' - \frac{h_{wz}'}{I_{zz}} + \frac{h_{wx}}{I_{zz}} - \frac{h_{wy}}{I_{zz}}\end{aligned}$$

Ecuación 4-30

De lo anterior se puede llegar a un modelo en variables de estado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \phi'' \\ \theta'' \\ \psi'' \end{bmatrix} = [A_1] \begin{bmatrix} \phi' \\ \theta' \\ \psi' \end{bmatrix} + [A_2] \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} + [A_3] \begin{bmatrix} h_{wx}' \\ h_{wy}' \\ h_{wz}' \end{bmatrix} + [A_4] \begin{bmatrix} h_{wx} \\ h_{wy} \\ h_{wz} \end{bmatrix}$$

Ecuación 4-31

Donde las matrices $[A_1], [A_2], [A_3], [A_4]$ están definidas como:

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} & \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \\ \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} & 0 & \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \\ \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} & \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_2] = 0_{3 \times 3}$$

$$[A_3] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix}$$

$$[A_4] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{I_{xx}} & -\frac{1}{I_{xx}} \\ -\frac{1}{I_{yy}} & 0 & \frac{1}{I_{yy}} \\ \frac{1}{I_{zz}} & -\frac{1}{I_{zz}} & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el modelo dinámico del sistema se puede representar en espacio de estados como:

$$x' = Ax + Bu$$

Ecuación 4-32

$$y = Cx$$

Equivalente a tener el siguiente sistema en espacio de estados reportado por (Jafarov, 2006):

$$x' = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} A_3 \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} u$$

Ecuación 4-33

$$y = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} x$$

El vector momento angular de las ruedas de reacción, relacionado con la matriz A_4 no se considera entrada del sistema como se explico anteriormente; el vector de entrada del sistema es el torque que las ruedas de reacción aplican sobre el cuerpo (la derivada del momento angular). Por lo tanto, la matriz B se compone por A_3 así:

$$\begin{bmatrix} \phi'' \\ \theta'' \\ \psi'' \\ \phi' \\ \theta' \\ \psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} & \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} & 0 & \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} & \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi' \\ \theta' \\ \psi' \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{wx}' \\ h_{wy}' \\ h_{wz}' \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi' \\ \theta' \\ \psi' \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$$

Ecuación 4-34

Como se mencionó anteriormente, las seis variables de estado del modelo dinámico que representa la orientación de un satélite son el cabeceo (ψ), la orientación (θ) y la inclinación (ϕ) además están sus correspondientes derivadas respecto al tiempo ψ' (pitch), θ' (roll) y ϕ' (yaw) (Baruh, 1999). Las anteriores ecuaciones conforman el completo modelo dinámico lineal del satélite.

4.6 PARÁMETROS DEL SATÉLITE INTELSAT V

La determinación del modelo teórico anteriormente establecido se aplicará para posteriores análisis de respuesta en lazo abierto de la planta no lineal y del modelo lineal, análisis de controlabilidad y observabilidad además de la síntesis de un controlador sencillo para posteriores pruebas y para efectos de este trabajo; todo lo anterior usando los parámetros válidos de un satélite de comunicaciones geostacionario IntelsatV. A continuación se muestran las características más importantes de este satélite:

Principle moments of inertias, I_{11}, I_{22}, I_{33}	3026, 440, 3164 kg.m ²
Main body dimensions, x-y-z.....	1.5 x 1.7 x 2.2 m
Solar arrays.....	20 m (tip-to-tip)
Max. torques supplied via R.W.....	0.10 Nm
Bias momentum.....	91.4 Nms
Liquid bi-propellant thrusters.....	N ₂ O ₄ /MMH
Array power.....	1.5 kW

Figura 11. Parámetros del satélite IntelsatV (Wie, 1952)

Los datos suministrados por la **figura 11** serán utilizados para establecer un modelo no lineal (**ecuación 4-23**), determinar el modelo lineal del cuerpo (**ecuación 4-34**) y así validar los modelos usando datos de un satélite real para posteriores análisis del controlador sencillo que propondrá este trabajo.

4.7 MODELO NO LINEAL DEL SATÉLITE INTELSAT V EN SIMULINK

Al obtener las ecuaciones de orientación en cada uno de los ejes del sistema (**ecuación 4-23**), se construye y simula el modelo mediante los diagramas de bloques que permite utilizar Simulink-Matlab; el análisis y la respuesta de cada uno de los diagramas permitirá evaluar el comportamiento del sistema no lineal para luego comparar éste con la respuesta del sistema linealizado y encontrar así una validación del modelo lineal respecto al no lineal.

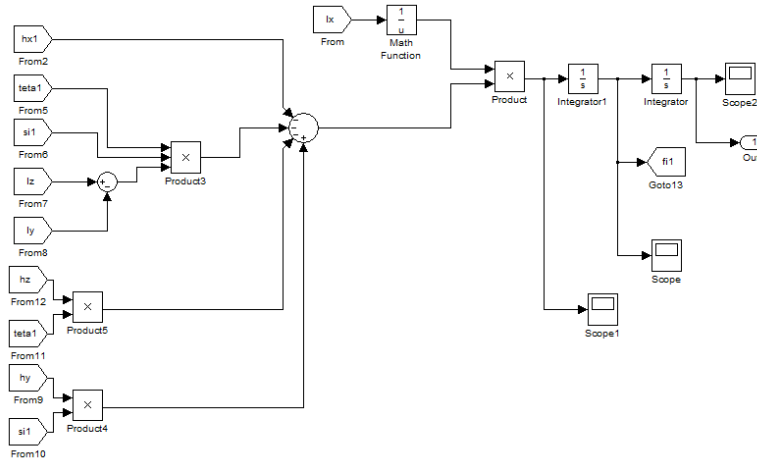


Figura 12. Modelo no lineal de la Ecuación 4-23 (aceleración en el eje x)

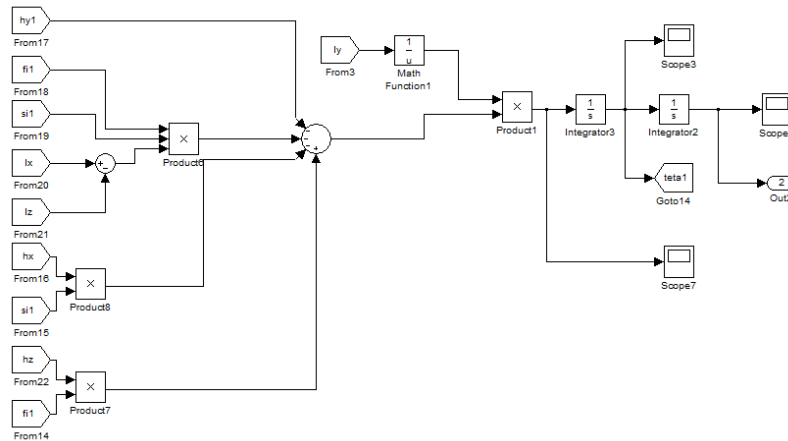


Figura 13. Modelo no lineal de la Ecuación 4-23 (aceleración en el eje y)

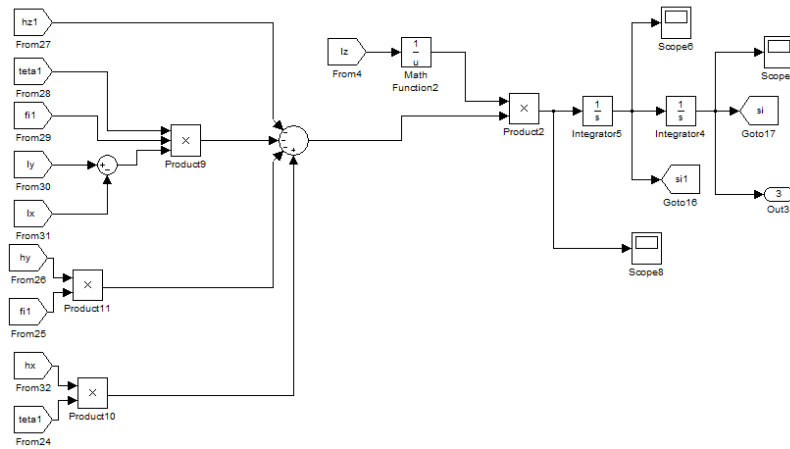


Figura 14. Modelo no lineal de la Ecuación 4-23 (aceleración en el eje z)

A continuación se presentan las gráficas que el modelo no lineal retorna en respuesta de lazo abierto (la entrada paso tiene una amplitud de 0.1Nm como máximo torque que puede suplir una rueda de reacción, esta entrada paso tiene efecto en el instante $t=0s$). En la gráfica se ven las tres respuestas del sistema:

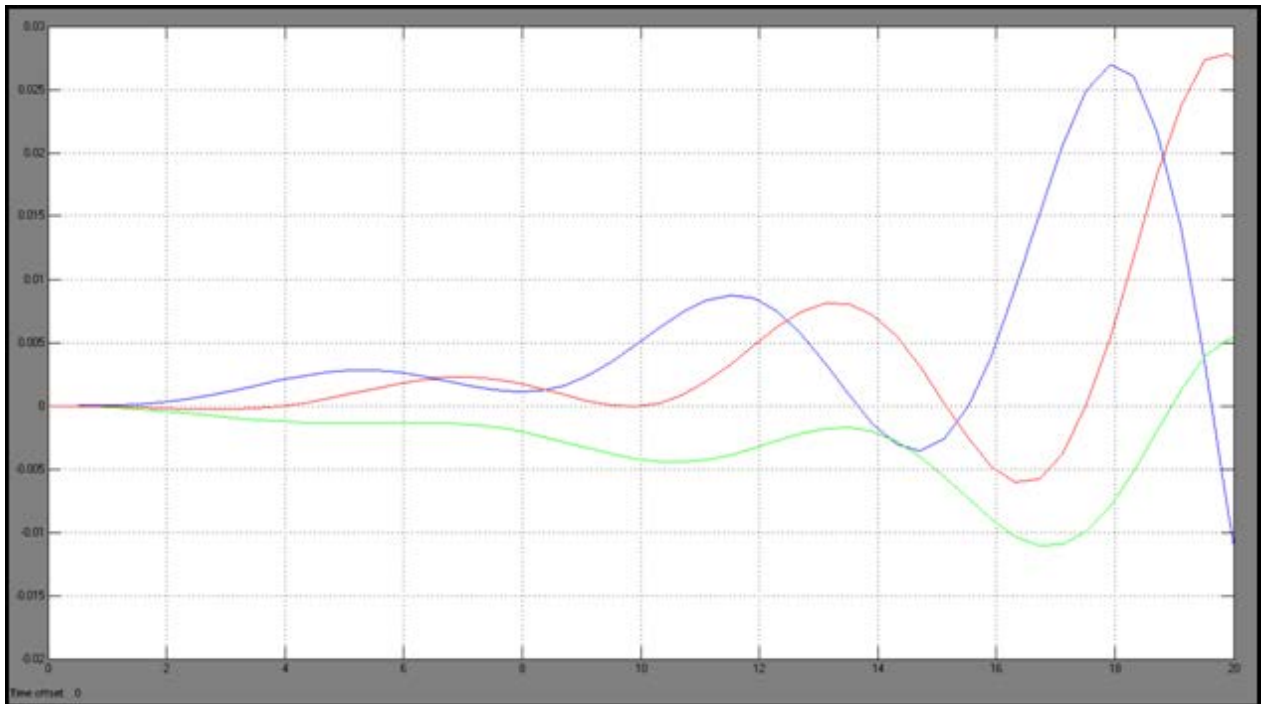


Figura 15. Respuesta paso al modelo no lineal de la Ecuación 4-23 (gráfica de posición)

Las tres funciones de la **figura 15** corresponden a las posiciones en cada uno de los ejes del satélite: el cabeceo ψ (gráfica azul), la orientación θ (gráfica roja) y la inclinación ϕ (gráfica verde). La siguiente gráfica muestra las velocidades angulares del cuerpo: pitch ω_1 (gráfica azul), roll ω_2 (gráfica roja), yaw ω_3 (gráfica verde).

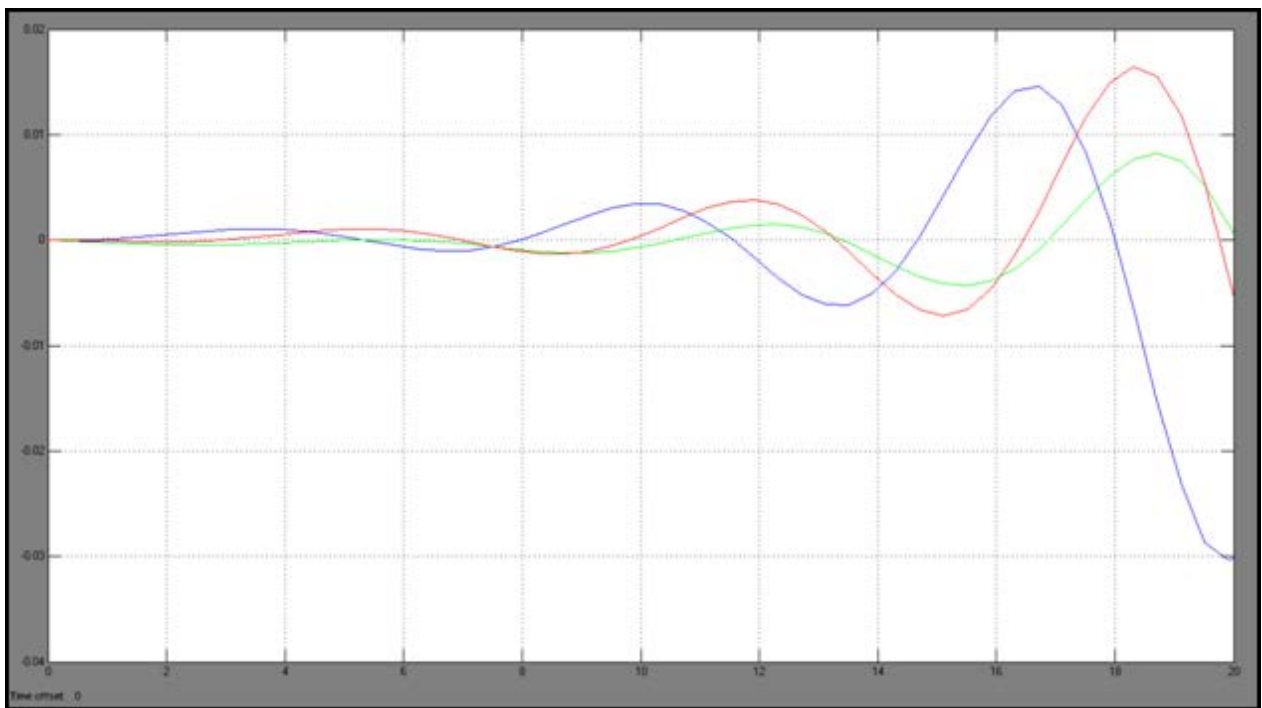


Figura 16. Respuesta paso al modelo no lineal de la Ecuación 4-23 (gráfica de velocidad)

Las gráficas tienen un comportamiento oscilatorio (claramente inestable); la última gráfica corresponde a las aceleraciones angulares: α_1 (gráfica azul), α_2 (gráfica rojo), α_3 (gráfica verde).

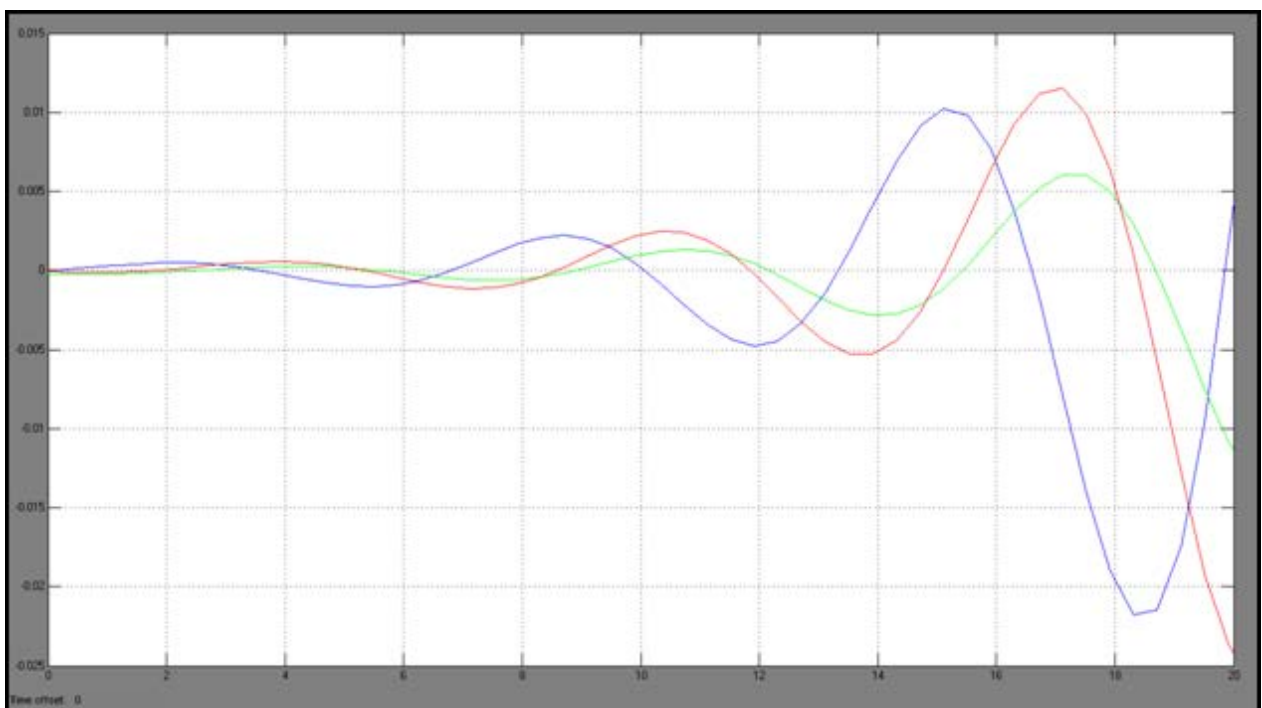


Figura 17. Respuesta paso al modelo no lineal de la Ecuación 4-23 (gráfica de aceleración)

4.8 MODELO LINEAL DEL SATÉLITE INTELSAT V EN SIMULINK

El modelo lineal del satélite IntelsatV se crea mediante la formulación Newton-Euler linealizado (ecuación 4-34) anteriormente y los datos suministrados en la figura 11. Al tener un modelo en espacio de estados, no se utilizan directamente los diagramas de bloques de la herramienta Simulink. En MatLab se define un modelo en espacio de estados introduciendo cada una de las matrices que componen la ecuación en variables de estado.

```

Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.
>> sys=ss(A,B,C,D)

a =
      x1      x2      x3      x4      x5      x6
x1      0     -0.9002  -0.9002      0      0      0
x2     0.3136      0     0.3136      0      0      0
x3     0.8173     0.8173      0      0      0      0
x4      1      0      0      0      0      0
x5      0      1      0      0      0      0
x6      0      0      1      0      0      0

b =
      u1      u2      u3
x1  -0.0003305      0      0
x2      0     -0.002273      0
x3      0      0     -0.0003161
x4      0      0      0
x5      0      0      0
x6      0      0      0

c =
      x1      x2      x3      x4      x5      x6
y1      0      0      0      1      0      0
y2      0      0      0      0      1      0
y3      0      0      0      0      0      1

d =
      u1      u2      u3
y1      0      0      0
y2      0      0      0
y3      0      0      0

Continuous-time model.

```

Figura 18. Modelo lineal de la Ecuación 4-29 en espacio de estados

Al definir el modelo en espacio de estados, se obtiene la respuesta paso del mismo mediante la elaboración del sistema en Simulink así:

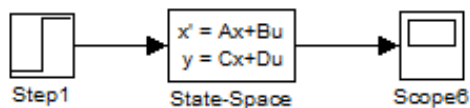


Figura 19. Respuesta paso al modelo lineal de la Ecuación 4-29

La entrada paso del modelo es un vector de tres posiciones (correspondientes a los torques debidos al cambio del momento angular de las ruedas de reacción sobre el satélite). Esta entrada actúa en el instante cero y con una amplitud de 0.1Nm por cada una de las ruedas de reacción.

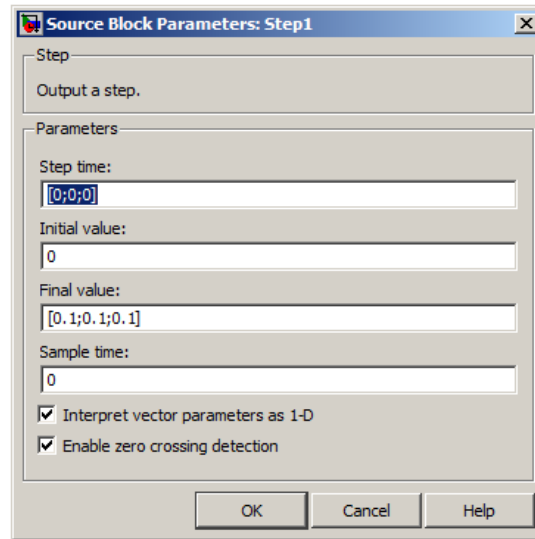


Figura 20. Definición del vector de entrada al modelo lineal de la Ecuación 4-29

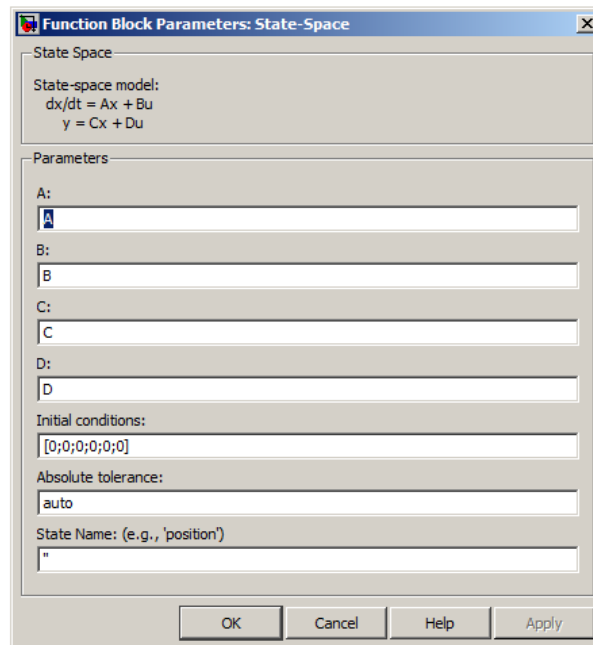


Figura 21. Definición del bloque modelo en espacio de estados de Simulink

El bloque State-Space tiene como parámetros de entrada las cuatro matrices. Las condiciones iniciales en cero indican que todas las variables de estado comienzan con valor nulo bien sea en posición angular o en velocidad angular. A continuación se ven las tres salidas de posición del modelo lineal:

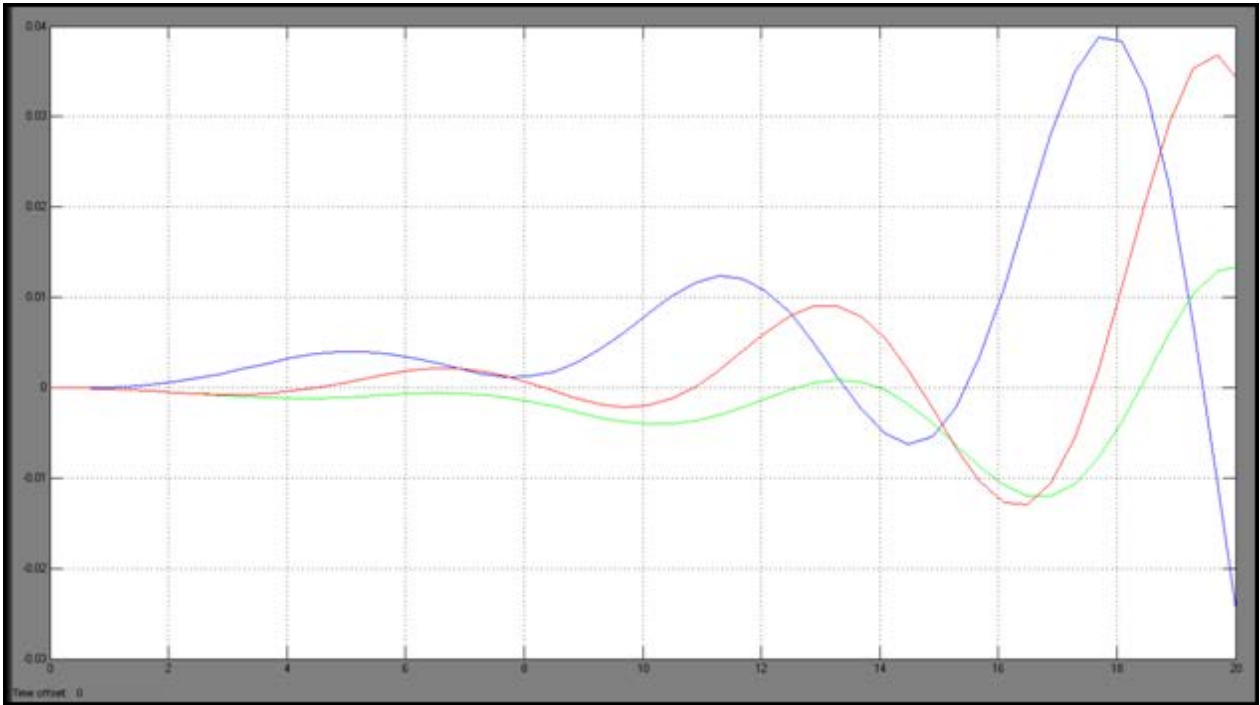


Figura 22. Respuesta paso al modelo lineal de la Figura 17 (gráfica de posición)

Las dos siguientes gráficas son las respuestas de las velocidades y las aceleraciones angulares del satélite:

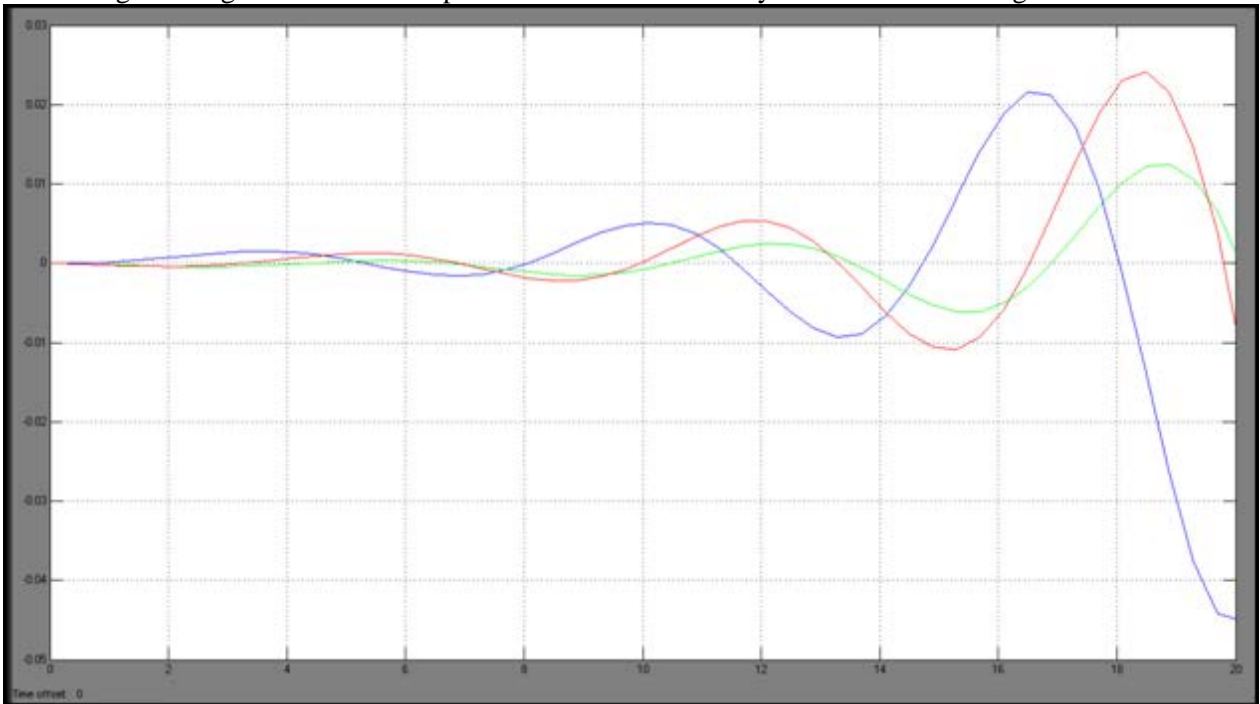


Figura 23. Respuesta paso al modelo lineal de la Figura 17 (gráfica de velocidad)

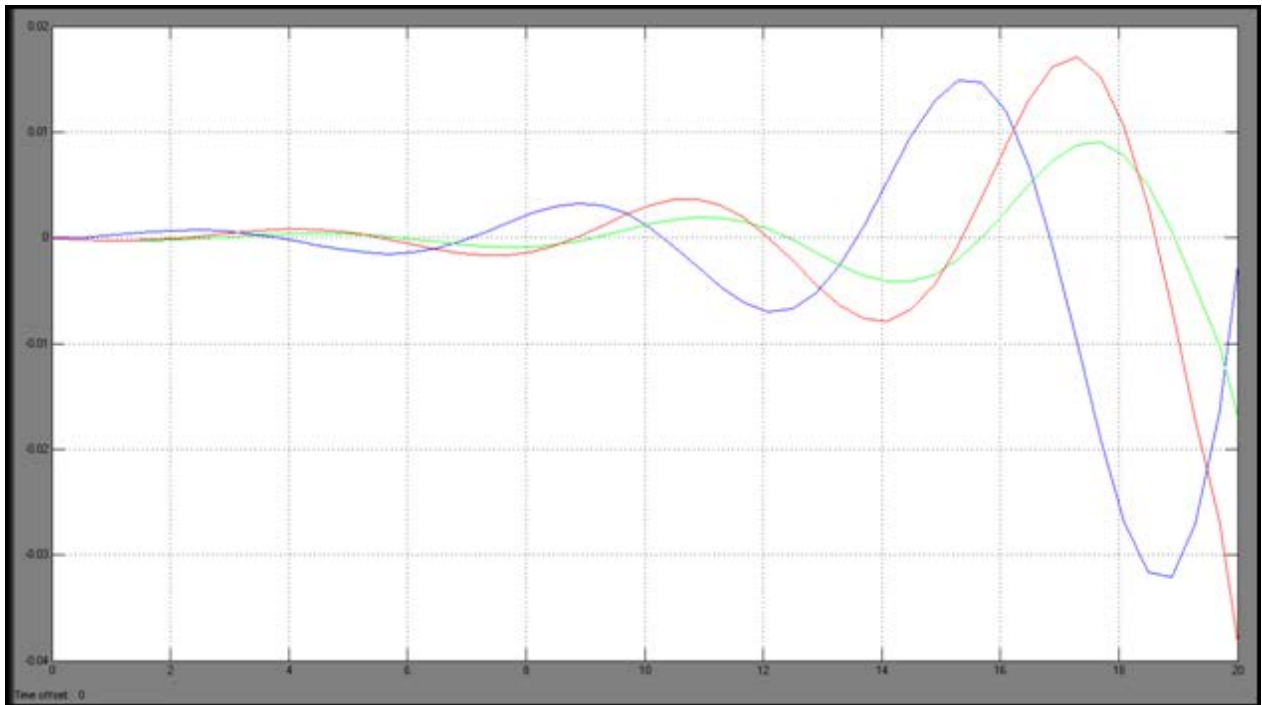


Figura 24. Respuesta paso al modelo lineal de la Figura 17 (gráfica de aceleración)

4.9 VALIDACIÓN DEL MODELO DINÁMICO DEL SATÉLITE

Para validar el modelo lineal se compara la simulación basada en las ecuaciones del modelo no lineal con el modelo lineal del sistema que se crearon mediante la herramienta Simulink de MatLab. Se usan las mismas entradas y parámetros en ambos modelos con el fin de obtener salidas que nos permitan establecer una validación. Para las entradas (la variación de los momentos angulares de las ruedas de reacción) se usaron señales paso con un valor final igual a 0.1Nm y que empieza a actuar desde el tiempo $t=0$. Para la realización de los modelos se usaron los parámetros obtenidos en (Wie, 1952). Las gráficas a continuación muestran el comportamiento de la posición, la velocidad y la aceleración angular de cada uno de los ejes; el modelo NO LINEAL (gráficas de arriba) y el modelo LINEAL (gráficas de abajo) se ubican paralelas de forma que se pueda ver el comportamiento de ambas simulaciones al tiempo. Donde el cabeceo ψ (gráfica azul), la orientación θ (gráfica rojo) y la inclinación ϕ (gráfica verde) conforman el gráfico a continuación:

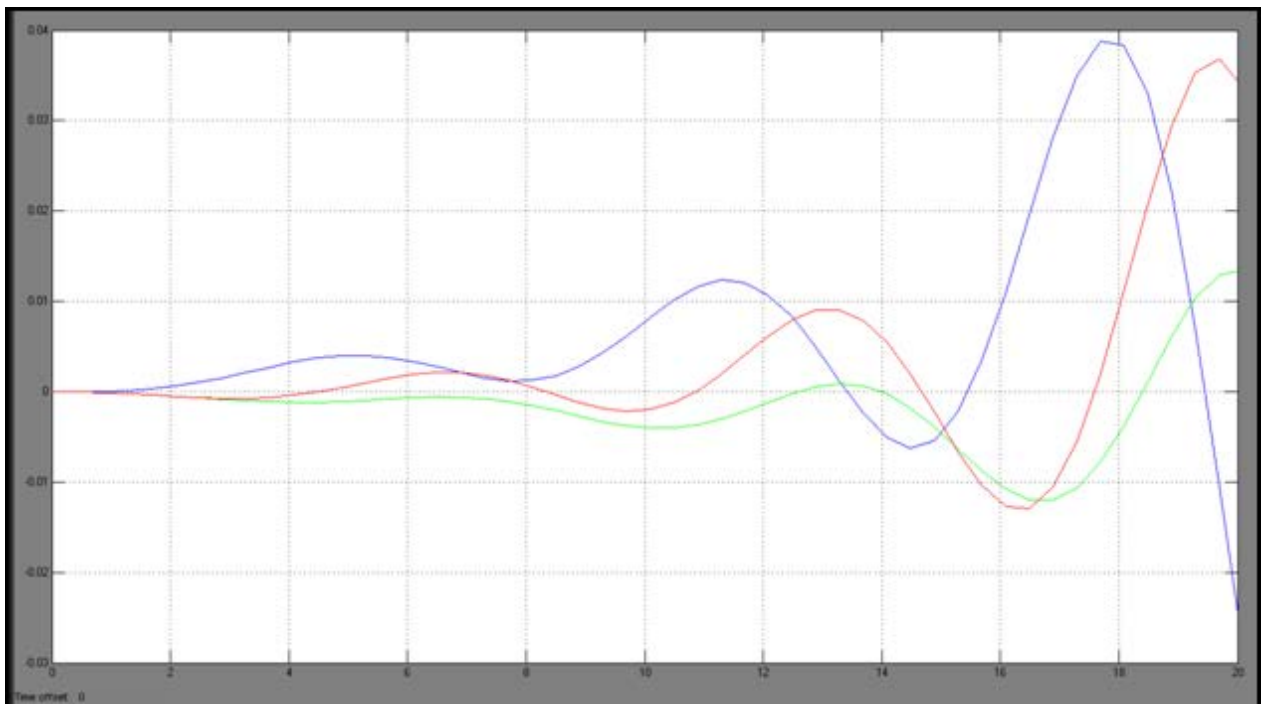
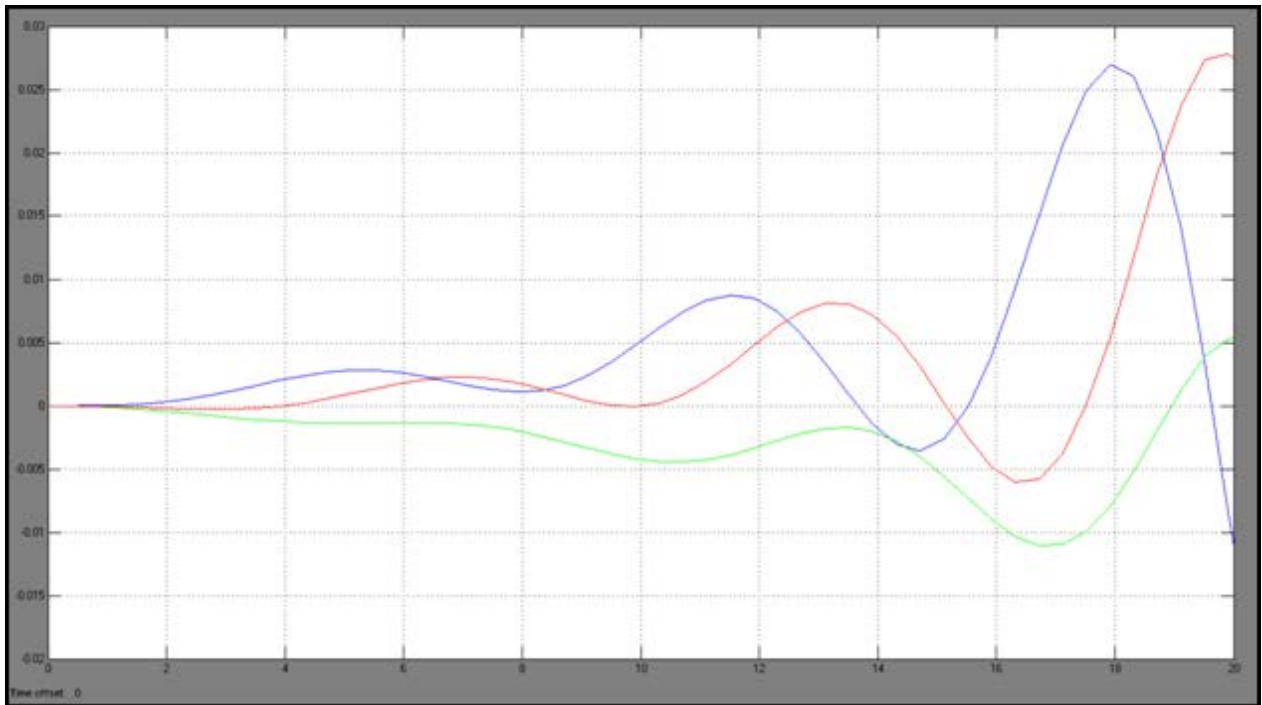


Figura 24. Comparación de la posición entre el modelo no lineal (arriba) y el modelo lineal (abajo)

Se ve un comportamiento muy similar entre ambos modelos, a continuación se muestra la gráfica del error de posición (fue la que presentó mayor error) entre ambos modelos para la inclinación ϕ . El comportamiento inestable del sistema genera una señal de error que incrementa a medida que transcurre el tiempo. En la gráfica se ve que para un intervalo de tiempo de 20 segundos, el mayor error se presenta a los 18 segundos con un valor aproximado a 5.5×10^{-3} .

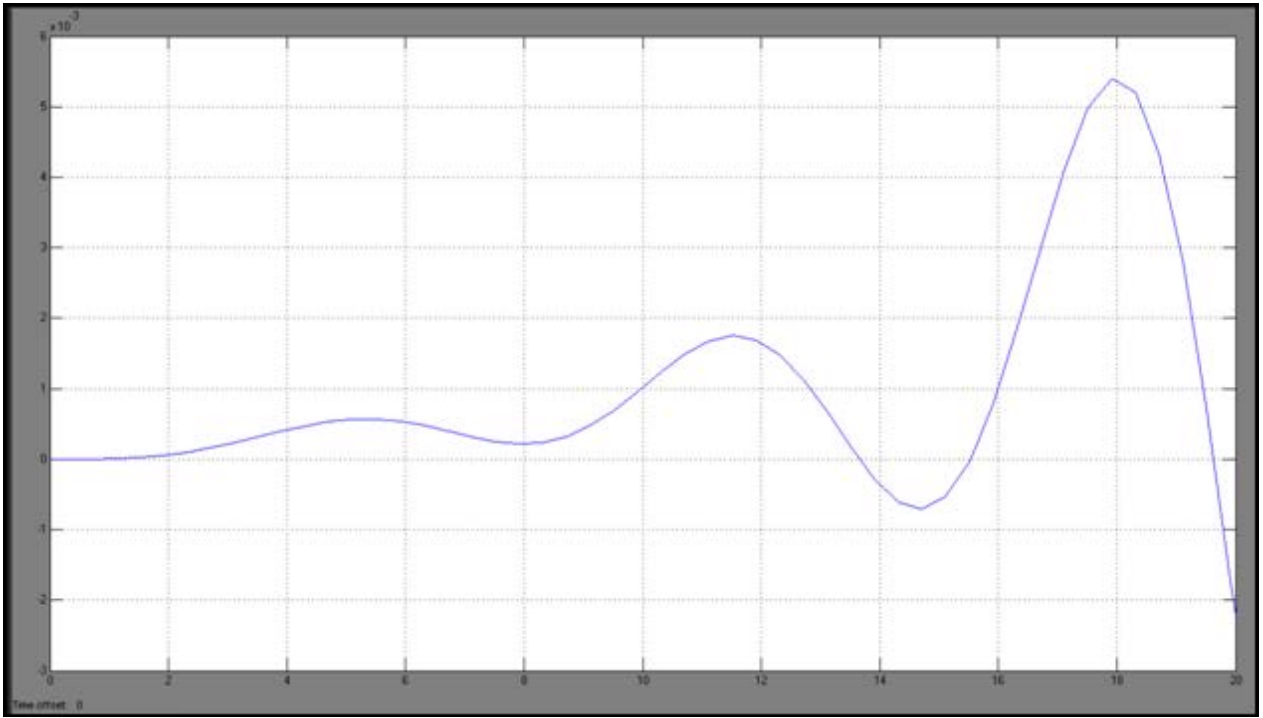
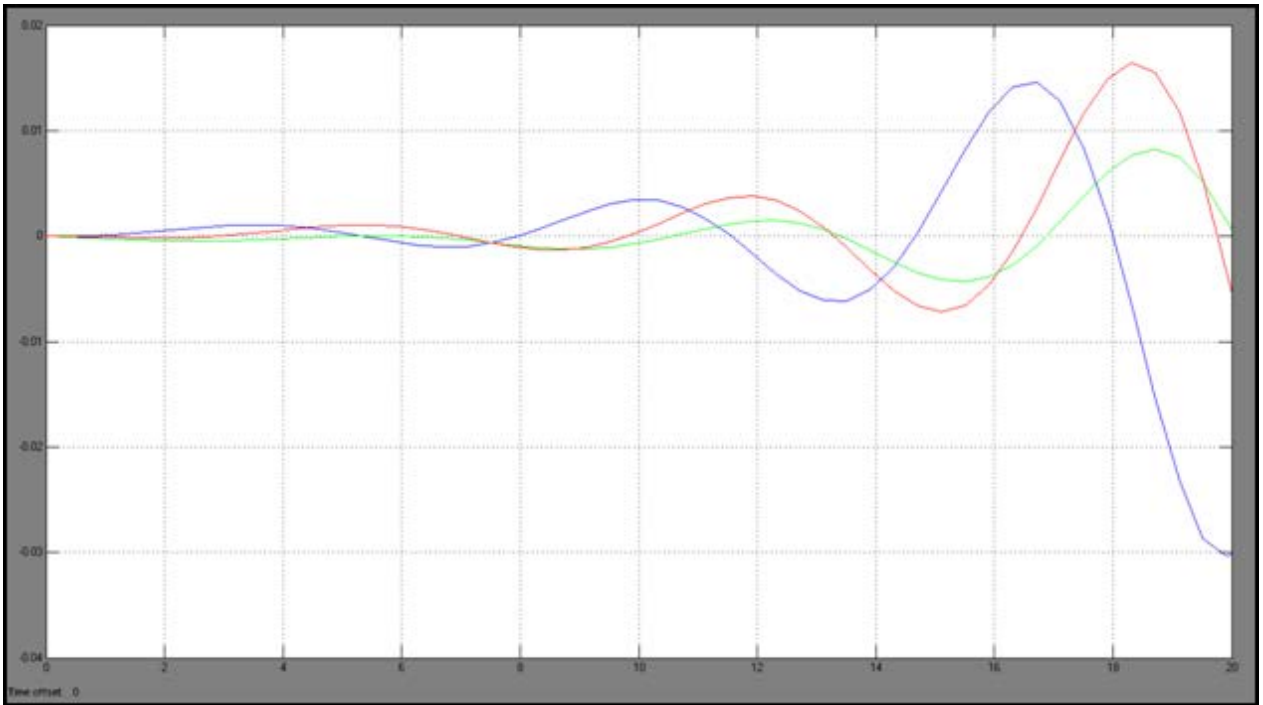


Figura 25. Error de inclinación entre el modelo no lineal (arriba) y el modelo lineal (abajo)



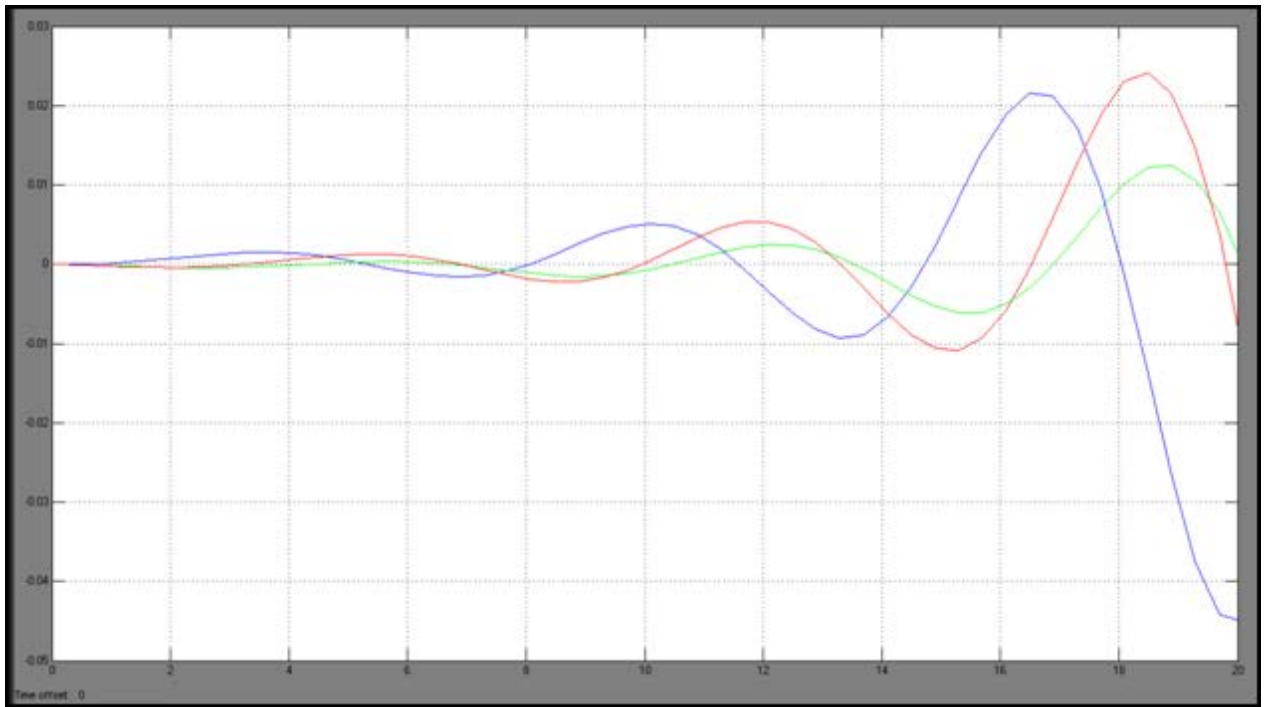
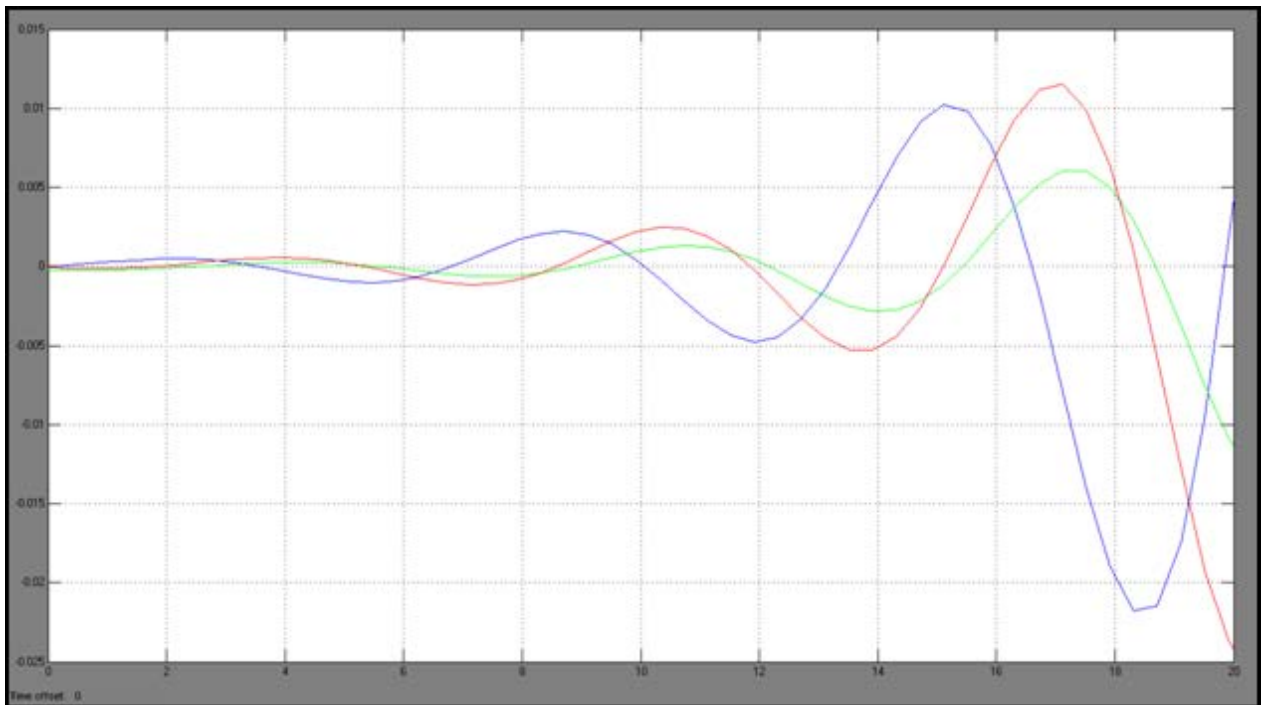


Figura 25. Comparación de la velocidad entre el modelo no lineal (arriba) y el modelo lineal (abajo)



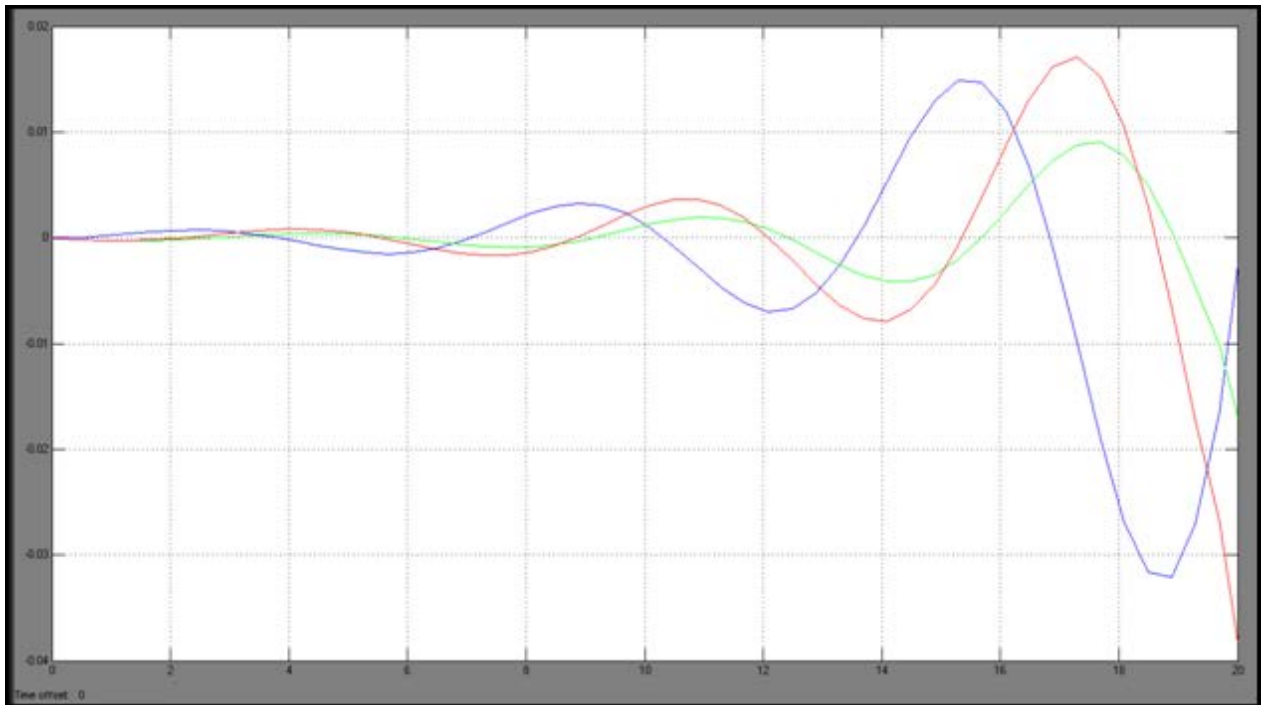


Figura 26. Comparación de la aceleración entre el modelo no lineal (arriba) y el modelo lineal (abajo)

El comportamiento oscilatorio de ambos modelos es muy similar, para tiempos cercanos a cero, el error se aproxima a cero; sin embargo a medida que el tiempo aumenta el error también lo hace. Con esto se puede concluir que cuando se acelera una rueda de reacción y en el sistema no actúan torques externos, entonces el satélite no dejará de girar; si se sigue acelerando la rueda de reacción, el cuerpo girará cada vez más rápido.

4.10 ANALISIS DE CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD

4.10.1 INTRODUCCIÓN

La controlabilidad de un sistema lineal se da en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ si existe una entrada $u(t)$ que al ser aplicada al sistema desde un estado inicial $x(t_0)$, transfiere el sistema al estado $x(t_1) = 0$. Si esta propiedad se mantiene sin tener en cuenta el tiempo inicial t_0 o el estado inicial $x(t_0)$, entonces el sistema es completamente controlable. Por otro lado, un sistema es observable en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ si para un estado inicial $x(t_0)$ se conocen dos funciones $u(t)$ y $y(t)$ en el mismo intervalo tal que sean suficientes para determinar una solución única de $x(t_0)$. Si esta propiedad se mantiene sin tener en cuenta el tiempo inicial t_0 o el estado inicial $x(t_0)$, entonces el sistema es completamente observable. Las definiciones de controlabilidad y observabilidad referenciadas anteriormente se contemplan tanto para sistemas SISO como para sistemas MIMO (Bay, 1999). El teorema para comprobar la controlabilidad y observabilidad de sistemas LTI afirma que para un sistema n-dimensional continuo en el tiempo es completamente controlable si y solo si la matriz:

$$CO = [B | AB | \dots | A^{n-1}B]$$

Tiene un rango igual a n . El sistema es observable si y solo si la matriz:

$$OB = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Tiene un rango igual a n . (Bay, 1999)

4.10.2 CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD DEL MODELO DINÁMICO

Al establecer el modelo lineal como un sistema en espacio de estados, se realiza el análisis de controlabilidad y observabilidad del mismo.

```

Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.
>> sys=ss(A,B,C,D)

a =
      x1      x2      x3      x4      x5      x6
x1      0     -0.9002  -0.9002      0      0      0
x2     0.3136      0     0.3136      0      0      0
x3     0.8173     0.8173      0      0      0      0
x4      1      0      0      0      0      0
x5      0      1      0      0      0      0
x6      0      0      1      0      0      0

b =
      u1      u2      u3
x1 -0.0003305      0      0
x2      0     -0.002273      0
x3      0      0     -0.0003161
x4      0      0      0
x5      0      0      0
x6      0      0      0

c =
      x1  x2  x3  x4  x5  x6
y1      0  0  0  1  0  0
y2      0  0  0  0  1  0
y3      0  0  0  0  0  1

d =
      u1  u2  u3
y1      0  0  0
y2      0  0  0
y3      0  0  0

Continuous-time model.

```

Figura 26. Modelo lineal de la Ecuación 4-29 en espacio de estados

La matriz de controlabilidad se calcula mediante la función `ctrb()` de MatLab, como resultado se tiene una matriz de 18 columnas por 6 filas:

```

Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.

>> Co=ctrb(sys)

Co =

Columns 1 through 10

-0.0003     0     0     0     0.0020     0.0003     0.0003     0.0017     0.0001     0.0002
     0    -0.0023     0    -0.0001     0    -0.0001    -0.0001     0.0001     0.0001     0.0001
     0     0    -0.0003    -0.0003    -0.0019     0    -0.0001     0.0017     0.0002     0.0002
     0     0     0    -0.0003     0     0     0     0.0020     0.0003     0.0003
     0     0     0     0    -0.0023     0    -0.0001     0    -0.0001    -0.0001
     0     0     0     0     0    -0.0003    -0.0003    -0.0019     0    -0.0001

Columns 11 through 18

-0.0016    -0.0002    -0.0003    -0.0022    -0.0002    -0.0003     0.0004     0.0001
 0.0010     0.0001     0.0001    -0.0000    -0.0000    -0.0000    -0.0008    -0.0001
 0.0014     0.0001     0.0002    -0.0004    -0.0001    -0.0001    -0.0018    -0.0002
 0.0017     0.0001     0.0002    -0.0016    -0.0002    -0.0003    -0.0022    -0.0002
 0.0001     0.0001     0.0001     0.0010     0.0001     0.0001    -0.0000    -0.0000
 0.0017     0.0002     0.0002     0.0014     0.0001     0.0002    -0.0004    -0.0001

>> rank(Co)

ans =

     6

```

Figura 27. Matriz de controlabilidad del sistema definido en Figura 27 y su rango

Al calcular el rango de la matriz de controlabilidad con la función rank() se obtiene el mismo número de variables de estado del modelo. El anterior análisis indica que el modelo es un sistema controlable; como el sistema es controlable, entonces las variables de estado del sistema pueden tomar cualquier valor deseado sin importar las condiciones iniciales en un intervalo de tiempo. De la misma manera se calcula la matriz de observabilidad con la función obsv() de MatLab así:

```

Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.

>> Ob=obsv(sys)

Ob =

     0     0     0     1.0000     0     0
     0     0     0     0     1.0000     0
     0     0     0     0     0     1.0000
    1.0000     0     0     0     0     0
     0     1.0000     0     0     0     0
     0     0     1.0000     0     0     0
     0    -0.9002    -0.9002     0     0     0
    0.3136     0     0.3136     0     0     0
    0.8173    0.8173     0     0     0     0
   -1.0181   -0.7357   -0.2823     0     0     0
    0.2563   -0.0260   -0.2823     0     0     0
    0.2563   -0.7357   -0.4794     0     0     0
   -0.4615    0.6857    0.6857     0     0     0
   -0.2389   -0.4615   -0.2389     0     0     0
   -0.6226   -0.6226   -0.4615     0     0     0
    0.7755    0.9759    0.6305     0     0     0
   -0.3400    0.0198    0.0703     0     0     0
   -0.5725    0.1832    0.3652     0     0     0

>> rank(Ob)

ans =

     6

```

Figura 28. Matriz de observabilidad del sistema definido en Figura 27 y su rango

Cuando se calcula el rango de la matriz de observabilidad del sistema se obtiene al igual que con el anterior análisis el mismo número de variables de estado que se poseen, lo cual indica que el sistema también es observable. Este análisis se realizó con los parámetros del satélite IntelsatV expuesto anteriormente. Como el sistema es observable, entonces se puede determinar el estado del sistema a partir de mediciones de las entradas y las salidas en un tiempo finito; con la posibilidad de construir un observador.

4.11 CONTROLADOR PARA EL SISTEMA DE ORIENTACIÓN

4.11.1 INTRODUCCIÓN

Teniendo en cuenta los modelos matemáticos que representan la orientación de un satélite obtenidos anteriormente, se puede ver que la ecuación en variables de estado del sistema es multivariado. Estas ecuaciones de estado necesitarían un controlador multivariable para poder cumplir con las especificaciones de orientación del sistema, ya que una variable puede actuar simultáneamente en las tres ecuaciones, produciendo así una dependencia entre ellas. Para poder controlar el modelo dinámico del sistema se propone la elaboración de un controlador por retroalimentación de estados. Así mismo, se diseña un controlador simple para un sistema de orientación de un grado de libertad de un vehículo espacial, teniendo en cuenta que se trabaja variable de salida por variable de salida para que de esta manera si se quisiera el control total del satélite, se haría de manera cuasi estática controlando eje por eje.

4.11.2 CONTROL POR RETROALIMENTACIÓN DE ESTADOS

El control por retroalimentación de variables de estado es muy utilizado en ingeniería aeroespacial, y el siguiente procedimiento sigue el orden de (Jafarov, 2006). Teniendo el modelo en espacio de estados del satélite, con un control lineal como:

$$u = -\zeta_1 \omega - \zeta_2 \theta = -Kx \quad \text{Ecuación 4-35}$$

Y sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación en variables de estado:

$$x' = Ax + Bu \quad \text{Ecuación 4-36}$$

La ecuación del sistema en lazo cerrado es:

$$x' = Ax - BKx = (A - BK)x \quad \text{Ecuación 4-37}$$

El anterior sistema es asintóticamente estable si la matriz $A - BK$ tiene valores propios negativos, los cuales se pueden encontrar con la ecuación característica:

$$|sI - A + BK| = 0 \quad \text{Ecuación 4-38}$$

Utilizando el método de ubicación de polos para reubicar los polos del sistema lineal inestable a unos polos deseados y descritos por (Jafarov, 2006) para un satélite IntelsatV mostrados en la siguiente figura:

Eigenvalues of $A - B\zeta$
$\lambda = -0.0153$
$\lambda = -0.0087$
$\lambda = -0.0087$
$\lambda = -0.0163$
$\lambda = -0.00687$
$\lambda = -0.00668$

Figura 29. Valores propios deseados por (Jafarov, 2006)

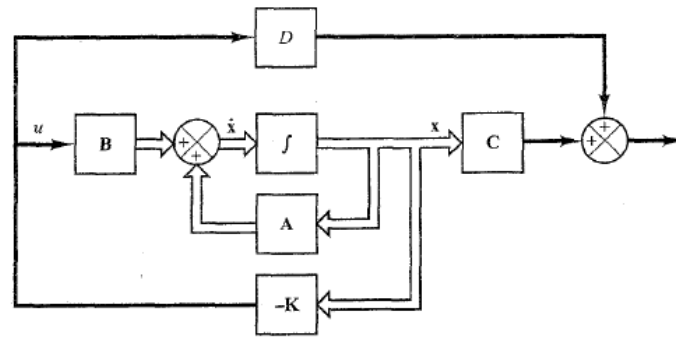


Figura 32. Control en lazo cerrado del sistema $u=-Kx$ (Ogata, 2002) (Ogata, 2002)

Donde A , B , C , D son las matrices que componen el sistema en variables de estado del modelo lineal obtenido anteriormente. La matriz $-K$ es la ganancia para la configuración de control por retroalimentación de estados, la cual es proporcionada mediante los polos deseados. El sistema de control mencionado anteriormente se aplica para el caso de estudio del satélite IntelsatV de la siguiente manera:

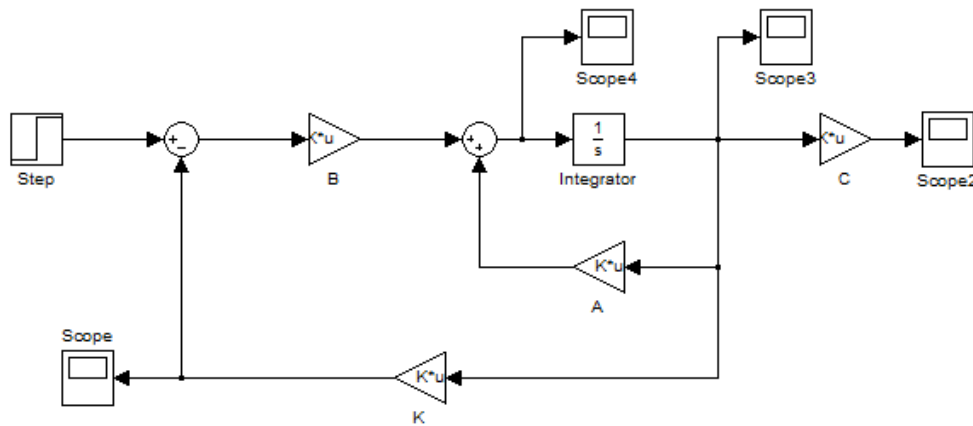


Figura 33. Diagrama de bloques del modelo MIMO del satélite

Es necesario tener en cuenta que para obtener la respuesta de la configuración anterior, se deben de modificar los parámetros internos de cada bloque. A continuación se muestra como se deben escoger los parámetros del bloque A para que sea operada como matriz (todo este procedimiento se realiza en Simulink), el valor “multiplication” debe de estar en “Matrix($K*u$)”, como se muestra a continuación:

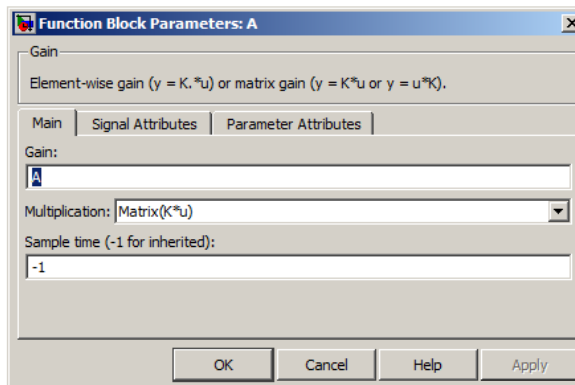


Figura 34. Definición del bloque A del sistema de control por retroalimentación de estados

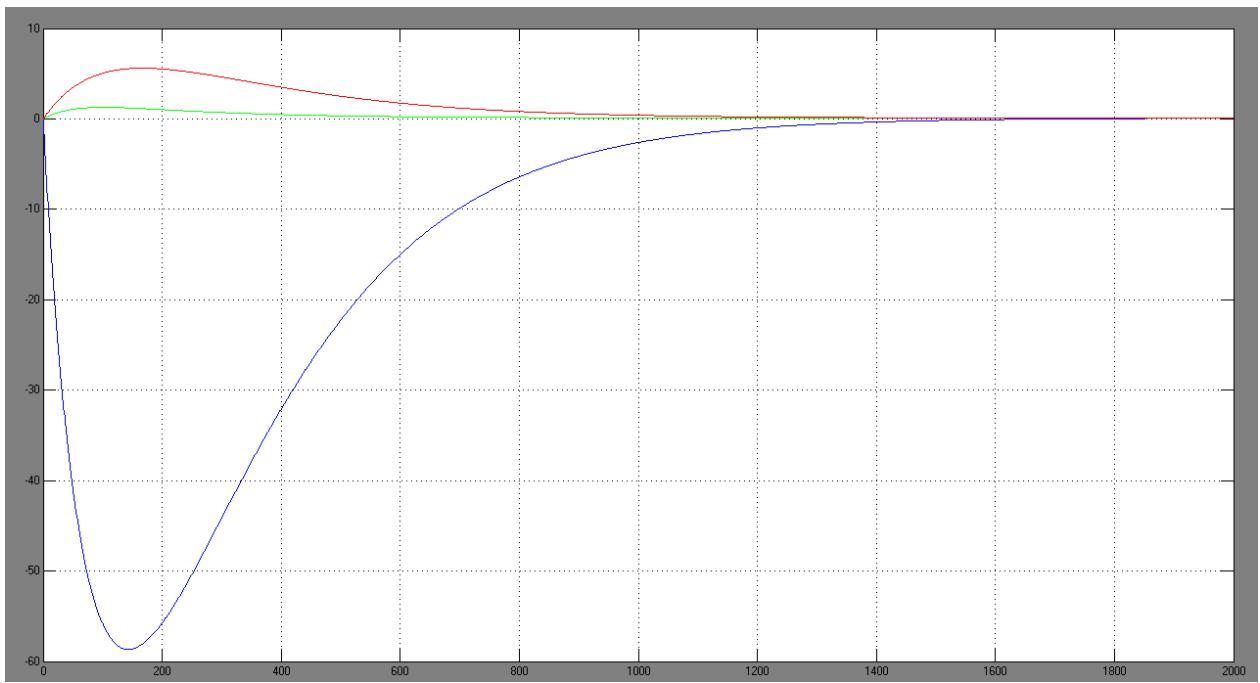


Figura 35. Torques de control $K*u$

La anterior figura corresponde al torque de control que ejerce sobre el sistema para así estabilizar el satélite tanto en posición como en velocidad y aceleración. El bloque referencia corresponde a las entradas del modelo (los cambios del momento angular de las ruedas de reacción), las cuales no superan 0.1Nm de torque debido a las especificación con las que se está trabajando. En esta gráfica el cabeceo ψ (gráfica azul), la orientación θ (gráfica roja) y la inclinación ϕ (gráfica verde) conforman el gráfico a continuación:

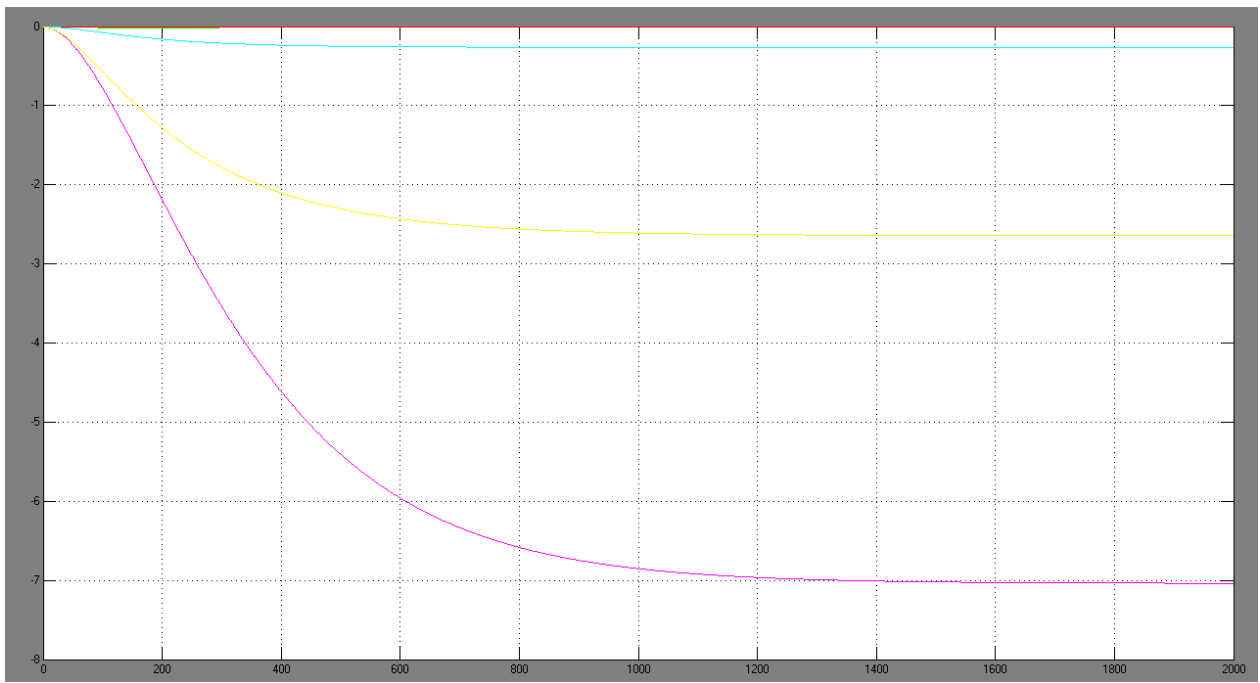


Figura 36. Posiciones angulares

En la anterior grafica el cabeceo ψ (gráfica azul), la orientación θ (gráfica roja) y la inclinación ϕ (gráfica verde) se estabilizan en una posición constante (en aproximadamente 1400 segundos), lo que es normal para el tipo de satélite analizado.

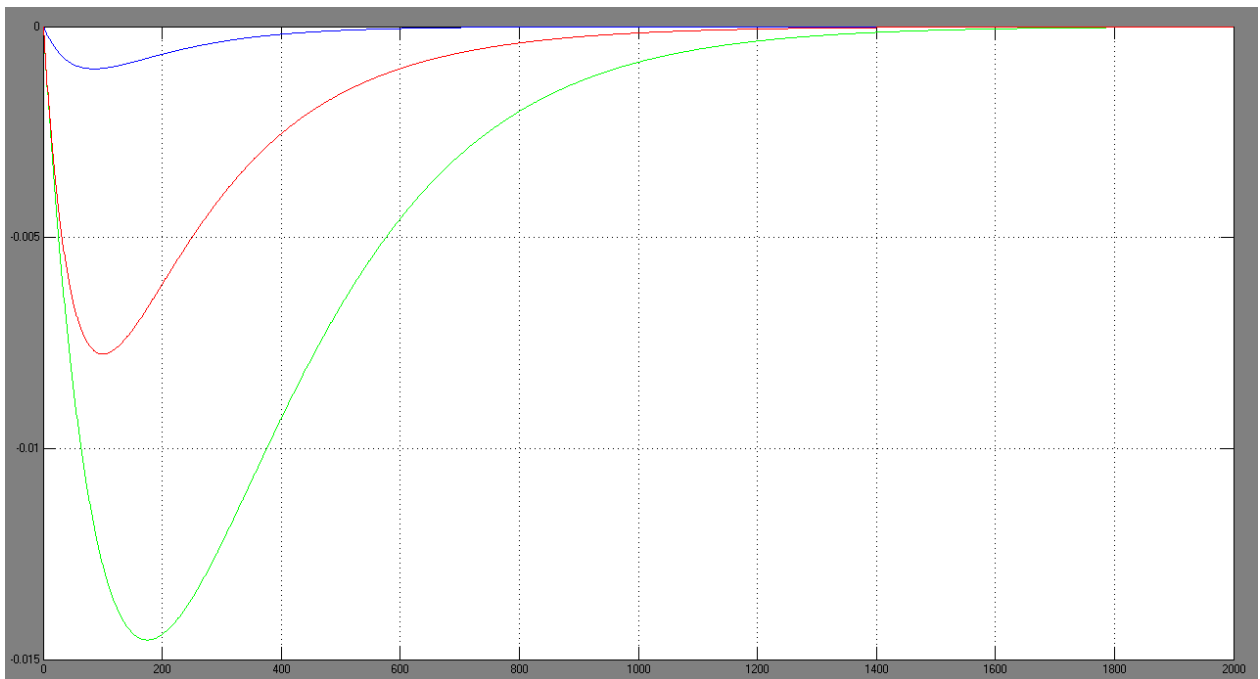


Figura 37. Velocidades angulares

En la anterior grafica se muestran la inclinación ϕ (gráfica azul), la orientación θ (gráfica roja) y el cabeceo ψ (gráfica verde). Las velocidades angulares llegan a cero en el mismo intervalo de tiempo mencionado anteriormente. Lo que indica que el satélite después de cierto tiempo se queda estacionario.

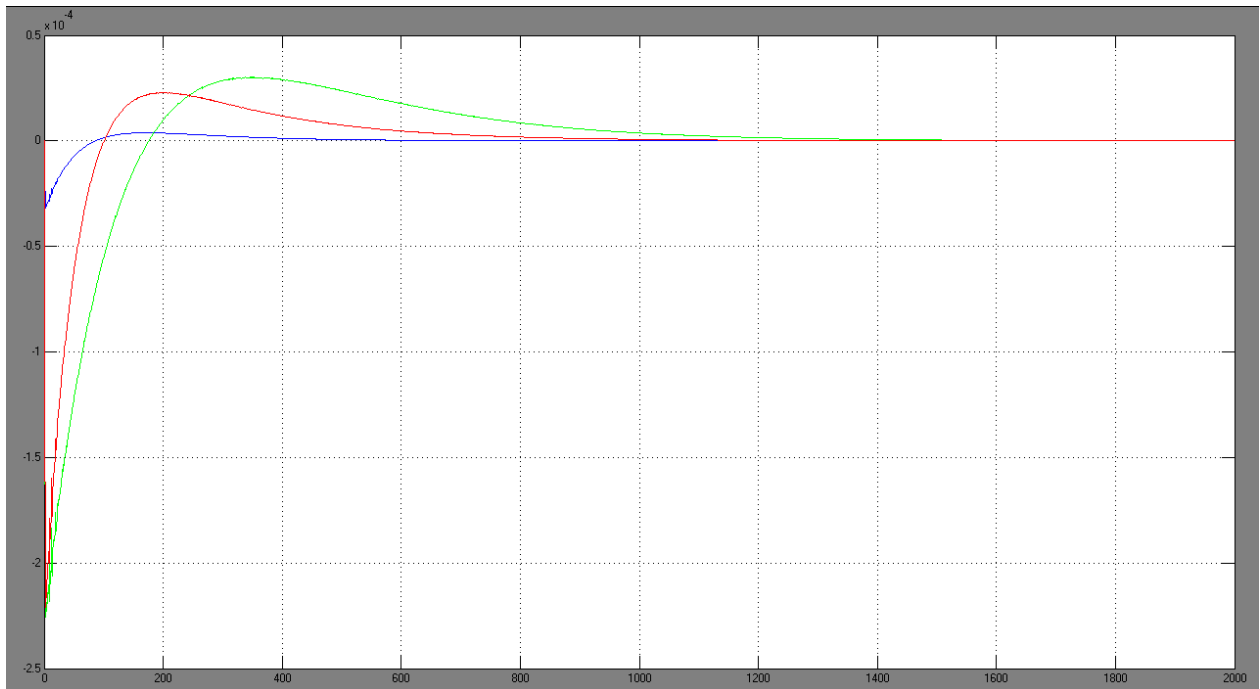


Figura 38. Aceleraciones angulares

En la anterior grafica se presentan la inclinación ϕ (gráfica azul), la orientación θ (gráfica roja) y el cabeceo ψ (gráfica verde). Las anteriores graficas muestran la respuesta del sistema controlado a una entrada 0.1Nm , el cual es el máximo torque producido por cada una de las ruedas de reacción según los parámetros del satélite nombrados anteriormente. Se puede observar en las graficas del sistema controlado un tiempo de establecimiento aproximado a los 1400 segundos, y un sobre pico en la aceleración angular del satélite de 2.3×10^{-5} para la inclinación ϕ (gráfica azul), 3×10^{-5} para la orientación θ (gráfica roja) y finalmente 0.4×10^{-5} para el cabeceo ψ (gráfica verde).

La implementación de este controlador por retroalimentación de estados se puede realizar mediante electrónica analógica o electrónica digital. Para el caso de la implementación de este control mediante electrónica analógica se tendría que diseñar un circuito de control por separado para cada una de las variables de estado y funcionarían en paralelo. Ahora la implementación de este controlador por medio de electrónica digital sería un desarrollo más sencillo de ejecutar; este se puede llevar a cabo mediante la programación de micro controladores, para esto es necesario una interfaz entre la planta y el control.

5 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Durante la realización de este trabajo de grado se encontraron dos tipos de formulaciones dinámicas diferentes capaces de representar el sistema de orientación de tres grados de libertad para un satélite. La primera formulación (Euler-Lagrange) generó las tres ecuaciones de movimiento mediante la determinación de la energía potencial y la energía cinética. El planteamiento de energías se extendía demasiado de forma que se sumaban en una única ecuación todos los aportes de la energía cinética rotacional, energía cinética translacional y la energía potencial. Luego de lograr obtener la ecuación de Lagrange, se formularon las ecuaciones de movimiento. El desarrollo matemático era demasiado complejo para su posterior análisis, por lo cual se plantea la dinámica del satélite mediante la formulación de Newton-Euler. La combinación Newton-Euler resulta una buena formulación ya que además de concentrar de manera más apropiada el modelo, permite agrupar las variables de estado y las entradas del sistema en una ecuación de estados.

Para la realización del modelo del sistema fue utilizada la formulación Newton-Euler, y se utiliza el Toolbox de MatLab® llamado Simulink para encontrar las diferentes respuestas que este modelo entrega. Esta herramienta permite modelar sistemas mecánicos, eléctricos, hidráulicos y espaciales de la realidad con una gran aproximación. La simulación permite detallar el movimiento del cuerpo rígido mediante las entradas del sistema, las cuales son las derivadas en el tiempo de los momentos angulares de cada una de las ruedas de reacción, que a su vez son producidas al aplicar voltajes a los motores encargados del movimiento de las ruedas. Pese a que este es un modelo que se comparó con la literatura, vale la pena ejecutar posteriormente una validación del mismo con herramientas como Simmechanics.

Al haber encontrado el modelo no lineal y de allí haber extraído un modelo lineal del sistema, no se realizó una validación profunda entre estos modelos, ya que dentro de los objetivos de este trabajo de grado no se encuentra la realización de una validación intensa. Pero sin embargo se compararon con modelos de la literatura descritos previamente en las referencias; se consideró necesario generar y encontrar cierta validación entre los modelos que han sido encontrados a lo largo de la realización del trabajo de grado. Para esto se obtienen respuestas a entradas paso para cada modelo con el propósito de realizar una comparación de las respuestas de ambos modelos para así determinar una validación entre ellos, al final se obtuvo un comportamiento similar entre ambos modelos con un error que va aumentando a medida que el tiempo aumenta.

Evaluando los resultados obtenidos en este trabajo con respecto a investigaciones similares realizadas en el mundo, las deducciones planteadas representan un acercamiento importante en cuanto al planteamiento dinámico en su forma matemática. Al evaluar las posibles perturbaciones (las cuales para el sistema de orientación son torques que pueden llegar a afectar la orientación del dispositivo) que podrían presentarse en la planta, se desarrolló un control simple para un sistema de orientación de un grado de libertad de manera que se pueda controlar una variable sin provocar desviaciones significativas en las demás. Y por supuesto, controlar cada una de las variables de manera independiente una con la otra. A su vez también se realizó un control por retroalimentación de estados con el modelo del sistema linealizado, necesario para controlar la posición del satélite debido a la inestabilidad que presentaba el sistema.

Las respuestas del controlador por retroalimentación de estados muestran la respuesta del sistema controlado a una entrada de 0.1Nm, el cual es el máximo torque producido por cada una de las ruedas de reacción según los parámetros del satélite nombrados anteriormente. Se puede observar en las gráficas del sistema controlado un tiempo de establecimiento aproximado a los 1400 segundos, y un sobre pico en la aceleración angular del satélite de 2.3×10^{-5} para la inclinación ϕ (gráfica azul), 3×10^{-5} para la orientación θ (gráfica roja) y finalmente 0.4×10^{-5} para el cabeceo ψ (gráfica verde). Esto indica que datos como el sobre pico, la respuesta en estado estacionario, el tiempo de establecimiento son respuestas esperadas respecto a un satélite grande como lo es el IntelsatV, esto según la literatura.

6 CONCLUSIONES

Al terminar este trabajo se determinó un modelo teórico MIMO a partir de un análisis teórico matemático basado en un desarrollo de la dinámica de Newton, que permitió generar una serie de ecuaciones, caracterizando de manera completa el modelo en un sistema de variables de estados. El modelo dinámico del sistema rige el comportamiento de la planta en el espacio, de manera que el satélite es capaz de moverse en cualquiera de las tres direcciones de forma libre. El modelo determinado mediante la formulación de Newton-Euler proporciona un modelo completo y simplificado del movimiento del satélite en el espacio. El modelo general de Newton aporta una planta completa y concisa que comprende las constantes físicas que se involucran en el movimiento de cada uno de los motores, como lo son las derivadas de los momentos de angulares de las ruedas de reacción como entradas del sistema.

El trabajo de grado realizado permitió encontrar una variedad importante de posibles señales de disturbio reales, las cuales pueden complementar el modelo suministrándole otra serie de condiciones para la realización de un control más robusto, permitiendo llevar al modelo a una interacción más real con las diferentes fuerzas y disturbios; involucrándolo en un ambiente más cercano a la realidad espacial de un satélite. Vale la pena resaltar que en este trabajo de grado solo nombramos todas estas señales de disturbio y no se involucraron directamente en la realización del modelo final por facilidad en los cálculos. Todos los posibles disturbios que se puedan presentar en un sistema de orientación de tres grados de libertad en el espacio son torques externos, los cuales son capaces de afectar la orientación de la planta en cualquiera de las tres direcciones de manera aleatoria. Estos disturbios son torques principalmente causados por: campo magnético, de arrastre aerodinámico, radiación solar, gradiente de gravedad, expulsión de masas y por último el disturbio causado dentro de la estructura del dispositivo.

El modelo dinámico determinado mediante la formulación de Newton-Euler se linealizó alrededor de un punto de operación en el cual los motores y el sistema en general tuvieran una coherencia matemática al momento de realizar una comparación con el sistema no lineal. El desarrollo de la linealización de la planta de tres grados de libertad generó un nuevo sistema de ecuaciones matriciales. Al linealizar el modelo dinámico alrededor de un punto de operación de la planta no lineal, se analizó su controlabilidad y observabilidad, características importantes para realizar el control de un sistema lineal, finalmente el sistema dio como resultado ser completamente controlable y observable, este análisis nos permitió ubicar los polos de la planta en lugares específicos en los cuales el resultado en estado estable del control final fuera el deseado.

Se desarrolló un análisis de controlabilidad y observabilidad de un sistema lineal extraído del modelo general de un sistema de orientación de tres grados de libertad, el cual fue necesario para sintetizar un controlador por retroalimentación de estados, como se había plantado al inicio de este trabajo de grado. El control por retroalimentación de estados permitió analizar el comportamiento del modelo y ver directamente las respuestas de todas las variables de entrada y salida involucradas en la orientación específica del satélite. Este método de control permite involucrar todas las inercias de cada rueda de reacción del satélite al igual que los polos deseados del sistema, necesarios para obtener una respuesta esperada por parte del controlador.

Para obtener una fundamentación acorde para este trabajo de grado fue importante generar una documentación previa con un apoyo de varias fuentes de información, encontrándonos con una dinámica y cinemática de cuerpos rígidos en sistemas de tres dimensiones que no habían sido tratados en cursos anteriores universitarios (pregrado). Vemos que al realizar una combinación de un análisis Newton-Euler proporcionó un estudio más concreto y más entendible para el futuro lector, sin embargo se trató de realizar un desarrollo completo del modelo por ambos métodos, encontrándonos con respuestas demasiado extensas que dificultaban cualquier tipo de análisis.

El modelo matemático de la dinámica de un satélite deja abierta la posibilidad para trabajos posteriores en el tema, como realizar la validación del mismo con los parámetros de la implementación de una planta

física que ya ha sido desarrollada en otro trabajo de grado, también se puede centrar otro estudio en la realización de un controlador robusto multivariado para este sistema. De igual manera esta investigación constituye un aporte valioso en cuanto a el estudio de la dinámica y cinemática de cuerpos rígidos en sistemas de tres dimensiones en Colombia, en especial para satélites, tema que hasta ahora comienza a tomar fuerza en nuestro país, dejando a la Universidad Javeriana en un punto importante en cuanto al estudio de la ingeniería espacial.

7 BIBLIOGRAFÍA

Agency, E. S. (2010). *esa space for europe*. Recuperado el 1 de Junio de 2010, de Space Engineering: http://www.esa.int/SPECIALS/Space_Engineering/index.html

Anderson, A. D., Sellers, J. J., & Hashida, Y. (2004). Attitude Determination and Control System Simulation and Analysis for Low-Cost Micro-satellites. *Aerospace Conference, USAF Academy Dept. of Astronautics*.

B. J. Kim, H. L. (1996). Three axis reaction wheel attitude control system for Kitsat-3 microsatellite.

Baruh, H. (1999). *Analytical dynamics*. Boston: McGraw-Hill.

Bay, J. S. (1999). *Fundamentals of linear state space systems*. Boston: McGraw-Hill.

Chang-Hee, W. (5 de febrero de 1999). Comparative study of various control methods for attitude control of a LEO satellite.

French, J. (1995). *Spacecraft Systems Design and Engineering*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington D.C.

High Precision Satellite Attitude Control Based on Feedforward Compensation. (2006). *Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Dalian.

Hollister, W. (1997). *Satellite Engineering*. Massachusetts Institute of Technology, Department of Aeronautics and Astronautics.

Hughes, P. C. (1986). *Spacecraft attitude dynamics*.

Jafarov, E. A. (2006). Performances Comparison of Linear and Sliding Mode Attitude Controllers for Flexible Spacecraft with Reaction Wheels.

Ji Li, H.-Y. Z. (2005). Controller Reconfiguration against Reaction Wheel Failure Based on Predictive Filters.

Jingyang Zhou, D. Z. (2007). Spacecraft Attitude Control with Double-Gimbaled Control Moment Gyroscopes.

Kaplan, M. H. (1976). *Modern spacecraft dynamics and control*.

Lenarécić, J., & Roth, B. (2006). *Advances in robot kinematics: mechanisms and motion*. Dordrecht.

Meriam, J. L., & Kraige, L. G. (1975). *Engineering mechanics : dynamics* (Cuarta edición ed., Vol. II). New York: John Wiley & Sons.

Ogata, K. (2002). *Modern Control Engineering*.

Rodriguez, C. F. *Formulación de Lagrange*. Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería.

Satellite Orbits Guidance Using State Space Neural Network. (2009). *The Egyptian Satellites Company (Nilesat)*.

Shahin S. Nudehi, U. F. (2008). Satellite attitude control using three reaction wheels.

SIDI, M. J. (1997). *Spacecraft Dynamics and Control A Practical Engineering Approach*. New York: University of Cambridge.

Sistemas de percepción remota, cómputo, control, diseño y simulación de la órbita; de satélites de observación de la Tierra. *Análisis Geográficos (40)*.

Skogestad, S. (2005). *Multivariable feedback control : analysis and design* (Segunda edición ed.). New York: John Wiley.

Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2006). *Robot Modeling and Control* (Primera edición ed.). JOHN WILEY & SONS, INC.

Stickler, G. (s.f.). *Educational Brief* . (Nasa) Recuperado el 20 de Mayo de 2010, de <http://edmall.gsfc.nasa.gov/inv99Project.Site/Pages/science-briefs/ed-stickler/ed-irradiance.html>

Vargas, J. G. (1979). *Noether's theorems revisited and a new version of the euler - lagrange equations*. Bogotá: Uniandes.

Wertz, J. R., & Larson, W. J. (1999). *Space Mission Analysis and Design* (Tercera edición ed.). Space Technology Library.

Wie, B. (1952). *Space Vehicle Dynamics and Control*. (A. I. Astronautics, Ed.) Virginia.

Zhang, R. W. (1998). *Satellite Orbit and Attitude Dynamics and Control*. Beijing.

Zuliana Ismail, R. V. (10 de November de 2009). A study of reaction wheel configurations for a 3-axis satellite attitude control. *ScienceDirect* .

8 ANEXOS

8.1 DINÁMICA DE CUERPOS RÍGIDOS EN TRES DIMENSIONES

8.1.1 CINEMÁTICA

El análisis de la cinemática de cuerpos rígidos que tienen movimiento en tres dimensiones no solo se soporta en el movimiento de rotación y translación sino que se involucran los principios de movimiento relativo.

8.1.1.1 TRANSLACIÓN DEL MARCO DE REFERENCIA

En la figura se muestra un cuerpo rígido (es aquel cuerpo que no sufre deformaciones al percibir fuerzas externas, es un sistema de partículas cuyas posiciones relativas no varían), el cual tiene una velocidad angular ω . Se selecciona un punto B aleatorio del cuerpo tal que sea el origen de la translación del marco de referencia XYZ o marco inercial. La velocidad v y la aceleración a de cualquier otro punto A en el cuerpo, están dadas por las expresiones relativas:

$$v_A = v_B + v_{A/B}$$

Ecuación 8-1

$$a_A = a_B + a_{A/B}$$

Ecuación 8-2

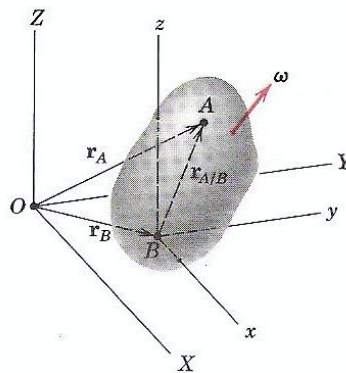


Figura 39. Translación del marco de referencia

Teniendo en cuenta que la distancia \overline{AB} permanece constante para un observador ubicado en el origen del marco del cuerpo, para este observador el cuerpo aparenta rotar con el eje en el punto B mientras que el punto A aparenta trazar una superficie esférica con centro en B . Por lo tanto, el movimiento general de un cuerpo rígido se expresa como una translación del cuerpo con el movimiento del punto B adicionándole una rotación del cuerpo en el punto B . El movimiento relativo representa el efecto de la rotación en el punto B . Por lo tanto, la velocidad relativa y la aceleración relativa se pueden escribir como:

$$v_A = v_B + (\omega \times r_{A/B})$$

Ecuación 8-3

$$a_A = a_B + (\omega' \times r_{A/B}) + (\omega \times r'_{A/B})$$

Ecuación 8-4

$$a_A = a_B + \omega' \times r_{A/B} + \omega \times (\omega \times r_{A/B})$$

La selección del punto B se escoge porque el movimiento se conoce de manera total o parcial.

8.1.1.2 ROTACIÓN DEL MARCO DE REFERENCIA

El análisis de un cuerpo rígido en el espacio no solo involucra la translación del marco de referencia sino que existe un movimiento de rotación del marco de referencia respecto al original. Lo que se quiere mostrar es el eje de coordenadas atado al punto de referencia B pero rotando con una velocidad angular Ω , esta velocidad puede ser diferente a la velocidad angular del cuerpo rígido ω .

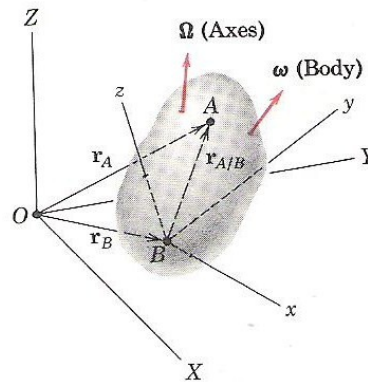


Figura 40. Rotación del marco de referencia

La expresión para la velocidad del punto A se puede escribir como:

$$v_A = v_B + (\Omega \times r_{A/B}) + v_{rel}$$

Ecuación 8-5

Al derivar la expresión anterior se obtiene la expresión para la aceleración del punto A :

$$\begin{aligned}
a_A &= a_B + \Omega' \times r_{A/B} + \Omega \times r'_{A/B} + v'_{rel} \\
a_A &= a_B + \Omega' \times r_{A/B} + \left[\Omega \times \frac{d}{dt}(ix + jy + kz) \right] + v'_{rel} \\
a_A &= a_B + \Omega' \times r_{A/B} + \left[\Omega \times (i'x + ix' + j'y + jy' + k'z + kz') \right] + v'_{rel} \\
a_A &= a_B + \Omega' \times r_{A/B} + \left[\Omega \times \{ (i'x + j'y + k'z) + (ix' + jy' + kz') \} \right] + v'_{rel} \\
a_A &= a_B + \Omega' \times r_{A/B} + \left[\Omega \times \{ (\Omega \times r_{A/B}) + v_{rel} \} \right] + v'_{rel} \\
a_A &= a_B + \Omega' \times r_{A/B} + \left[\Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + \Omega \times v_{rel} \right] + v'_{rel} \\
a_A &= a_B + \Omega' \times r_{A/B} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + \Omega \times v_{rel} + \left[\frac{d}{dt}(ix' + jy' + kz') \right] \\
a_A &= a_B + \Omega' \times r_{A/B} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + \Omega \times v_{rel} + [i'x' + ix'' + j'y' + jy'' + k'z' + kz''] \\
a_A &= a_B + \Omega' \times r_{A/B} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + \Omega \times v_{rel} + [(i'x' + j'y' + k'z') + (ix'' + jy'' + kz'')] \\
a_A &= a_B + \Omega' \times r_{A/B} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + \Omega \times v_{rel} + [\Omega \times (ix' + jy' + kz') + (ix'' + jy'' + kz'')] \\
a_A &= a_B + \Omega' \times r_{A/B} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + \Omega \times v_{rel} + [\Omega \times v_{rel} + a_{rel}] \\
a_A &= a_B + \Omega' \times r_{A/B} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + 2\Omega \times v_{rel} + a_{rel}
\end{aligned}$$

Ecuación 8-6

Donde $v_{rel} = ix' + jy' + kz'$ y $a_{rel} = ix'' + jy'' + kz''$ son respectivamente la velocidad y la aceleración del punto A medida en relación a xyz por un observador anclado al marco de referencia xyz . Cabe resaltar que Ω es la velocidad angular de los ejes del marco del cuerpo respecto al marco inercial y que $r_{A/B}$ permanece constante en magnitud para un cuerpo rígido. Asimismo, si xyz está rígidamente anclado al cuerpo, entonces $\Omega = \omega$ y además, tanto v_{rel} como a_{rel} son nulas. Llegando así, a las ecuaciones 8-7 y 8-8 nuevamente. La ecuación 8-9 es la derivada con respecto al tiempo de la posición mientras que el marco de referencia xyz rota con una velocidad angular Ω . Se puede generalizar el concepto de derivada para cualquier vector de la forma $V = iV_x + jV_y + kV_z$. Por lo tanto, la derivada total tomada en el marco inercial XYZ involucrando la derivada con respecto al tiempo del vector V vista desde el marco de referencia xyz es:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV}{dt}\right)_{XYZ} &= \frac{d}{dt}(iV_x) + \frac{d}{dt}(jV_y) + \frac{d}{dt}(kV_z) \\ \left(\frac{dV}{dt}\right)_{XYZ} &= (i'V_x + iV'_x) + (j'V_y + jV'_y) + (k'V_z + kV'_z) \\ \left(\frac{dV}{dt}\right)_{XYZ} &= (iV'_x + jV'_y + kV'_z) + (i'V_x + j'V_y + k'V_z) \\ \left(\frac{dV}{dt}\right)_{XYZ} &= \left(\frac{dV}{dt}\right)_{xyz} + (\Omega \times iV_x + \Omega \times jV_y + \Omega \times kV_z) \\ \left(\frac{dV}{dt}\right)_{XYZ} &= \left(\frac{dV}{dt}\right)_{xyz} + (\Omega \times V) \\ V'_{XYZ} &= V'_{xyz} + (\Omega \times V) \end{aligned}$$

Ecuación 8-10

Cuando se aplica esta ecuación para la posición relativa del vector $r_{A/B} = r_A - r_B$ para el cuerpo rígido de la figura anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr_A}{dt}\right)_{XYZ} - \left(\frac{dr_B}{dt}\right)_{XYZ} &= \left(\frac{dr_{A/B}}{dt}\right)_{xyz} + \Omega \times r_{A/B} \\ \left(\frac{dr_A}{dt}\right)_{XYZ} &= \left(\frac{dr_B}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{dr_{A/B}}{dt}\right)_{xyz} + \Omega \times r_{A/B} \\ v_A &= v_B + v_{rel} + \Omega \times r_{A/B} \end{aligned}$$

Llegando así a la Ecuación 8-11. Las ecuaciones 8-12 y 8-13 únicamente se usan cuando el marco de referencia xyz está atado a un cuerpo rígido y dentro del cual hay un movimiento relativo.

8.1.2 CINÉTICA

8.1.2.1 MOMENTO ANGULAR

En la siguiente figura se ve que el marco de referencia xyz está sujeto al centro de masa G . Así que, la velocidad angular ω del cuerpo se convierte en velocidad angular Ω del marco de referencia xyz , vista desde el origen del marco de referencia inercial XYZ .

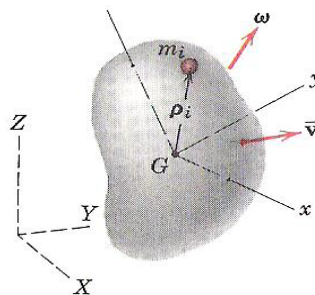


Figura 41. Centro de masa de un cuerpo rígido

El momento angular del cuerpo en relación con el centro de masa G , es la suma de los momentos lineales de todos los elementos del cuerpo que ocurren sobre G y se expresa como:

$$H = \sum (\rho_i \times m_i \rho'_i)$$

$$H = \sum (\rho_i \times m_i v_i)$$

$$H = \sum \rho_i \times m_i (v + \omega \times \rho_i)$$

Ecuación 8-14

$$H = \sum \rho_i \times [m_i v + m_i (\omega \times \rho_i)]$$

$$H = \sum (\rho_i \times m_i v) + \sum [\rho_i \times m_i (\omega \times \rho_i)]$$

Donde v_i es la velocidad del elemento de masa m_i . Para un cuerpo rígido $v_i = v + \omega \times \rho_i$, donde $\omega \times \rho_i$ es la velocidad relativa de m_i con respecto a G , visto desde el marco de referencia inercial. Además, v es la velocidad del centro de masa G respecto al marco XYZ .

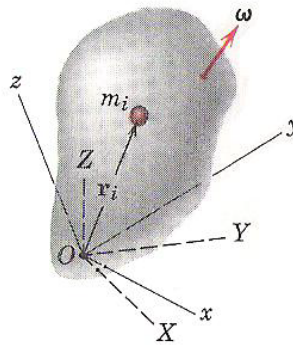


Figura 42. Momento angular

Si el centro de masa G del cuerpo coincide con los marcos de referencia XYZ y xyz , entonces el primer término del momento angular H se anula, ya que no existiría una diferencia de velocidades entre el marco inercial XYZ y el eje coordenado xyz como se muestra en anterior figura. Sustituyendo m_i por dm y ρ_i por r , el momento angular sobre el punto O sería:

$$H = \sum (\rho_i \times m_i v) + \sum [\rho_i \times m_i (\omega \times \rho_i)]$$

$$H = \sum [\rho_i \times m_i (\omega \times \rho_i)]$$

$$H = \int (\rho \times [\omega \times \rho]) \cdot dm$$

Ecuación 8-15

$$H = \int (r \times [\omega \times r]) \cdot dm$$

Teniendo en cuenta que tanto el vector ρ como el vector r están dados por $ix + jy + kz$, entonces se procede a expandir la integral que define el momento angular, sabiendo que ω es un vector invariante. La expansión del producto cruz aplicada al triple producto de vectores da como resultado:

$$H = \int (r \times [\omega \times r]) \cdot dm$$

$$\partial \cdot H = \partial \cdot \int (r \times [\omega \times r]) \cdot dm$$

$$\frac{\partial H}{dm} = r \times [\omega \times r]$$

$$\frac{\partial H}{dm} = \langle ix, jy, kz \rangle \times \left[\langle \omega_x, \omega_y, \omega_z \rangle \times \langle ix, jy, kz \rangle \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{dm} = & \left[x(-\omega_y \cdot y - \omega_z \cdot z) + \omega_x \cdot y^2 + \omega_x \cdot z^2 \right] i \\ & + \left[\omega_y \cdot x^2 - \omega_x \cdot x \cdot y - \omega_z \cdot y \cdot z + \omega_y \cdot z^2 \right] j \\ & + \left[\omega_z \cdot x^2 - \omega_x \cdot x \cdot z + \omega_z \cdot y^2 - \omega_y \cdot y \cdot z \right] k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{dm} = & \left[(y^2 + z^2)\omega_x \quad -xy\omega_y \quad -xz\omega_z \right] i \\ & + \left[-xy\omega_x \quad + (x^2 + z^2)\omega_y \quad -yz\omega_z \right] j \\ & + \left[-xz\omega_x \quad -yz\omega_y \quad + (x^2 + y^2)\omega_z \right] k \end{aligned}$$

Ecuación 8-16

Teniendo en cuenta que el momento angular sobre el centro de masa G se expresa mediante la 8-17 $H = \sum (r_i \times m_i r_i')$, donde r_i es el vector posición relativo al centro de masa del cuerpo rígido y r_i' es la velocidad de m_i respecto al punto G , se puede denotar la velocidad como $r_i' = v_i = \omega \times r_i$, ya que no existe la diferencia de velocidades entre el marco inercial XYZ y el marco xyz como se muestra en la figura4, el momento angular tiene la forma $H = \sum r_i \times m_i (\omega \times r_i)$. La magnitud del momento de angular se convierte en $|H| = \sum r_i^2 m_i \omega = \omega \sum r_i^2 m_i$. La sumatoria se puede escribir como $\int r^2 dm$, esta integral se define como el momento de inercia de masa de un cuerpo y se denota como I . Así que la magnitud del momento angular es entonces $|H| = I\omega$. De lo anterior y de la ecuación 8-10 se pueden extraer las expresiones para cada uno de los momentos de inercia del cuerpo rígido:

$$|H| = I\omega$$

$$|H| = \omega \int r^2 dm$$

Ecuación 8-18

$$\begin{aligned} \partial H = & i \left[(y^2 + z^2)\omega_x \quad -xy\omega_y \quad -xz\omega_z \right] dm \\ & + j \left[-xy\omega_x \quad + (x^2 + z^2)\omega_y \quad -yz\omega_z \right] dm \\ & + k \left[-xz\omega_x \quad -yz\omega_y \quad + (x^2 + y^2)\omega_z \right] dm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H = & i \left[\omega_x \int y^2 + z^2 dm \quad - \omega_y \int xy dm \quad - \omega_z \int xz dm \right] \\
& + j \left[-\omega_x \int xy dm \quad + \omega_y \int x^2 + z^2 dm \quad - \omega_z \int yz dm \right] \\
& + k \left[-\omega_x \int xz dm \quad - \omega_y \int yz dm \quad + \omega_z \int x^2 + y^2 dm \right]
\end{aligned}$$

Ecuación 8-19

$$\begin{aligned}
H = & i \left[I_{xx} \omega_x \quad - I_{xy} \omega_y \quad - I_{xz} \omega_z \right] \\
& + j \left[-I_{yx} \omega_x \quad + I_{yy} \omega_y \quad - I_{yz} \omega_z \right] \\
& + k \left[-I_{zx} \omega_x \quad - I_{zy} \omega_y \quad + I_{zz} \omega_z \right]
\end{aligned}$$

Ecuación 8-20

$$I_{xx} = \int y^2 + z^2 dm \quad I_{xy} = \int xy dm$$

$$I_{yy} = \int x^2 + z^2 dm \quad I_{yz} = \int yz dm$$

$$I_{zz} = \int x^2 + y^2 dm \quad I_{zx} = \int xz dm$$

Los momentos de inercia correspondientes a I_{xx} , I_{yy} y I_{zz} son los momentos de inercia del cuerpo que giran en su respectivo eje, mientras que los demás momentos de inercia son los productos de inercia respecto al eje de coordenadas. Estas cantidades nos muestran la manera en la que está distribuida la masa de un cuerpo rígido con respecto al marco de referencia. Todo el análisis realizado anteriormente se aplica únicamente en el caso en el cual el marco de referencia xyz está sujeto al centro de masa del cuerpo rígido y además, que este marco no tiene ninguna velocidad angular con respecto al cuerpo rígido. Si el marco de referencia xyz estuviera rotando con respecto al cuerpo rígido, las integrales de momentos de inercia serían en función del tiempo, lo cual introduciría una complejidad aún mayor en las relaciones de momento angular. Una excepción se da cuando un cuerpo rígido está girando sobre un eje de simetría, en este caso las integrales de inercia no se afectan por la posición del cuerpo sobre su eje de rotación. Además de las componentes del momento angular debidas a la velocidad angular de los ejes de referencia Ω , se añade una componente de momento angular a lo largo del eje de rotación debido a la rotación relativa sobre el eje. De la ecuación 8-13 se forma la matriz de inercia o el tensor de inercia:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

En el caso en el que el marco de referencia xyz coincida con los ejes principales de los momentos de inercia I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} , entonces la ecuación 8-13 para el momento angular en el centro de masa del cuerpo rígido es:

$$H = I\omega$$

$$H = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Ecuación 8-21

$$H = I_{xx}\omega_x i + I_{yy}\omega_y j + I_{zz}\omega_z k$$

Siempre es posible localizar los ejes principales de los momentos de inercia para cualquier cuerpo rígido en el espacio. Únicamente cuando el cuerpo rota en uno de los ejes principales de los momentos de inercia ó cuando $I_{xx}I_{yy}I_{zz}$ están en las mismas direcciones de $\omega_x\omega_y\omega_z$, los vectores H Y ω tienen la misma dirección.

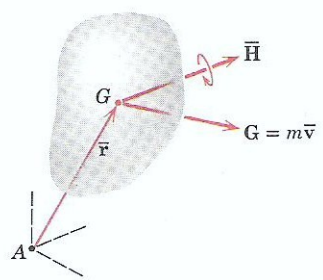


Figura 43. Momento lineal

Las propiedades de momento de un cuerpo rígido pueden ser representadas por el vector resultante de momento lineal $G = mv$, a través del centro de masa y el vector resultante del momento angular H respecto al centro de masa como se muestra en la figura 45, a pesar de que H tenga propiedades de un vector libre lo representamos a través de G por conveniencia. Entonces el momento angular respecto a cualquier punto A el cual no está sujeto al cuerpo rígido equivale al vector libre H adicionando el momento del vector de momento lineal con respecto al punto A .

$$H_A = H + (r \times G) = H + (r \times mv)$$

Ecuación 8-22

8.1.2.2 ENERGÍA CINÉTICA

La energía cinética de cualquier sistema de masas se define como:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Ecuación 8-23

Se puede escribir la velocidad de cualquier partícula que represente el sistema como $v_i = v + \rho'_i$. Donde v es la velocidad del centro de masa G y ρ'_i es la velocidad de m_i con respecto a la translación del marco de referencia en movimiento con el centro de masa G . Con base en la identidad $v_i^2 = v_i \cdot v_i$, se escribe la energía cinética del sistema como:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i (v_i \cdot v_i)$$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i [(v + \rho'_i) \cdot (v + \rho'_i)]$$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v^2 + \sum \frac{1}{2} m_i |\rho'_i|^2 + \sum m_i v \cdot \rho'_i$$

Donde ρ_i es la medida desde el centro de masa, $\sum m_i \rho_i = 0$ y el tercer término es $v \cdot \sum m_i \rho'_i = v \cdot \frac{d}{dt} \sum (m_i \rho_i) = 0$. De igual manera $\sum \frac{1}{2} m_i v^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum m_i = \frac{1}{2} m v^2$. Luego la energía cinética total es:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \sum \frac{1}{2} m_i |\rho'_i|^2$$

Ecuación 8-24

Donde v es la velocidad del centro de masas y ρ_i es el vector posición de un elemento de masa m_i con respecto al centro de masa. Se identifica el primer término de la ecuación como la energía cinética debida a la translación del sistema y el segundo término es la energía cinética asociada al movimiento relativo al centro de masas. Esta ecuación representa el hecho de que la energía cinética total de un sistema de masas es igual a la energía del centro de masa trasladado del sistema en su conjunto más la energía debido al movimiento de todas las partículas relativas al centro de masa. El término que representa la translación se puede describir de una forma alternativa, así:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (r' \cdot r') = \frac{1}{2} v \cdot G$$

Donde r' es la velocidad v del centro de masas y G es el momento lineal del cuerpo. Para un cuerpo rígido el término relativo se convierte en la energía cinética debida a la rotación respecto al centro de masa. Luego, ρ'_i es la velocidad que representa la partícula con respecto al centro de masa, para el cuerpo rígido se puede escribir $\rho'_i = \omega \times \rho_i$, donde ω es la velocidad angular del cuerpo. Con esta sustitución, el término relativo en la expresión de energía cinética se convierte en:

$$\sum \frac{1}{2} m_i |\rho'_i|^2$$

$$\sum \frac{1}{2} m_i |\omega \times \rho_i|^2$$

$$\sum \frac{1}{2} m_i (\omega \times \rho_i) \cdot (\omega \times \rho_i)$$

Si utilizamos el hecho de que el producto punto y el producto cruz se pueden intercambiar en un triple producto vectorial, esto es $P \times Q \cdot R = P \cdot Q \times R$, se puede escribir:

$$\sum \frac{1}{2} m_i (\omega \times \rho_i) \bullet (\omega \times \rho_i)$$

$$\sum \frac{1}{2} m_i \omega \bullet \rho_i \times (\omega \times \rho_i)$$

Luego, ω es el mismo factor en todos los términos de la sumatoria, se puede factorizar para obtener:

$$\frac{1}{2} \sum m_i \omega \bullet \rho_i \times (\omega \times \rho_i)$$

$$\frac{1}{2} \omega \bullet \sum \rho_i \times (\omega \times \rho_i) m_i$$

$$\frac{1}{2} \omega \bullet H$$

Donde H es la misma integral expresada en la ecuación 8-10. Entonces la expresión general para la energía cinética de un cuerpo rígido moviéndose con una velocidad de centro de masa v y una velocidad angular ω es:

$$T = \frac{1}{2} v \bullet G + \frac{1}{2} \omega \bullet H \quad \text{Ecuación 8-25}$$

La expansión de esta ecuación vectorial por sustitución de la expresión para H escrita en la ecuación 8-13 produce:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2) - (I_{xy} \omega_x \omega_y + I_{xz} \omega_x \omega_z + I_{yz} \omega_y \omega_z)$$

Si los ejes coinciden con el eje principal de inercia, la energía cinética es solamente:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2)$$

Cuando un cuerpo rígido es esta fijado a un punto O , o cuando hay un punto O en el cuerpo el cual tiene momentáneamente velocidad cero, la energía cinética es $T = \frac{1}{2} m r_i' \bullet r_i'$. Esta expresión se reduce a:

$$T = \frac{1}{2} \omega \bullet H \quad \text{Ecuación 8-26}$$

Donde H es el momento angular respecto al punto O .

8.1.2.3 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

La descripción de momento angular y de energía cinética para cuerpos rígidos provee una base necesaria para analizar de una manera más profunda las ecuaciones de movimiento.

ECUACIONES DE MOMENTO

De la ecuación 8-15 se tiene que $G = mv$, donde el momento lineal de cualquier sistema de masas con masa constante es el producto de la masa y la velocidad de su centro de masa. La derivada con respecto al tiempo de G es $mv' = ma$. Recordando la segunda ley de Newton $\sum F = ma$, esta es la fuerza externa resultante que actúa en el sistema. Por lo tanto se tiene que:

$$\sum F = G' \quad \text{Ecuación 8-27}$$

Asimismo, de la ecuación 8-8 se tiene que $H = \sum (\rho_i \times m_i \rho_i')$, y se pretende determinar la relación entre los momentos de fuerza externa y el momento angular derivando con respecto al tiempo y encontrando:

$$H' = \sum (\rho_i' \times m_i \rho_i') + \sum (\rho_i \times m_i \rho_i'')$$

La primera sumatoria es cero porque $\rho_i' \times \rho_i' = 0$. Con la ayuda de la ecuación 8-2, que representa el movimiento relativo $a_i = a + \rho_i''$ el segundo término se convierte en:

$$H' = \sum (\rho_i' \times m_i \rho_i') + \sum (\rho_i \times m_i \rho_i'')$$

$$H' = \sum (\rho_i \times m_i (a_i' - a))$$

$$H' = \sum (\rho_i \times F_i) + a \times \sum m_i \rho_i$$

Ecuación 8-28

$$H' = \sum M + 0$$

$$H' = \sum M$$

Entonces se tiene que $\sum M$ es igual a H' . La sumatoria de momentos alrededor del centro de masas es debida únicamente a fuerzas externas, la ecuación 8-21 proporciona una plataforma fuerte a las relaciones generadas en dinámica y forma las bases para muchos de los análisis de los problemas en tres dimensiones. En la ecuación general de momento 8-21 los términos son tomados en un punto fijo O ó respecto al centro de masa G . En la derivación del principio del momento, H' fue tomada con respecto a un sistema coordenado absoluto. Cuando H es expresado en términos de componentes relativos medidos respecto a un sistema de coordenadas en movimientos xyz , donde se tiene una velocidad angular Ω , luego en la ecuación 8-7 la relación de momentos se convierte en:

$$\sum M = \left(\frac{dH}{dt} \right)_{xyz} + \Omega \times H$$

$$\sum M = (iH'_x + jH'_y + kH'_z) + \Omega \times H$$

Los términos en paréntesis representan la parte de H debido al cambio en magnitud de las componentes de H , y el termino con producto cruz representa la parte debida a los cambios en dirección de las componentes de H . Expandiendo el producto cruz y arreglando términos, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum M &= i \left[H'_x - H_y \Omega_z + H_z \Omega_y \right] \\ &+ j \left[H'_y - H_z \Omega_x + H_x \Omega_z \right] \\ &+ k \left[H'_z - H_x \Omega_y + H_y \Omega_x \right] \end{aligned} \quad \text{Ecuación 8-29}$$

Esta ecuación es la forma más general de la ecuación de momento respecto a un punto fijado O ó respecto al centro de masa G . La Ω son las componentes de la velocidad angular de rotación de los ejes de referencia xyz , y las componentes de H en el caso de un cuerpo rígido están definidas en la ecuación 8-13 donde ω son las componentes de la velocidad angular del cuerpo. Ahora se aplica la ecuación 8-22 a un cuerpo rígido, donde los ejes coordenados se atan al cuerpo. Bajo estas condiciones, cuando se expresa en las coordenadas xyz , los momentos y productos de inercia son invariantes en el tiempo, y la $\Omega = \omega$. Entonces para los ejes atados al cuerpo, las tres componentes escalares de la ecuación 8-22 se convierten en:

$$\begin{aligned} \sum M_x &= H'_x - H_y \omega_z + H_z \omega_y \\ \sum M_y &= H'_y - H_z \omega_x + H_x \omega_z \\ \sum M_z &= H'_z - H_x \omega_y + H_y \omega_x \end{aligned} \quad \text{Ecuación 8-30}$$

La ecuación 8-23 son las ecuaciones generales de momento para un cuerpo rígido en movimiento con un marco de referencia atado al cuerpo, y estas se sostienen con respecto al eje a través de un punto fijo O ó a través de el centro de masa G . En general para cualquier origen fijado a un cuerpo rígido, hay tres ejes principales de inercia con respecto al cual los productos de inercia desaparecen. Si los ejes de referencia coinciden con los ejes principales de inercia con origen en el centro de masa G ó en el punto O fijado al cuerpo y fijado en el espacio, los factores $I_{xy} I_{yz} I_{xz}$ se anulan y la ecuación 8-23 se convierte en:

$$\begin{aligned} \sum M_x &= I_{xx} \omega'_x - (I_{yy} - I_{zz}) \omega_y \omega_z \\ \sum M_y &= I_{yy} \omega'_y - (I_{zz} - I_{xx}) \omega_z \omega_x \\ \sum M_z &= I_{zz} \omega'_z - (I_{xx} - I_{yy}) \omega_x \omega_y \end{aligned} \quad \text{Ecuación 8-31}$$

Estas ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de Euler, y son las más utilizadas de las ecuaciones de movimiento en cuanto a dinámica en las tres dimensiones.

ECUACIONES DE ENERGÍA

La resultante de todas las fuerzas externas que actúan en un cuerpo rígido puede ser reemplazada por la fuerza resultante $\sum F$ actuando a través del centro de masa y una pareja resultante $\sum M$ actuando respecto al centro de masa. El trabajo es realizado por la fuerza resultante y la pareja resultante en las respectivas tasas $\sum F \cdot v$ y $\sum M \cdot \omega$ donde v es la velocidad lineal del centro de masa y ω es la velocidad angular del cuerpo. Al integrar con respecto al tiempo se obtiene el trabajo total realizado durante un intervalo de tiempo. Las ecuaciones del trabajo realizado a los cambios en la energía cinética son expresadas en la ecuación 8-19 dando como resultado:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum F \cdot v dt = \frac{1}{2} v \cdot G \Big|_1^2$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M \cdot \omega dt = \frac{1}{2} \omega \cdot H \Big|_1^2$$

Estas expresiones muestran el cambio en la energía cinética translacional y el cambio en la energía cinética rotacional, para intervalos en los cuales $\sum F$ ó $\sum M$ actúan y la suma de las dos ecuaciones es igual a ΔT . La relación trabajo energía para un sistema general de partículas es dado por:

$$U = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g \quad \text{Ecuación 8-32}$$

La ecuación es igualmente aplicable a un cuerpo rígido en movimiento en tres dimensiones. El trabajo realizado U por todas las fuerzas externas en un intervalo de tiempo hacia el cuerpo o hacia el sistema es abarcado en la suma de los cambios correspondientes en la energía cinética ΔT , energía potencial elástica ΔV_e y energía potencial gravitacional ΔV_g .

8.2 ANALISIS DE CINEMATICA MEDIANTE ANGULOS DE EULER

8.2.1 MATRIZ SKEW

8.2.1.1 INTRODUCCIÓN

Al introducir la notación de la matriz anti simétrica skew, se simplifican los cálculos involucrados. Una matriz de $n \times n$ denotada como S , es anti simétrica (skew) si y solo si:

$$S^T + S = 0 \quad \text{Ecuación 8-33}$$

Se denotan el conjunto de todas las matrices anti simétricas skew de 3×3 como $so(3)$. Si $S \in so(3)$ entonces tiene las componentes s_{ij} , con $i, j = 1, 2, 3$; luego la ecuación 8-26 es equivalente a las nueve ecuaciones:

$$S_{ij} + S_{ji} = 0 \text{ Donde } i, j = 1, 2, 3 \quad \text{Ecuación 8-34}$$

De la ecuación 8-27 se observa que $S_{ii} = 0$; esto significa que los términos de la diagonal de la matriz S son cero y los términos que no pertenecen a la diagonal S_{ij} , $i \neq j$ satisfacen que $s_{ij} = -s_{ji}$. Luego S contiene solo 3 entradas independientes y cada matriz anti simétrica skew de 3×3 es de la forma:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 8-35}$$

Si es un vector de la forma $a = (a_x, a_y, a_z)^T$, se define la matriz anti simétrica skew $S(a)$ como:

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

Denotamos como i, j, k los tres vectores unitarios, base en los vectores coordenados:

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices simétricas skew $S(i)$, $S(j)$ y $S(k)$ están dadas por:

$$S(i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S(j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S(k) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.2.1.2 PROPIEDADES DE LA MATRIZ SIMÉTRICA SKEW

Las matrices anti simétricas skew poseen varias propiedades que son de utilidad para derivaciones posteriores. Entre estas propiedades tenemos:

a) El operador S cumple la propiedad de linealidad:

$$S(\alpha \cdot a + \beta \cdot b) = \alpha \cdot S(a) + \beta \cdot S(b) \quad \text{Ecuación 8-36}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^3 \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\forall a, p \in \mathbb{R}^3 \text{ se cumple}$$

$$S(a)p = a \times p \quad \text{Ecuación 8-37}$$

Donde $a \times p$ es el vector producto cruz.

Si $R \in so(3)$ y $a, b \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$R(a \times b) = Ra \times Rb \quad \text{Ecuación 8-38}$$

La ecuación 8-31 no es una forma general a menos de que R sea ortogonal. Esta ecuación dice que si primero se realiza el producto cruz de los vectores a , b y luego se aplica la transformación de rotación R al resultado, es equivalente a aplicar la transformación de rotación R a cada uno de los vectores por separado y luego realizar la operación producto cruz entre ellos.

b) Para $R \in so(3)$ y $a \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$RS(a)R^T = S(Ra) \quad \text{Ecuación 8-39}$$

Esta propiedad resulta de la combinación de las propiedades 8-30 y 8-31. Así:

$$\begin{aligned}
RS(a)R^T b &= R(a \times R^T b) \\
&= Ra \times RR^T b \\
&= Ra \times b \\
&= S(Ra)b
\end{aligned}$$

Esta ecuación representa una transformación de semejanza de la matriz $S(a)$.

8.2.2 DERIVADA DE UNA MATRIZ DE ROTACIÓN EN TÉRMINOS DE LA MATRIZ SKEW

Teniendo la matriz R como una función de rotación en términos de la variable θ , entonces se escribe que $R = R(\theta) \in so(3)$ para todo θ . Desde que R sea ortogonal para todo θ se puede decir que:

$$R(\theta)R(\theta)^T = I \quad \text{Ecuación 8-40}$$

Diferenciando a ambos lados de la ecuación 8-33 y utilizando la regla del producto con respecto a la variable θ se tiene que:

$$\begin{aligned}
R(\theta)'R(\theta)^T + R(\theta)(R(\theta)^T)' &= 0 \\
\frac{dR(\theta)}{d\theta}R(\theta)^T + R(\theta)\frac{dR(\theta)^T}{d\theta} &= 0
\end{aligned} \quad \text{Ecuación 8-41}$$

Luego se define la matriz S como:

$$S := \frac{dR(\theta)}{d\theta}R(\theta)^T \quad \text{Ecuación 8-42}$$

La transpuesta de la ecuación anterior es:

$$\begin{aligned}
S^T &= \left(\frac{dR(\theta)}{d\theta}R(\theta)^T \right)^T \\
S^T &= \frac{dR(\theta)^T}{d\theta}R(\theta)
\end{aligned} \quad \text{Ecuación 8-43}$$

Reemplazando las ecuaciones 8-35 y 8-36 en la ecuación 8-34 se llega de nuevo a la ecuación 8-26 $S + S^T = 0$. De esto se tiene entonces que la matriz S definida en la ecuación 8-35 es una matriz anti simétrica skew. Ahora bien, de la ecuación 8-35 se extrae la derivada de una matriz de rotación con respecto a la variable θ , teniendo en cuenta que $R(\theta)^T R(\theta) = I$:

$$\begin{aligned}
S &:= \frac{dR(\theta)}{d\theta}R(\theta)^T \\
\frac{dR(\theta)}{d\theta} &= SR(\theta)
\end{aligned} \quad \text{Ecuación 8-44}$$

La derivada de una matriz de rotación con respecto a su ángulo de giro equivale a la multiplicación entre la matriz anti simétrica skew y la matriz de rotación. Para las matrices de rotación básicas se determina su respectiva matriz anti simétrica skew así:

Cuando la matriz de rotación gira únicamente en el eje x , entonces $R = R_{x,\theta}$:

$$S_{x,\theta} = \frac{dR_{x,\theta}}{d\theta} (R_{x,\theta})^T$$

$$S_{x,\theta} = \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix}^T$$

$$S_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s\theta & -c\theta \\ 0 & c\theta & -s\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & s\theta \\ 0 & -s\theta & c\theta \end{bmatrix}$$

$$S_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = S(i)$$

Ecuación 8-45

Cuando la matriz de rotación gira únicamente en el eje y , entonces $R = R_{y,\theta}$:

$$S_{y,\theta} = \frac{dR_{y,\theta}}{d\theta} (R_{y,\theta})^T$$

$$S_{y,\theta} = \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}^T$$

$$S_{y,\theta} = \begin{bmatrix} -s\theta & 0 & c\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ -c\theta & 0 & -s\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}$$

$$S_{y,\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S(j)$$

Ecuación 8-46

Cuando la matriz de rotación gira únicamente en el eje z , entonces $R = R_{z,\theta}$:

$$S_{z,\theta} = \frac{dR_{z,\theta}}{d\theta} (R_{z,\theta})^T$$

$$S_{z,\theta} = \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$S_{z,\theta} = \begin{bmatrix} -s\theta & -c\theta & 0 \\ c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta & s\theta & 0 \\ -s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{z,\theta} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S(k)$$

Ecuación 8-47

De lo anterior se pueden concluir las derivadas de las matrices de rotación básicas:

$$\frac{dR_{x,\theta}}{d\theta} = S(i)R_{x,\theta}$$

$$\frac{dR_{y,\theta}}{d\theta} = S(j)R_{y,\theta}$$

$$\frac{dR_{z,\theta}}{d\theta} = S(k)R_{z,\theta}$$

Ecuación 8-48

8.2.3 VELOCIDAD ANGULAR EN TERMINOS DE LA MATRIZ SKEW

8.2.3.1 INTRODUCCIÓN

Se asume a partir de este momento que las matrices de rotación ya no son funciones con respecto a la variable θ sino que van a ser funciones de la variable del tiempo. Así que $R = R(t) \in SO(3) \forall t \in \mathbb{R}$. Se considera también que las funciones de rotación con respecto a la variable t son funciones continuas diferenciables en cualquier punto. Por lo tanto se introduce de la ecuación 8-37 el concepto de la derivada de una matriz de rotación con respecto al tiempo:

$$\frac{dR(t)}{dt} = S(t)R(t)$$

$$R(t)' = S(t)R(t)$$

Ecuación 8-49

Como ya se había mostrado anteriormente, $S(t)$ es la matriz anti simétrica skew pero en la variable del tiempo. La ecuación (3) muestra la matriz anti simétrica skew de 3×3 términos, donde al reemplazar las expresiones s_1, s_2, s_3 por las coordenadas del vector $\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ se tiene la matriz anti simétrica del vector velocidad angular:

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 8-50}$$

Y por lo tanto la ecuación 8-42 aplicada a la velocidad angular es:

$$R(t)' = S(\omega(t))R(t) \quad \text{Ecuación 8-51}$$

La ecuación 8-44 representa la relación entre la velocidad angular y la derivada de la matriz de rotación en el tiempo. Si la orientación instantánea de un marco $o_1x_1y_1z_1$ con respecto a un marco $o_0x_0y_0z_0$ viene dado por R_1^0 , entonces la velocidad angular del marco $o_1x_1y_1z_1$ está directamente relacionada con la derivada de R_1^0 por la ecuación 8-44. Si ω cumple la condición de ser un vector libre, se puede expresar esta velocidad angular con respecto a cualquier sistema de coordenadas.

8.2.3.2 SUMA DE VELOCIDADES ANGULARES EN TÉRMINOS DE LA MATRIZ SKEW

El propósito es encontrar la velocidad angular resultante generada por la rotación relativa de marcos de referencia. Ahora se obtienen las expresiones para composición de velocidades angulares en dos marcos de referencia móviles $o_1x_1y_1z_1$ y $o_2x_2y_2z_2$ referenciando a un marco fijado en $o_0x_0y_0z_0$. Por ahora, se supone que los tres marcos comparten un mismo origen. Las orientaciones de los marcos $o_1x_1y_1z_1$ y $o_2x_2y_2z_2$ están dadas por las matrices de rotación $R_1^0(t)$ y $R_2^1(t)$ (ambas variando en el tiempo):

$$R_2^0(t) = R_1^0(t)R_2^1(t) \quad \text{Ecuación 8-52}$$

Tomando las derivadas en ambos lados de la ecuación 8-45 con respecto al tiempo se tiene:

$$\dot{R}_2^0(t) = \dot{R}_1^0(t)R_2^1(t) + R_1^0(t)\dot{R}_2^1(t) \quad \text{Ecuación 8-53}$$

El término $\dot{R}_1^0(t)R_2^1(t)$ al lado izquierdo de la ecuación 8-46 se puede escribir en términos de la ecuación 8-44 así:

$$\dot{R}_2^0(t) = S(\omega_{0,2}^0)R_2^0(t) \quad \text{Ecuación 8-54}$$

En donde $\omega_{0,2}^0$ es la velocidad angular total experimentada por el marco $o_2x_2y_2z_2$ referida al marco inercial $o_0x_0y_0z_0$. Esta velocidad angular resulta de las matrices de rotación R_1^0 y R_2^1 . Ahora el primer término al lado derecho de la ecuación 8-46 es simplemente:

$$\dot{R}_1^0(t)R_2^1(t) = S(\omega_{0,1}^0)R_1^0R_2^1 = S(\omega_{0,1}^0)R_2^0 \quad \text{Ecuación 8-55}$$

Donde $\omega_{0,1}^0$ es la velocidad angular del marco $o_1x_1y_1z_1$ que corresponde a la matriz R_1^0 , expresado respecto al sistema coordinado $o_0x_0y_0z_0$. El término $\dot{R}_1^0(t)R_2^1(t)$ de la ecuación 8-46 se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
R_1^0(t) \dot{R}_2^1(t) &= R_1^0 S(\omega_{1,2}^1) R_2^1 \\
R_1^0(t) \dot{R}_2^1(t) &= R_1^0 S(\omega_{1,2}^1) (R_1^0)^T R_1^0 R_2^1 \\
R_1^0(t) \dot{R}_2^1(t) &= S(R_1^0 \omega_{1,2}^1) R_2^1
\end{aligned}$$

Ecuación 8-56

Donde $\omega_{1,2}^1$ es la velocidad angular del marco de referencia $o_2x_2y_2z_2$ producida por la matriz de rotación R_2^1 con respecto al sistema de referencia $o_1x_1y_1z_1$. El producto $R_1^0 \omega_{1,2}^1$, es la velocidad angular con respecto al sistema coordenado $o_0x_0y_0z_0$, es decir, $R_1^0 \omega_{1,2}^1$ entrega las coordenadas del vector libre $\omega_{1,2}^1$, con respecto al marco inercial $o_0x_0y_0z_0$. Teniendo en cuenta todas las expresiones anteriores la expresión 8-47 se puede escribir como:

$$S(\omega_2^0) R_2^0 = \{S(\omega_{0,1}^0) + S(R_1^0 \omega_{1,2}^1)\} R_2^0$$

Ecuación 8-57

De la primera propiedad de la matriz anti simétrica, de la ecuación se ve que $S(a) + S(b) = S(a + b)$, por lo tanto:

$$\omega_2^0 = \omega_{0,1}^0 + R_1^0 \omega_{1,2}^1$$

Ecuación 8-58

En otras palabras, las velocidades angulares pueden ser sumadas una vez que sean expresadas con respecto a un mismo marco coordenado, en este caso $o_0x_0y_0z_0$. Lo anterior se puede generalizar y extender a cualquier número de sistemas coordenados. En general, suponemos que:

$$R_n^0 = R_1^0 R_2^1 \dots R_n^{n-1}$$

Ecuación 8-59

Se denota como ω_i^{i-1} la velocidad angular producida por la rotación de R_i^{i-1} , expresado respecto a un marco $o_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$. Al extender este concepto tenemos:

$$\dot{R}_n^0 = S(\omega_{0,n}^0) R_n^0$$

Ecuación 8-60

Donde,

$$\begin{aligned}
\omega_{0,n}^0 &= \omega_{0,1}^0 + R_1^0 \omega_{1,2}^1 + R_2^0 \omega_{2,3}^2 + R_3^0 \omega_{3,4}^3 + \dots + R_{n-1}^0 \omega_{n-1,n}^{n-1} \\
\omega_{0,n}^0 &= \omega_{0,1}^0 + \omega_{1,2}^0 + \omega_{2,3}^0 + \omega_{3,4}^0 + \dots + \omega_{n-1,n}^0
\end{aligned}$$

Ecuación 8-61

8.2.4 VELOCIDAD LINEAL DE UN PUNTO ATADO A UN MARCO DE REFERENCIA EN MOVIMIENTO

Se supone un punto p rígidamente atado a un marco de referencia $o_1x_1y_1z_1$ con movimiento, donde el marco $o_1x_1y_1z_1$ esta rotando relativamente respecto al marco coordenado $o_0x_0y_0z_0$. Así, las coordenadas del punto p con respecto al marco inercial $o_0x_0y_0z_0$ están dadas como:

$$p^0 = R_1^0(t) p^1$$

Ecuación 8-62

La velocidad del punto p está dada como \dot{p}^0 , la cual se extrae al derivar la expresión 8-55 con la propiedad de la derivada de un producto, así:

$$\dot{p}^0 = \dot{R}_1^0(t)p^1 + R_1^0(t)\dot{p}^1$$

$$\dot{p}^0 = \dot{R}_1^0(t)p^1$$

$$\dot{p}^0 = S(\omega^0)R_1^0(t)p^1$$

Ecuación 8-63

$$\dot{p}^0 = S(\omega^0)p^0$$

$$\dot{p}^0 = \omega^0 \times p^0$$

La cual es la expresión de la velocidad lineal de un punto que gira con una velocidad angular ω^0 con su respectivo vector de direccionamiento p^0 respecto al marco de referencia inercial. El término \dot{p}^1 de la ecuación 8-56 se hace cero porque el vector posición no varía con respecto al tiempo. Para llevar a una expresión más general el movimiento del marco $o_1x_1y_1z_1$ respecto al marco inercial $o_0x_0y_0z_0$, se utiliza el concepto de matriz de transformación homogénea, la cual incluye el movimiento de rotación y de translación así:

$$H_1^0(t) = \begin{bmatrix} R_1^0(t) & T_1^0(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 8-64

La expresión anterior es la matriz de transformación homogénea, la cual es dependiente de la variable del tiempo. El punto p^0 el cual está atado al marco de referencia $o_1x_1y_1z_1$ se puede escribir como una suma vectorial de la translación entre los sistemas coordenados y el vector de posición p^1 incluyendo su respectivo movimiento de rotación respecto al marco $o_1x_1y_1z_1$:

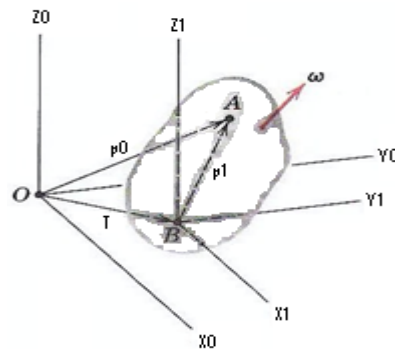


Figura 44. Velocidad lineal de un punto atado a un marco de referencia en movimiento

$$p^0 = R_1^0 p^1 + T_1^0$$

Ecuación 8-65

Al derivar la ecuación 8-58 con respecto al tiempo, se tiene que:

$$\dot{p}^0 = \dot{R}_1^0(t)p^1 + \dot{T}_1^0$$

$$\dot{p}^0 = S(\omega^0)R_1^0(t)p^1 + \dot{T}_1^0$$

$$\dot{p}^0 = S(\omega^0)p^0 + \dot{T}_1^0$$

$$\dot{p}^0 = \omega^0 \times p^0 + \dot{T}_1^0$$

Ecuación 8-66

Donde $p^0 = R_1^0(t)p^1$ es el vector desde el origen del marco $o_1x_1y_1z_1$ hasta p^1 pero expresado en la orientación del marco $o_0x_0y_0z_0$, como se expresa en la ecuación 8-58. Mientras que \dot{T}_1^0 es la tasa a la cual el origen del marco $o_1x_1y_1z_1$ se mueve con respecto al marco inercial.

8.2.5 EL JACOBIANO GEOMÉTRICO

8.2.5.1 INTRODUCCIÓN

Considere n enlaces con un conjunto de variables q_1, q_2, \dots, q_n . Así:

$$T_n^0(q) = \begin{bmatrix} R_n^0(q) & o_n^0(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 8-67

La ecuación 8-60 muestra la transformación desde el final del marco efector al marco base. Donde $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ es el vector del conjunto de variables. A medida que el robot se mueve, tanto el conjunto de variables q_i como el efector de posición final o_n^0 y la orientación R_n^0 serán funciones del tiempo. El objetivo es relacionar la velocidad lineal y angular del efector final, con el vector conjunto de velocidades $\dot{q}(t)$, de un análisis anteriormente establecido se tiene que:

$$S(\omega_n^0) = \dot{R}_n^0(R_n^0)^T$$

Ecuación 8-68

Donde se define el vector velocidad angular ω_n^0 del efector final con referencial al marco mundo; teniendo como base que la posición del efector final es $o_n^0(q)$, se tiene la velocidad lineal del efector final vista en el marco inercial como:

$$v_n^0 = \dot{o}_n^0$$

Ecuación 8-69

Se quiere encontrar una relación entre las velocidades angulares y lineales y el conjunto de velocidades $\dot{q}(t)$:

$$v_n^0 = J_v \dot{q}$$

Ecuación 8-70

$$\omega_n^0 = J_\omega \dot{q}$$

Ecuación 8-71

Donde J_v y J_ω son matrices de $3 \times n$. Se pueden escribir las ecuaciones 8-63 y 8-64 juntas de la siguiente manera:

$$\dot{\xi} = J \dot{q} \quad \text{Ecuación 8-72}$$

En donde ξ y J vienen dados por:

$$\xi = \begin{bmatrix} v_n^0 \\ \omega_n^0 \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 8-73}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix}$$

El vector ξ se conoce como vector velocidad de cuerpo, este vector velocidad no es la derivada de la variable posición. El vector velocidad angular y el vector velocidad lineal no son la derivada de ninguna cantidad en particular variante con el tiempo. La matriz J se conoce como el manipulador del Jacobiano o Jacobiano. El Jacobiano J es una matriz de $6 \times n$ donde n es el número de enlaces.

La ecuación 8-60 es la matriz transformación homogénea que involucra tanto el movimiento de rotación como el de translación, se puede escribir T_n^0 como el producto entre tres matrices de transformaciones homogéneas de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} R_n^0 & o_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T_n^0$$

$$\begin{bmatrix} R_n^0 & o_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T_{i-1}^0 \cdot T_i^{i-1} \cdot T_n^i$$

$$\begin{bmatrix} R_n^0 & o_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{i-1}^0 & o_{i-1}^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i^{i-1} & o_i^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_n^i & o_n^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_n^0 & o_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n^0 & R_i^0 o_n^i + R_{i-1}^0 o_i^{i-1} + o_{i-1}^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 8-74}$$

De lo anterior se puede concluir que la translación o_n^0 de la matriz de transformación es:

$$o_n^0 = R_i^0 o_n^i + R_{i-1}^0 o_i^{i-1} + o_{i-1}^0 \quad \text{Ecuación 8-75}$$

8.2.5.2 OPERADOR JACOBIANO DE VELOCIDAD ANGULAR

De la ecuación 8-54 se tiene que las velocidades angulares pueden ser sumadas como vectores libres, siempre que sean expresadas respecto a un marco común de coordenadas. En consecuencia se puede determinar la velocidad angular del efector final con respecto a la base, expresando la velocidad angular generada por cada junta en la orientación del marco inercial para luego sumarlas.

Si la unión i -ésima presenta un movimiento de rotación, entonces la junta con la i -ésima variable q_i equivalente a θ_i rota en el eje z_{i-1} . La velocidad angular del enlace i dada por ω_i^{i-1} es producida por la rotación de la unión i expresada respecto al marco inmediatamente anterior $o_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$. Esta velocidad angular se expresa en el marco $i-1$ de la siguiente manera:

$$\omega_i^{i-1} = \dot{q}_i z_{i-1} = \dot{q}_i k$$

En donde k es el vector unitario dado por $(0,0,1)^T$ ya que representa únicamente el eje de rotación z . Si la junta i -ésima es prismática, el movimiento del marco i respecto a un marco $i-1$ es una translación:

$$\omega_i^{i-1} = 0$$

Si el punto i es primático, la velocidad angular del efector final no depende de q_i , el cual ahora es equivalente a d_i . La velocidad angular total del efector final ω_n^0 vista en el marco base es determinada por la ecuación 8-54 así:

$$\omega_n^0 = \rho_1 \dot{q}_1 k + \rho_2 \dot{q}_2 R_1^0 k + \dots + \rho_n \dot{q}_n R_{n-1}^0 k = \sum_{i=1}^n \rho_i \dot{q}_i z_{i-1}^0$$

En donde ρ_i es igual a 1 si la junta i rota y 0 si la junta i tiene movimiento de translación, entonces:

$$z_{i-1}^0 = R_{i-1}^0 k$$

Teniendo en cuenta que $z_0^0 = k = (0,0,1)^T$. Tomando la parte baja del Jacobiano J_ω , en la ecuación 8-66, se tiene como resultado:

$$J_\omega = [\rho_1 z_0^0, \dots, \rho_n z_{n-1}^0]$$

En esta ecuación se omiten los superíndices para los vectores unitarios a lo largo del eje z , esto debido a que todos están referenciados al marco inercial.

8.2.5.3 OPERADOR JACOBIANO DE VELOCIDAD LINEAL

La velocidad lineal del efector final es la derivada de la posición del efector final respecto al marco mundo, es decir \dot{o}_n^0 . La cual se establecerá en cada uno de los dos casos:

$$\dot{o}_n^0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial o_n^0}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Por lo tanto la columna i -ésima de J_v esta dada por:

$$J_{vi} = \frac{\partial o_n^0}{\partial q_i}$$

Esta expresión es el operador Jacobiano de la velocidad lineal del efector final donde la columna i del Jacobiano se genera por todas las juntas fijas excepto la i -ésima, la cual actúa como el vector velocidad.

Caso 1: Translación ó prismática

Si la unión i es prismática, el efector i posee un movimiento de translación pura únicamente. Tomando la ecuación 6-86 y adecuándola al caso prismático, se tiene que la única junta con movimiento translacional cuando $q_i = d_i$ es la i , entonces tanto o_n^i como o_{i-1}^0 son constantes en términos de la variable d . Como el punto i presenta únicamente movimiento de translación, entonces las matrices de rotación R_{i-1}^0 y R_i^0 son constantes también. Y teniendo como base la convención de Denavit-Hartenberg para la cinemática directa $o_i^{i-1} = (a_i c_i, a_i s_i, d_i)^T$. La diferenciación de o_n^0 da como resultado:

$$\frac{\partial o_n^0}{\partial d_i} = R_{i-1}^0 \frac{\partial}{\partial d_i} o_i^{i-i}$$

$$\frac{\partial o_n^0}{\partial d_i} = R_{i-1}^0 \frac{\partial}{\partial d_i} \begin{bmatrix} a_i c_i \\ a_i s_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial o_n^0}{\partial d_i} = \dot{d}_i R_{i-1}^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial o_n^0}{\partial d_i} = \dot{d}_i z_{i-1}^0$$

En donde d_i es la junta variable prismática i . Por lo tanto, comparando este resultado con las ecuaciones 8-65 y 8-66, para el caso de uniones de tipo translación:

$$J_{vi} = z_{i-1}^0$$

Ecuación 8-76

Caso 2: Rotación (Revolute)

Si el punto de unión i es el único punto con movimiento de rotación. Y teniendo en cuenta para este caso en la ecuación 8-65 que la variable q depende del ángulo de giro $q_i = \theta_i$, se tiene que R_i^0 no es constante respecto a θ_i , ya que el ángulo de giro recae directamente sobre esta. Mientras que la rotación de la junta i produce que la translación de o_i^{i-1} sea dependiente de la variable θ . Por lo tanto se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} o_n^0 = \frac{\partial}{\partial \theta_i} [R_i^0 o_n^i + R_{i-1}^0 o_i^{i-1}]$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} o_n^0 = o_n^i \frac{\partial}{\partial \theta_i} R_i^0 + R_{i-1}^0 \frac{\partial}{\partial \theta_i} o_i^{i-1}$$

Ecuación 8-77

El primer término corresponde a la derivada de una matriz de rotación, mientras que el segundo término de la ecuación 8-68 es:

$$R_{i-1}^0 \frac{\partial}{\partial \theta_i} \begin{bmatrix} a_i c_i \\ a_i s_i \\ d_i \end{bmatrix} = R_{i-1}^0 \begin{bmatrix} -a_i s_i \\ a_i c_i \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_i$$

$$R_{i-1}^0 \frac{\partial}{\partial \theta_i} \begin{bmatrix} a_i c_i \\ a_i s_i \\ d_i \end{bmatrix} = R_{i-1}^0 S(k \dot{\theta}_i) o_i^{i-1}$$

$$R_{i-1}^0 \frac{\partial}{\partial \theta_i} \begin{bmatrix} a_i c_i \\ a_i s_i \\ d_i \end{bmatrix} = R_{i-1}^0 S(k \dot{\theta}_i) (R_{i-1}^0)^T R_{i-1}^0 o_i^{i-1}$$

$$R_{i-1}^0 \frac{\partial}{\partial \theta_i} \begin{bmatrix} a_i c_i \\ a_i s_i \\ d_i \end{bmatrix} = S(R_{i-1}^0 k \dot{\theta}_i) R_{i-1}^0 o_i^{i-1}$$

$$R_{i-1}^0 \frac{\partial}{\partial \theta_i} \begin{bmatrix} a_i c_i \\ a_i s_i \\ d_i \end{bmatrix} = \dot{\theta}_i S(z_{i-1}^0) R_{i-1}^0 o_i^{i-1}$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación 8-68, se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} o_n^0 = \dot{\theta}_i S(z_{i-1}^0) R_i^0 o_n^i + \dot{\theta}_i S(z_{i-1}^0) R_{i-1}^0 o_i^{i-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} o_n^0 = \dot{\theta}_i S(z_{i-1}^0) [R_i^0 o_n^i + R_{i-1}^0 o_i^{i-1}]$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} o_n^0 = \dot{\theta}_i S(z_{i-1}^0) (o_n^0 - o_{i-1}^0)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} o_n^0 = \dot{\theta}_i z_{i-1}^0 \times (o_n^0 - o_{i-1}^0)$$

Ecuación 8-78

De la ecuación 8-68 se tiene un cálculo directo, al comparar el resultado anterior con las ecuaciones 8-64 y 8-65 entonces para el movimiento en un punto de rotación se tiene:

$$J_{vi} = z_{i-1} \times (o_n - o_{i-1})$$

Ecuación 8-79

8.2.5.4 COMBINACIÓN DE LOS JACOBIANOS ANGULARES Y LINEALES

Como se vio anteriormente, el operador Jacobiano de velocidad lineal denotado como J_v es:

$$J_v = [J_{v1}, \dots, J_{vn}]$$

Ecuación 8-80

Donde la columna i-ésima J_{vi} está dada por:

$$J_{vi} = \begin{cases} z_{i-1} \times (o_n - o_{i-1}) & \text{juntura i en rotación} \\ z_{i-1} & \text{juntura i en translación} \end{cases}$$

Ecuación 8-81

El operador Jacobiano de velocidad angular J_w es:

$$J_{\omega} = [J_{\omega 1}, \dots, J_{\omega n}]$$

Donde la columna i-ésima $J_{\omega i}$ está dada por:

$$J_{\omega i} = \begin{cases} z_{i-1} & \text{juntura i en rotación} \\ 0 & \text{juntura i en translación} \end{cases} \quad \text{Ecuación 8-82}$$

Al unir estos dos conceptos en la ecuación 8-56, se tiene el Jacobiano para un manipulador de n-junturas:

$$J = [J_1, J_2, \dots, J_n]$$

Si la junta es de rotación, se ubica arriba el aporte de la velocidad lineal y debajo el aporte de la velocidad angular. La columna i-ésima está dada por:

$$J_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (o_n - o_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 8-83}$$

Si la junta es de translación, la columna i-ésima está dada por:

$$J_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 8-84}$$

Las ecuaciones anteriores determinan el Jacobiano para cualquier manipulador simple desde que todas las cantidades necesarias sean validas una vez la cinemática funciona. En efecto, las únicas cantidades necesarias para calcular el Jacobiano son los vectores unitarios z_i y las coordenadas de los orígenes o_1, \dots, o_n . Hay que tener en cuenta que las coordenadas para z_i respecto al marco base están dadas por los primeros tres elementos en la tercera columna de T_i^0 mientras que o_i está dado por los primeros tres elementos de la cuarta columna de T_i^0 . Por lo tanto, únicamente se necesitan las columnas 3 y 4 de las matrices para evaluar el Jacobiano acorde a las anteriores ecuaciones. El procedimiento anterior funciona no solo para calcular la velocidad del efector final sino también para calcular la velocidad de cualquier punto del manipulador. Esto es importante para calcular la velocidad del centro de masas de diferentes enlaces para reproducir las ecuaciones dinámicas de movimiento.

8.2.6 EL JACOBIANO ANALÍTICO

El Jacobiano analítico denotado como $J_a(q)$, se basa en una representación mínima para la orientación del efector final.

$$X = \begin{bmatrix} d(q) \\ \alpha(q) \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 8-85}$$

La ecuación (62) denota la posición del efector final. Donde $d(q)$ es el vector desde el marco inercial hasta el marco del efector final. Y $\alpha(q)$ denota la mínima representación de orientación del efector final respecto al marco inercial. Siguiendo con la notación en ángulos de Euler, se tiene que $\alpha = [\phi, \theta, \psi]^T$, lo que se busca es una expresión similar a la que se vio en la ecuación 8-55 para definir el Jacobiano analítico:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = J_a(q) \cdot \dot{q} \quad \text{Ecuación 8-86}$$

La notación usada hasta el momento utiliza los ángulos de Euler con la secuencia de transformación

$R_{321} = R_{x,\phi} R_{y,\theta} R_{z,\psi}$, y utilizando la ecuación $\dot{R} = S(\omega)R$, entonces:

$$R_{321} = R_{x,\phi} R_{y,\theta} R_{z,\psi}$$

$$R_{321} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 8-87}$$

$$R_{321} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\theta s\phi c\psi - c\phi s\psi & s\theta s\phi s\psi + c\phi c\psi & c\theta s\phi \\ s\theta c\phi c\psi + s\phi s\psi & s\theta c\phi s\psi - s\phi c\psi & c\theta c\phi \end{bmatrix}$$

El vector velocidad angular debe sus componentes a las matrices de rotación, y se puede escribir como se vio en la ecuación (29):

$$\omega_3^0 = \omega_1^0 + \omega_2^1 + \omega_3^2 = \dot{\phi} \mathbf{a}_1 + \dot{\theta} \mathbf{a}'_2 + \dot{\psi} \mathbf{a}''_3 \quad \text{Ecuación 8-88}$$

Lo que se desea es expresar la velocidad angular en términos de las coordenadas del marco de referencia transformado, de la ecuación (64) se tiene que:

$$\mathbf{a}_1 = c\theta c\phi \cdot \mathbf{i} + c\theta s\phi \cdot \mathbf{j} - s\theta \cdot \mathbf{k} \quad \text{Ecuación 8-89}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad angular depende de las sucesivas multiplicaciones de las matrices de rotación, entonces el segundo vector de la ecuación (65) \mathbf{a}'_2 depende directamente de la rotación del marco de referencia \mathbf{a}_1 así:

$$\mathbf{a}'_2 = \frac{d}{d\phi} \mathbf{a}_1 = -s\phi \cdot \mathbf{i} + c\phi \cdot \mathbf{j} \quad \text{Ecuación 8-90}$$

$$\mathbf{a}''_3 = \mathbf{k}$$

Reemplazando las ecuaciones (66) y (67) en la ecuación (65), se tiene:

$$\omega_3^0 = \dot{\phi} (c\theta c\phi \cdot \mathbf{i} + c\theta s\phi \cdot \mathbf{j} - s\theta \cdot \mathbf{k}) + \dot{\theta} (-s\phi \cdot \mathbf{i} + c\phi \cdot \mathbf{j}) + \dot{\psi} \cdot \mathbf{k}$$

$$\omega_3^0 = \dot{\phi} \cdot c\theta c\phi \cdot \mathbf{i} + \dot{\phi} \cdot c\theta s\phi \cdot \mathbf{j} - \dot{\phi} \cdot s\theta \cdot \mathbf{k} - \dot{\theta} \cdot s\phi \cdot \mathbf{i} + \dot{\theta} \cdot c\phi \cdot \mathbf{j} + \dot{\psi} \cdot \mathbf{k} \quad \text{Ecuación 8-91}$$

$$\omega_3^0 = \left(\dot{\phi} \cdot c\theta c\phi - \dot{\theta} \cdot s\phi \right) \cdot \mathbf{i} + \left(\dot{\phi} \cdot c\theta s\phi + \dot{\theta} \cdot c\phi \right) \cdot \mathbf{j} + \left(\dot{\psi} - \dot{\phi} \cdot s\theta \right) \cdot \mathbf{k}$$

La ecuación anterior es equivalente a $\omega = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$, donde las velocidades angulares ω_z , ω_y y ω_x son llamadas comúnmente como roll, pitch y yaw respectivamente. Estos ángulos se pueden relacionar al cabeceo, la orientación e inclinación del cuerpo rígido. De la ecuación (68) se deduce que:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} c\theta c\phi & -\dot{\theta} s\phi & 0 \\ \dot{\phi} c\theta s\phi & \dot{\theta} c\phi & 0 \\ -\dot{\phi} s\theta & 0 & \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\phi & -s\phi & 0 \\ c\theta s\phi & c\phi & 0 \\ -s\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 8-92}$$

La ecuación (69) se puede escribir abreviadamente como:

$$\omega = B(\alpha) \dot{\alpha}$$

Combinando las ecuaciones (40) y (63) en donde se define el operador Jacobiano se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} \xi = J \cdot \dot{q} \\ \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \cdot \dot{q} \\ \dot{X} = J_a \cdot \dot{q} \\ \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = J_a \cdot \dot{q} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 8-93}$$

Reemplazando las ecuaciones (70) y (71) en la ecuación (40):

$$J \cdot \dot{q} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{d} \\ B \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 8-94}$$

$$J \cdot \dot{q} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$J \cdot \dot{q} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B(\alpha) \end{bmatrix} J_a \cdot \dot{q}$$

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B(\alpha) \end{bmatrix} J_a \quad \text{Ecuación 8-95}$$

$$J_a = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B(\alpha)^{-1} \end{bmatrix} J$$

La ecuación 8-88 muestra la relación entre el Jacobiano geométrico y el Jacobiano analítico.

8.3 CONTROL PASIVO DE ORIENTACIÓN

Las técnicas de control pasivo aprovechan los principios básicos de física y de fuerzas naturales que aparecen en el sistema para el diseño de naves espaciales con el propósito de aumentar alguna fuerza sobre este, mientras que se disminuye el efecto sobre las demás. La finalidad del control pasivo de orientación es estabilizar el efecto Spin que se efectúa sobre el cuerpo. Se requiere una simetría estable de inercia, así como una inclinación amortiguada, torques para controlar el Spin en el eje de rotación y una orientación inercial.

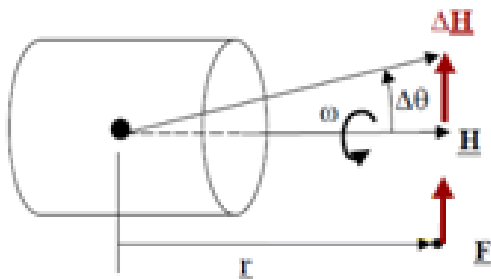


Figura 45. Satélite de un grado de libertad (French, 1995)

Mediante el control del momento angular del satélite se puede corregir la orientación del cuerpo. Si el cuerpo tiene una velocidad angular ω en el eje y y una fuerza externa actúa sobre el cuerpo en la dirección del eje z , el satélite presenta una desviación angular respecto al tiempo. Teniendo en cuenta que la desviación es para ángulos pequeños, se puede aproximar la magnitud de la hipotenusa al mismo valor del momento angular H :

$$\sin(\Delta\theta) = \frac{\Delta H}{H} \quad \text{Ecuación 8-96}$$

$$\Delta H = H \sin(\Delta\theta) \quad \text{Ecuación 8-97}$$

$$\Delta H = H \cdot 2 \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \quad \text{Ecuación 8-98}$$

$$\Delta H = H \cdot \Delta\theta \quad \text{Ecuación 8-99}$$

Teniendo en cuenta que el cambio del momento angular respecto al tiempo depende directamente de la magnitud del torque aplicado al cuerpo, se tiene:

$$\dot{H} = |\tau| \quad \text{Ecuación 8-100}$$

$$\frac{dH}{dt} = rF \quad \text{Ecuación 8-101}$$

$$\Delta H = rF \Delta t \quad \text{Ecuación 8-102}$$

Reemplazando esta ecuación en la relación anterior, se tiene:

$$rF \Delta t = H \cdot \Delta \theta \quad \text{Ecuación 8-103}$$

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{rF}{H} \quad \text{Ecuación 8-104}$$

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{rF}{I\omega} \quad \text{Ecuación 8-105}$$

La ecuación anterior implica que a medida que el satélite posee una mayor velocidad angular, la estabilidad del cuerpo se incrementa, evitando así desviaciones indeseadas. Por lo tanto, una manera de control de orientación sobre el cuerpo es aumentando su velocidad angular de forma que $\Delta \theta$ tienda a cero. El mismo efecto tiene un giróscopo de un eje de rotación, cuando su velocidad angular aumenta, el cuerpo tiende a posicionarse sobre su propio eje, mientras que al disminuir la velocidad angular, el cuerpo se sale de su eje de rotación.

8.4 CONTROL ACTIVO DE ORIENTACIÓN

El sistema de control activo censa directamente la orientación del satélite y suministra un torque para proporcionar el movimiento necesario, este es el concepto básico del control por retroalimentación. El actuador más común son ruedas de reacción, las cuales alteran el centro de masa del cuerpo proporcionándole movimiento rotatorio. Una ventaja del control continuo por retroalimentación es la velocidad de respuesta.

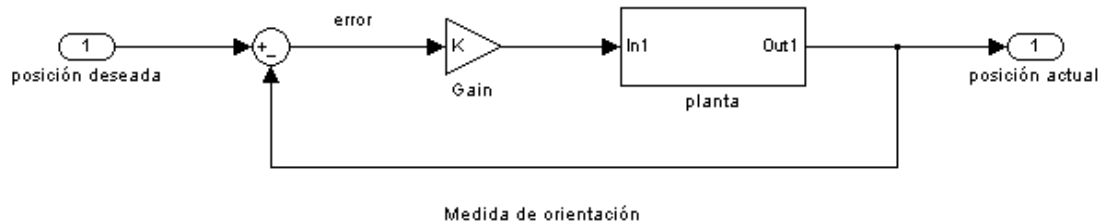


Figura 46. Diagrama de bloques del sistema de control de orientación para un grado de libertad

Del diagrama de bloques tenemos que la diferencia entre la orientación deseada y la orientación del sistema multiplicada por la ganancia es la señal de corrección de torque:

$$T^C = K \cdot \Delta\theta$$

Ecuación 4-106

La ecuación anterior quiere decir que la fuerza o el torque es proporcional a la orientación del sistema. Esta ecuación rige un sistema lineal rotacional, si el satélite responde rápidamente al sistema de control. Un diagrama de bloques aún más completo a manera de ejemplo del sistema de control de orientación de la nave es:

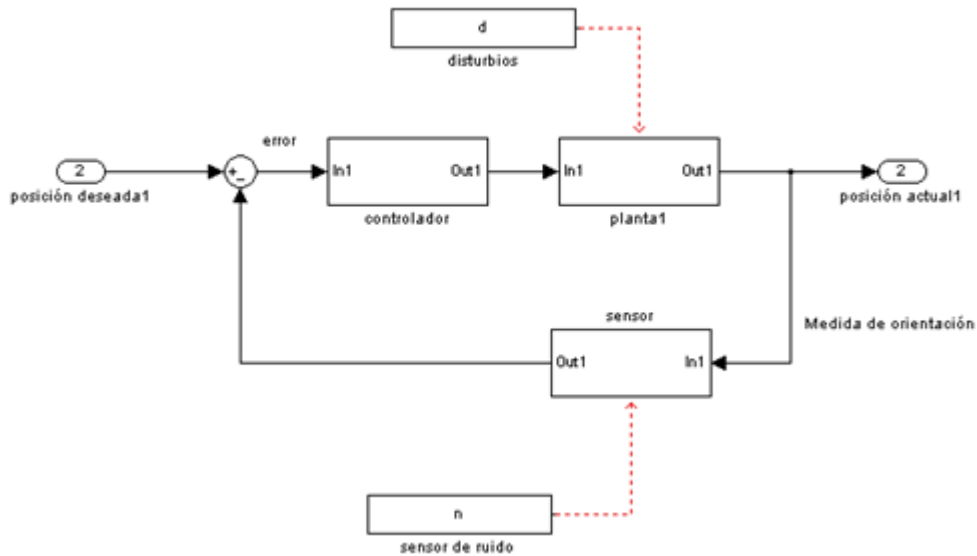


Figura 47. Sistema de control completo para un grado de libertad

La ecuación que rige la dinámica del satélite para un grado de libertad está dada por:

$$H' = \tau_w + \tau_{ext} = I\omega' = I\theta''$$

Ecuación 4-107

La dinámica del actuador (la rueda de reacción) está dada por:

$$h' = \tau_w = J(\Omega' + \theta'')$$

Ecuación 4-108

La ley de retroalimentación escogida para el control del sistema dinámico es:

$$\tau_w = -K_p\theta - K_r\theta'$$

Ecuación 4-109

Combinando la dinámica del actuador con la ley de retroalimentación se llega a:

$$\theta'' + \frac{K_r}{J}\theta' + \frac{K_p}{J}\theta = -\Omega'$$

Ecuación 4-110

La multiplicación entre la constante K_p y el ángulo teta equivale a la retroalimentación de posición mientras que la multiplicación entre la derivada de teta y K_r es la retroalimentación de velocidad (Hollister, 1997). Transformando la anterior ecuación al dominio de Laplace, se tiene la siguiente función de transferencia:

$$\left(s^2 + \frac{K_r}{J} s + \frac{K_p}{J} \right) \theta(s) = -\Omega'(s)$$

$$\frac{\theta(s)}{\Omega'(s)} = -\frac{1}{s^2 + \frac{K_r}{J} s + \frac{K_p}{J}}$$

Ecuación 4-111

La ecuación anterior representa la función de transferencia de la dinámica de un satélite con una rueda de reacción en lazo cerrado. Dependiendo de la entrada del torque, la planta presenta una respuesta. Para el diseño del controlador se utilizó el método basado en síntesis directa. Con esta acción de control se busca una respuesta ideal cumpliendo todos los requisitos deseados para el diseño del sistema. Se usa generalmente para sistemas con funciones de transferencia sencillas. Se escogió esta acción de control debido a su fuerte acercamiento a los valores requeridos para el diseño.

La función de transferencia del controlador PD es:

$$G_c = T_p + T_d \cdot s$$

Ecuación 4-112

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema es:

$$T(s) = \frac{G(s)G_c(s)}{1 + G(s)G_c(s)}$$

Ecuación 4-113

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{T_d}{I} s + \frac{T_p}{I}}$$

La función de transferencia del sistema en lazo cerrado tiene la forma de la función de transferencia general de un sistema de segundo orden, la cual está dado por:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Ecuación 4-114

Donde ξ y ω_n son las constantes dinámicas del sistema. La constante ω_n es la frecuencia natural e indica la rapidez de respuesta, mientras que ξ es el coeficiente de amortiguamiento y proporciona una idea del grado de oscilación de la respuesta.

$$\text{Dado que } T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{T_s\xi} = 0.00363636$$

Utilizando los parámetros según mencionados anteriormente por (Wie, 1952) y (Hollister, 1997). Se tiene $I = 440 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ y $T_s = 1100 \text{ s}$. Igualando los denominadores de las **ecuaciones 4-42 y 4-43** se obtiene:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T_p}{I}} \Rightarrow T_p = I\omega_n^2 = 0.00132231$$

Ecuación 4-115

$$\xi = \frac{T_d}{2I\omega_n} \Rightarrow T_d = 2I\omega_n\xi = 0.145455$$

Estas ecuaciones fueron verificadas por los apuntes de la clase “Satellite Engineering” (Hollister, 1997). Implementando el controlador mediante Simulink, y teniendo en cuenta la función de transferencia de la planta:

$$G(s) = \frac{9.09091 \times 10^{-3}}{s(s + 9.09091 \times 10^{-3})(s + 145.455 \times 10^{-3})} = \frac{9.09091 \times 10^{-3}}{s^3 + 154.545 \times 10^{-3} s^2 + 1.32231 \times 10^{-3} s}$$

Ecuación 4-116

$$G_c(s) = 0.0132231 + 0.145455 \cdot s$$

Ecuación 4-117

$$T(s) = \frac{0.132231}{s^2 + \frac{64}{440}s + \frac{58.1818}{440}} = \frac{0.132231}{s^2 + 0.145455s + 0.132231}$$

Ecuación 4-118

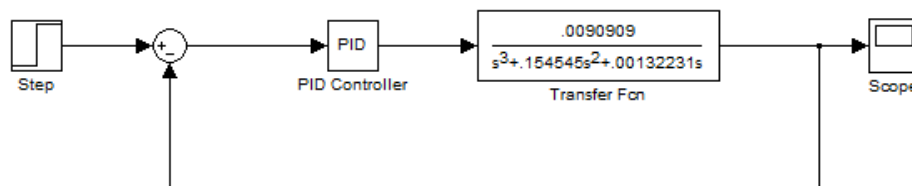


Figura 48. Diseño del sistema de control de orientación 1DOF

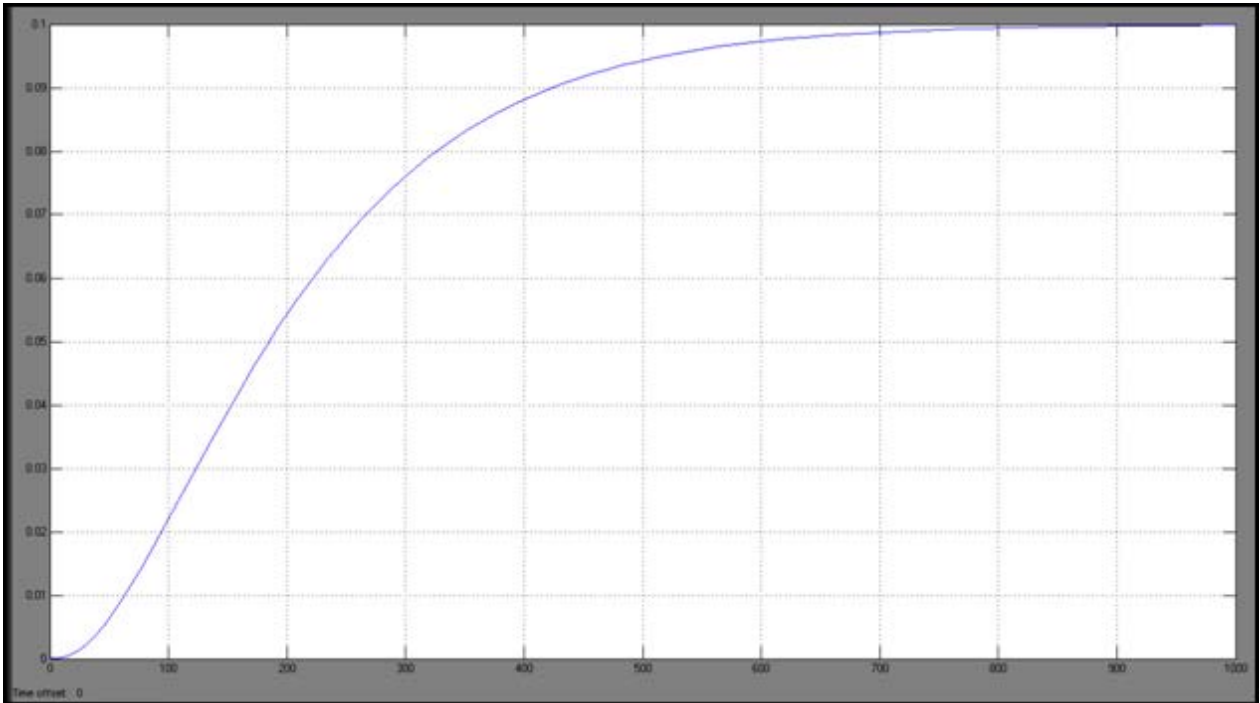


Figura 49. Respuesta paso (posición) al sistema de control con entrada 0.1Nm

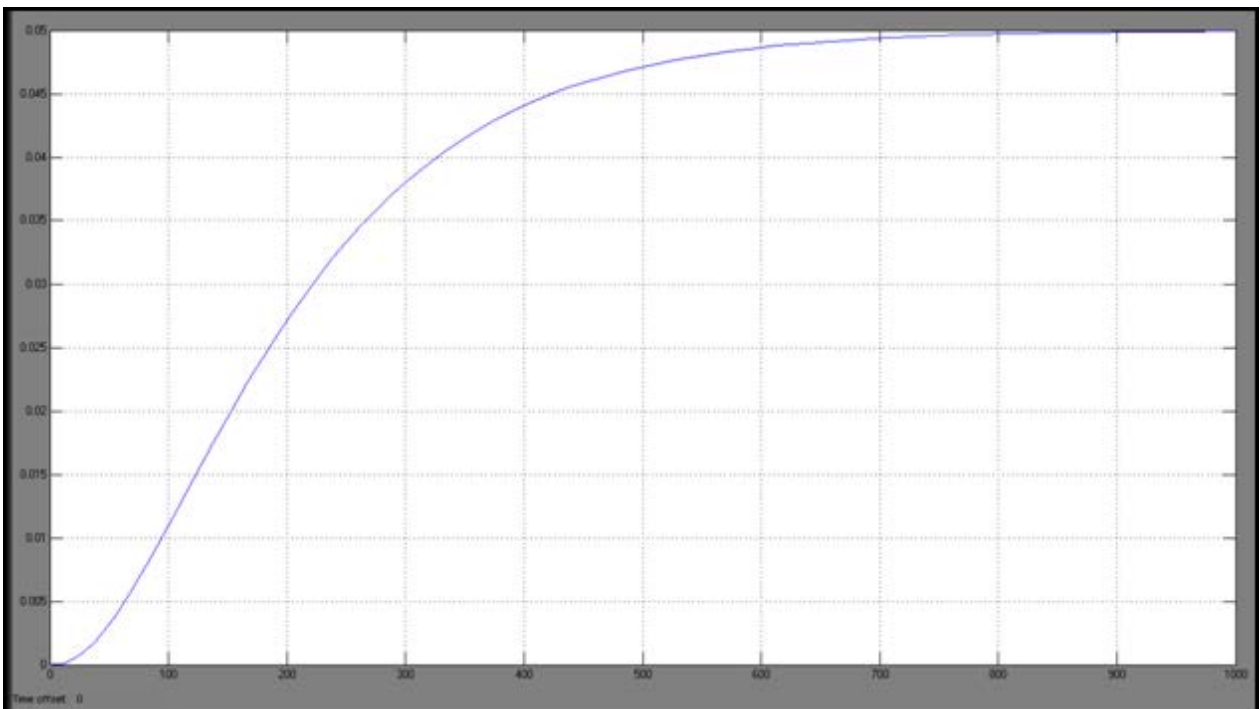


Figura 50. Respuesta paso (posición) al sistema de control con entrada 0.05Nm

El control de orientación de un grado de libertad es independiente de las otras variables. Este sistema de control se puede utilizar para cada una de las orientaciones de manera independiente, de forma que cuasi estáticamente los grados de libertad se puedan controlar para así lograr el movimiento total o cambio de orientación del sistema. Luego de la implementación, se observa la respuesta del diseño del sistema de control. De aquí se extrae que el tiempo de establecimiento se da en aproximadamente 1000 segundos, respuesta que es esperada según el tipo de satélite nombrado anteriormente. Por otro lado, se establece una

frecuencia de 0.003 radianes por segundo, con el fin de diseñar un sistema suave a los cambios ya que la planta de por sí tiene un integrador; por lo cual se diseña un control tipo PD.

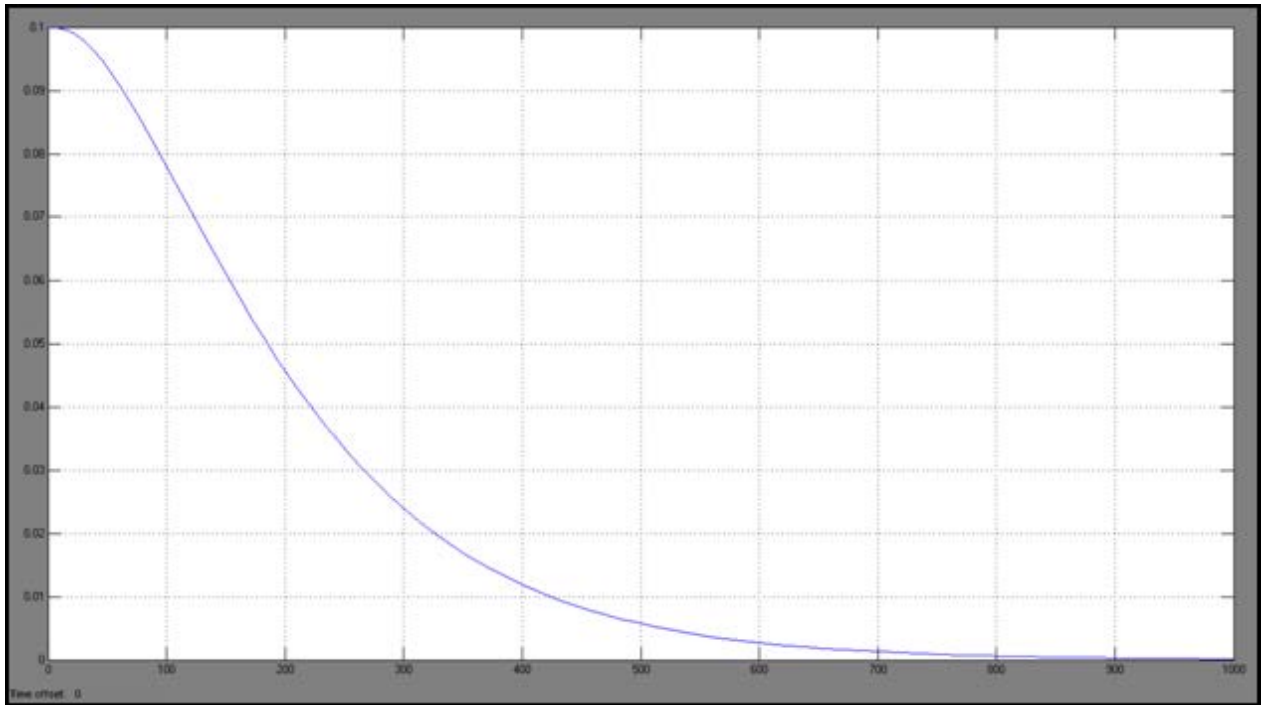


Figura 51. Respuesta paso (velocidad angular) al sistema de control con entrada 0.1Nm

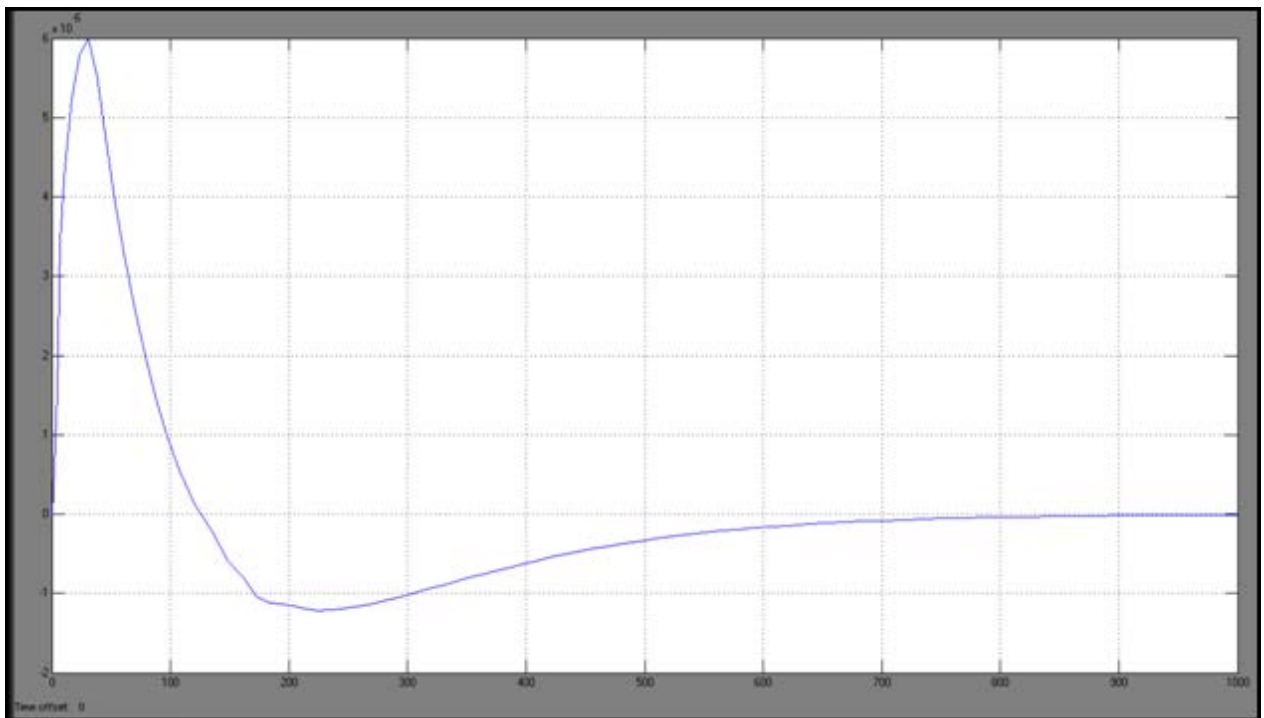


Figura 52. Respuesta paso (aceleración angular) al sistema de control con entrada 0.1Nm